MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS, VOL. 32, NO. 2, 2025
journal homepage: www.mais-journal.ru

COMPUTING METHODOLOGIES AND APPLICATIONS

Detection of Square Wave Impulse Interference in Eddy Current Rail Defectograms

L. Y. Bystrov[1], A. N. Gladkov[1], E. V. Kuzmin[1]

DOI: 10.18255/1818-1015-2025-2-172-205

[1]P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

MSC2020: 62P30
Research article
Full text in Russian

Received February 10, 2025
Revised May 23, 2025
Accepted May 28, 2025

Traffic safety in rail transport requires continuous monitoring of the rail condition for timely detection and elimination of defects. One of the methods of non-destructive testing of rails is eddy current flaw detection. The data obtained from eddy current flaw detectors (defectograms) are characterized by a significant volume, which makes it necessary to develop effective methods for their automatic processing and analysis. The analysis of defectograms is complicated by various interferences and noises present in the data. One of the most dangerous interferences that significantly distort the shape of useful signals is prolonged impulse interference. They are characterized by a pronounced square wave shape. Unlike instant impulse interference, prolonged noise cannot be eliminated by classical methods. There are no proven effective methods not only for suppressing square wave interference, but even for detecting it. This article attempts to eliminate this drawback and proposes an effective method for detecting square wave impulse interference on eddy current defectograms, which has good explanatory power. Square signals are explored from the point of view of their probability distribution. SW-characteristic was introduced, which allows to estimate the likelihood of data to the distribution of bipolar impulse signals. The smaller the value of SW-characteristic, the more similar the data distribution is to the distribution of bipolar impulse signals (upon condition that the data are normal). Square wave signals are particular example of bipolar impulse signals. The properties of SW-characteristic were examined. SW-characteristic were calculated for the normal distribution and the distribution of a homoscedastic mixture of two Gaussians. It was shown that the value of SW-characteristic for the normal distribution approximately separates the bimodal mixture of two Gaussians from the unimodal case. These and other properties of SW-characteristic allow using it to detect square wave signals in data by comparing with a threshold, which should satisfy a number of conditions. The application of the criterion based on SW-characteristic was demonstrated on the examples of eddy current defectograms; a comparison was made with criteria based on the EM-algorithm and multiscale disperse entropy. The criterion proposed in the article showed the best results. The use of SW-characteristic for detecting square wave noise has proven its effectiveness in the analysis of eddy current defectograms and can be adapted in the future to work with other types of data.

Keywords: impulse noise; square wave interference; sw-characteristic; eddy current testing; mixture of two gaussians

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Bystrov, Leonid Y. (corresponding author)	ORCID iD: 0000-0002-0610-5466. E-mail: l.bystrov@uniyar.ac.ru Assistant of the Department of Theoretical Computer Science
Gladkov, Artemy N.	ORCID iD: 0009-0007-0211-5660. E-mail: a.gladkov@uniyar.ac.ru Assistant of the Department of Theoretical Computer Science
Kuzmin, Egor V.	ORCID iD: 0000-0003-0500-306X. E-mail: kuzmin@uniyar.ac.ru Head of the Department of Theoretical Computer Science, Dr. Sc.

Funding: Yaroslavl State University (project VIP-016).

For citation: L. Y. Bystrov, A. N. Gladkov, and E. V. Kuzmin, “Detection of square wave impulse interference in eddy current rail defectograms”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 32, no. 2, pp. 172–205, 2025.
DOI: 10.18255/1818-1015-2025-2-172-205.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ, ТОМ 32, № 2, 2025
сайт журнала: www.mais-journal.ru

COMPUTING METHODOLOGIES AND APPLICATIONS

Обнаружение прямоугольных импульсных помех на вихретоковых дефектограммах рельсов

Л. Ю. Быстров[1], А. Н. Гладков[1], Е. В. Кузьмин[1]

DOI: 10.18255/1818-1015-2025-2-172-205

[1]Ярославский государственный университет им.П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

УДК 519.254
Научная статья
Полный текст на русском языке

Получена 10 февраля 2025 г.
После доработки 23 мая 2025 г.
Принята к публикации 28 мая 2025 г.

Обеспечение безопасности движения на железнодорожном транспорте требует постоянного мониторинга состояния рельсов для своевременного выявления и устранения дефектов. Одним из методов неразрушающего контроля рельсов является вихретоковая дефектоскопия. Данные (дефектограммы), получаемые от вихретоковых дефектоскопов, отличаются значительным объёмом, что делает необходимым разработку эффективных методов их автоматической обработки и анализа. Анализ дефектограмм может быть осложнён присутствием в данных различных помех и шумов. Одними из наиболее опасных помех, существенно искажающих форму полезных сигналов, являются продолжительные импульсные помехи. Они характеризуются выраженной прямоугольной формой. В отличие от мгновенных импульсных помех, продолжительные шумы классическими методами не устраняются. Не существует зарекомендовавших себя эффективных методов не только для подавления прямоугольных помех, но даже для их обнаружения. Данная статья пытается устранить этот недостаток и предлагает действенный метод для обнаружения таких помех на вихретоковых дефектограммах, обладающий хорошей объясняющей способностью. Прямоугольные сигналы исследуются с точки зрения их вероятностного распределения. Введена SW-характеристика, позволяющая оценить правдоподобие данных для распределения биполярных импульсных сигналов. Чем меньше значение SW-характеристики, тем более распределение данных похоже на распределение биполярных импульсных сигналов. Прямоугольные сигналы являются частным случаем биполярных импульсных сигналов. Исследованы свойства SW-характеристики. SW-характеристика вычислена для нормального распределения и распределения гомоскедастичной смеси двух гауссиан. Показано, что значение SW-характеристики нормального распределения примерно разграничивает бимодальную смесь двух гауссиан от унимодального случая. Эти и другие свойства SW-характеристики позволяют использовать её для обнаружения прямоугольных сигналов в данных. Применение критерия на основе SW-характеристики продемонстрировано на реальных примерах вихретоковых дефектограмм, проведено сравнение с критериями на основе EM-алгоритма и многомасштабной дисперсной энтропии. Предложенный в данной статье критерий показал лучшие результаты. Использование SW-характеристики для обнаружения прямоугольного шума доказало свою эффективность на практике при анализе вихретоковых дефектограмм рельсов. Подход может быть адаптирован для работы с другими видами данных.

Ключевые слова: импульсный шум; прямоугольные помехи; sw-характеристика; вихретоковая дефектоскопия; смесь двух гауссиан

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Быстров, Леонид Юрьевич (автор для корреспонденции)	ORCID iD: 0000-0002-0610-5466. E-mail: l.bystrov@uniyar.ac.ru Ассистент, кафедра теоретической информатики
Гладков, Артемий Николаевич	ORCID iD: 0009-0007-0211-5660. E-mail: a.gladkov@uniyar.ac.ru Ассистент, кафедра теоретической информатики
Кузьмин, Егор Владимирович	ORCID iD: 0000-0003-0500-306X. E-mail: kuzmin@uniyar.ac.ru Заведующий кафедрой теоретической информатики, доктор физ.-мат. наук

Финансирование: ЯрГУ (проект VIP-016).

Для цитирования: L. Y. Bystrov, A. N. Gladkov, and E. V. Kuzmin, “Detection of square wave impulse interference in eddy current rail defectograms”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 32, no. 2, pp. 172–205, 2025.
DOI: 10.18255/1818-1015-2025-2-172-205.

Введение

Обеспечение безопасности движения на железнодорожном транспорте требует своевременного выявления дефектов рельсов. Для решения этой задачи регулярно проводится неразрушающий контроль рельсового полотна. Одним из методов обнаружения дефектов в объектах железнодорожной инфраструктуры является вихретоковая дефектоскопия [1].

Данная статья продолжает серию работ по автоматической расшифровке вихретоковых дефектограмм [2—5]. Объектом исследования выступают записи 12-разрядного 15-канального вихретокового дефектоскопа (см. рис. 1). Каждый канал соответствует отдельному физическому датчику, установленному на поверхности железнодорожного рельса перпендикулярно направлению движения дефектоскопа. Устройство регистрирует сигналы (по каждому каналу) с шагом в один миллиметр железнодорожного пути.

Данные (дефектограммы), полученные в ходе дефектоскопии, требуют тщательного анализа. Цель такого анализа — выделение участков, указывающих на наличие дефектов в рельсе на фоне рельсового шума и различных помех.

Среди шумов, затрудняющих анализ дефектограмм, особо выделяются импульсные шумы. Импульсный шум (impulse noise, burst noise) — это взрывное шумовое событие, обычно электромагнитного происхождения, с потенциально высокой амплитудой (мощностью). К возникновению импульсного шума приводят скачки напряжения, наводки, отказы сенсоров регистратора [6].

Имеются разные виды импульсных шумов. Для мгновенных импульсных шумов существуют эффективные алгоритмы фильтрации, в основном представляющие собой модификации медианного фильтра [7]. Подавления импульсного шума такого рода удаётся достигнуть с помощью алгоритма SD-ROM [8], адаптивно-когнитивного фильтра Калмана [9, 10], систем активного подавления шума [11], методов машинного обучения [12].

Совсем иначе обстоит дело с продолжительными импульсными шумами. Фильтры, основанные на ранговых статистиках (в том числе медианные фильтры), с продолжительными шумами не справляются, потому что шум теперь представляет собой не выбросы в отдельных точках данных, а существенную, несущую составляющую. В случае биполярного продолжительного импульсного шума смешанный с ним сигнал приобретает выраженную прямоугольную форму, которая классическими методами фильтрации не устраняется (см. рис. 2).

Фильтрация данных сопряжена с потерей полезных сигналов. В отношении прямоугольного импульсного шума особенно важно перед применением алгоритмов подавления шума проверить, действительно ли данные содержат этот вид шумов. Таким образом, помимо подавления шума не менее востребованным является решение задачи его обнаружения.

Данная работа посвящена обнаружению прямоугольных продолжительных импульсных шумов в вихретоковых дефектограммах. Задача решается для записей только одного канала дефектоскопа, а не всех 15 каналов сразу, то есть поиск прямоугольных шумов производится по каждому каналу отдельно. Подход к обнаружению основан на прямоугольной форме шума и его вероятностном распределении. Фактически решается задача оценки соответствия распределения данных распределению биполярных импульсных сигналов. В разделе 3 приводится формальное определение прямоугольного сигнала, рассматривается форма распределения биполярных импульсных шумов. Показано, что биполярный импульсный сигнал имеет закон распределения гомоскедастичной смеси двух гауссианов. Этот вид распределения достаточно хорошо изучен [13—16]. В разделе 4 делается вероятностное предположение о нормальности исходных данных, на котором основывается обсуждаемый далее критерий обнаружения биполярных импульсных сигналов. В разделе 5 установлена нижняя оценка функции правдоподобия распределения прямоугольных сигналов. В разделе 6 введена SW-характеристика, изучен ряд её свойств, в том числе показано, как характеристика связана с прямоугольными сигналами и как её оценивать по выборке. В разделе 7 SW-характеристика вычис-

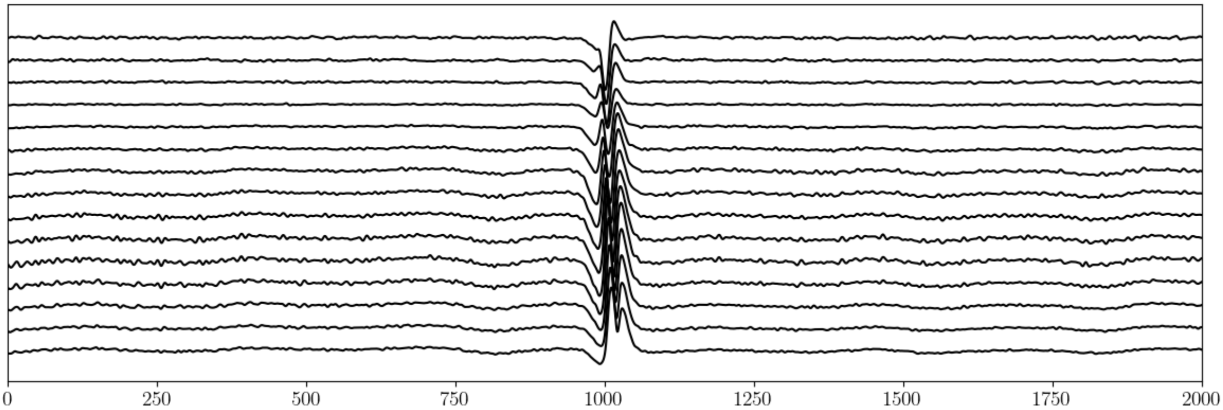


Fig. 1. The example of the flaw detector record of a bolted rail joint

Рис. 1. Пример записи дефектоскопом болтового стыка рельсов

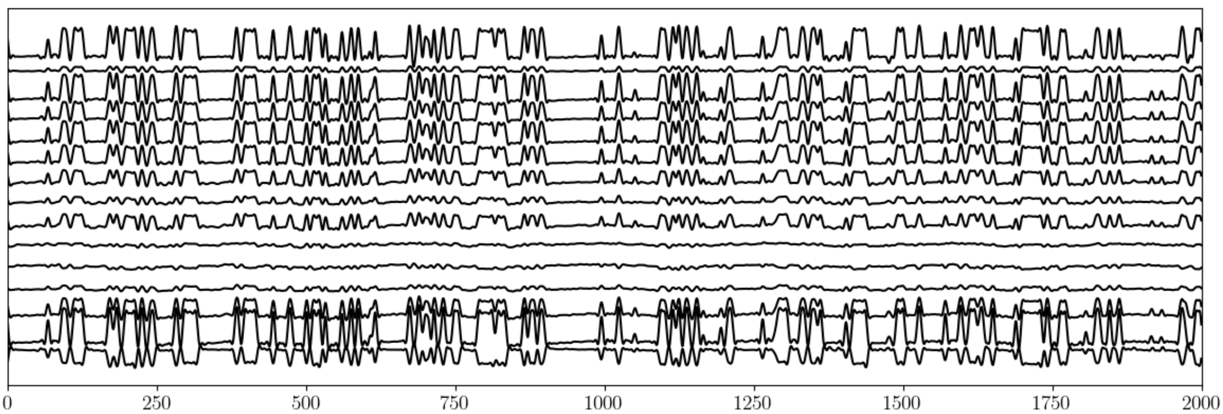


Fig. 2. The example of a square wave noise on an eddy current defectogram

Рис. 2. Пример прямоугольного шума на вихретоковой дефектограмме

лена для нормального распределения. В разделе 8 SW-характеристика считается для гомоскедастичной смеси двух гауссианов, показана связь SW-характеристики с бимодальностью распределения, выдвинут критерий обнаружения прямоугольных сигналов на основе SW-характеристики (SW-критерий). В разделе 9 приводятся экспериментальные результаты применения SW-критерия, EM-алгоритма и MDE-порога для обнаружения прямоугольных сигналов. Отмечено, что SW-критерий даёт лучшие результаты по сравнению с другими методами.

1. Обзор существующих решений

Традиционные методы, используемые для обнаружения импульсного шума, основаны на преобразовании Фурье. Методы эффективны только в том случае, если амплитуда импульсного шума имеет высокие значения, отчётливо выделяющиеся при идентификации, при этом методы оказываются трудоёмкими и требующими громоздких вычислений [17]. Другой подход к обнаружению продолжительных импульсных шумов основан на пороговой обработке вейвлет-коэффициентов. Авторы [18] выделили импульсный шум из гауссовского шума с помощью вейвлета Хаара. Также вейвлет-анализ для детекции импульсных шумов применялся в работе [17]. При этом ни те, ни другие исследователи не привели конкретных алгоритмов обнаружения импульсного шума. Их работы носят скорее методологический, а не конструктивный характер в отношении решаемой проблемы.

В геофизике нередко приходится работать с данными, представленными в виде временных рядов. Например, такой вид имеют результаты магнитотеллурического зондирования. В магнитотеллурических данных часто встречаются шумы культурного происхождения, к которым относятся и продолжительные прямоугольные шумы. Проанализируем несколько работ, вышедших в последние годы, которые посвящены подавлению и обнаружению прямоугольного шума в магнитотеллурических данных.

Исследователи из Цзилиньского университета в качестве показателя зашумлённости данных использовали многомасштабную дисперсную энтропию (Multiscale Dispersion Entropy, MDE) [19]. Если значение *MDE* ниже некоторого экспериментально полученного порога, то сигнал считался зашумлённым. Авторы статьи утверждают, что особенно хорошо *MDE* позволяет выявлять прямоугольный импульсный шум. Среди рассматриваемых ими шумов прямоугольный шум обладал наименьшим значением *MDE*. Помимо метода обнаружения прямоугольного шума исследователи предлагают также метод подавления шума на основе дискретного вейвлет-преобразования и сингулярного разложения. Они разбивают данные на несколько сегментов с помощью алгоритма восстановления фазового пространства. Далее, для каждого сегмента проводится вейвлет-фильтрация по заранее заданному количеству уровней вейвлет-коэффициентов. Отфильтрованные сегменты выстраиваются в матрицу, для которой ищется сингулярное разложение специального вида. Наконец, из матрицы сингулярных чисел выделяется подматрица, которая используется для восстановления исходного сигнала. Авторы утверждают, что их алгоритм подавления шумов успешно справляется с прямоугольным шумом, практически не искажая полезные элементы в данных. Свои утверждения они подтверждают тестами алгоритма на зашумлённых магнитотеллурических данных. При этом сам алгоритм подавления описывается авторами в общих словах, без предоставления конкретной реализации, что затрудняет проверку алгоритма на вихретоковых дефектограммах.

Авторы [20] для обнаружения прямоугольных импульсных помех предлагают использовать уточнённую составную многомасштабную дисперсную энтропию (RCMDE). Они вычисляют RMCDE с разными параметрами масштаба для получения вектора признаков, описывающего сигнал, с последующей кластеризацией с помощью алгоритма нечёткой кластеризации (Fuzzy C-means). В статье отмечаются преимущества RMCDE по сравнению с многомасштабной дисперсной энтропией (MDE) и многомасштабной энтропией (ME). Кластеризация на основе вектора RMCDE используется для обнаружения прямоугольных шумов, при этом, как интерпретировать результаты кластеризации в случае отсутствия прямоугольного шума, авторы не сообщают. Для подавления шумов предлагается использовать алгоритм OMP (Orthogonal matching pursuit) с обученным словарём на основе синусоидальных волн и вейвлетов семейства симлетов (sym) и Добеши (db). В заключении авторы подчёркивают, что при амплитуде прямоугольного шума, сопоставимой с амплитудой чистого сигнала, предложенный метод работать не будет.

В статье [21] обнаружение прямоугольных шумов производится с помощью свёрточных нейронных сетей с остаточными связями (ResNet). Для каждых 32 отчётов магнитотеллурических данных авторы сформировали грамианово угловое поле (GAF), которое в виде цветного изображения подавалось на вход сети. Каждый GAF был отмечен как содержащий (класс 1) или не содержащий шум (класс 0). Объём обучающей выборки составил 10 000 000 изображений. Доля правильных ответов (accuracy) на валидационной выборке превысила 98 %. При этом авторы не пишут, как они сформировали обучающую выборку. Непонятно, использовали ли они ручную разметку или применяли какие-то алгоритмы для автоматического обнаружения шумов. Те же вопросы вызывает их метод подавления шумов, основанный на свёрточной сети с остаточными связями, но уже не с двумерными, а с одномерными свёртками. Авторы используют в обучающей выборке зашумлённые и очищенные от шума фрагменты данных, хотя о том, как данные были очищены от шума, в статье не сказано.

Ещё один подход для подавления прямоугольных шумов в магнитотеллурических данных на основе нейронных сетей представили авторы [22]. Исследователи использовали DRSN-сеть (Deep Residual Shrinkage Network). Эта нейронная сеть работает непосредственно с одномерными сигналами, а не с изображениями. Для формирования обучающей выборки авторы создают синтетические данные, искусственно прибавляя к чистым данным шумы разной формы. Обнаружение прямоугольных или иных шумов перед фильтрацией не производится. То же самое можно сказать и о работе [23]. В ней для подавления прямоугольного шума используется шумоподавляющая свёрточная нейронная сеть (Denoising Convolutional Neural Network) с управляющим рекуррентным блоком (Gated Recurrent Unit), интегрированная с обучением словаря по методу K-сингулярного разложения (K-Singular Value Decomposition). Обучение сети производилось на основе синтетических данных. Перед шумоподавлением процедура обнаружения шума отсутствует.

Итак, в последнее время появилось достаточно много новых методов решения задачи подавления прямоугольного шума. Эффективность и надёжность данных методов нуждается в апробации, которую иногда трудно провести ввиду расплывчатого и неполного описания методов в соответствующих статьях. Задаче обнаружения прямоугольного шума в литературе уделено гораздо меньше внимания. Существующие немногочисленные алгоритмы не гарантируют корректности своих ответов. Поэтому задача обнаружения прямоугольных шумов продолжает оставаться актуальной. В данной работе предлагается и исследуется одно из возможных её решений.

2. Основные понятия

Пусть X — непрерывная случайная величина, через $F_X(x)$ обозначим её функцию распределения, а через $f_X(t)$ — её функцию плотности:

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

$\mathbb{E}X$ — математическое ожидание величины X, $\mathbb{V}X$ — её дисперсия:

$$\mathbb{V}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2. \tag{1}$$

Пусть $g(x)$ — функция действующая из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Тогда, если случайная величина $Y = g(X)$ имеет математическое ожидание, то оно может быть найдено по формуле

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_X(t)dt.$$

Через $\mathbb{I}[Pred(X)]$ будем обозначать индикаторную случайную величину

$$\mathbb{I}[Pred(X)] = \begin{cases} 1, & Pred(X) = true, \\ 0, & Pred(X) = false. \end{cases}$$

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределённые с величиной X случайные величины. Последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, являющихся значениями соответствующих случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, называется *выборкой* объёма n, *порождённой случайной величиной* X.

Пусть X — непрерывная случайная величина, распределённая по некоторому закону с параметрами $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$, последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка, порождённая случайной величиной X, $f(\Theta, t)$ — функция плотности распределения X. *Функцией правдоподобия* $L(\Theta)$ называется функция

$$L(\Theta) = \prod_{i=1}^{n} f(\Theta, x_i).$$

Вероятность события A будем обозначать как $\mathbb{P}(A)$. Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *сходится по вероятности* к случайной величине X, то есть $X_n \xrightarrow{P} X$ [24], если

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Характеристическую функцию случайной величины X обозначим через $\varphi_X(t)$:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}), \text{ где } i = \sqrt{-1}.$$

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — непрерывные случайные величины с функциями плотности распределения $f_{X_1}(t), f_{X_2}(t), \ldots, f_{X_n}(t)$ соответственно, числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$ такие, что $p_i \in [0; 1], \forall i \in \overline{1, n}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Тогда *смесью величин* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ будет называться величина X, имеющая функцию плотности распределения

$$f_X(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_{X_i}(t).$$

В частности, *смесью нормальных распределений* или *смесью гауссиан* будет называться смесь величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, имеющих нормальный закон распределения $\mathbb{N}\left(\mu_i, \sigma_i^2\right), i \in \overline{1, n}$. При равенстве $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_n^2$ смесь называется *гомоскедастичной* [14].

3. Прямоугольный сигнал

Под прямоугольным сигналом будем понимать периодическую с периодом T функцию $s(t)$, заданную в точках $t \in [0; n]$, вида

$$s(t) = \begin{cases} m_1, & t \in [kT; (p+k)T), \\ m_2, & t \in [(p+k)T; (k+1)T), \end{cases} \tag{2}$$

где $k \in \overline{0, \frac{n}{T} - 1}$. Число n считается кратным T.

Прямоугольный сигнал $s(t)$ является биполярным, то есть принимает в периоде одно из двух полярных значений (импульсов). Числа $m_1 \leqslant 0$, $m_2 > 0$ соответствуют значениям импульса. Длительность первого импульса m_1 на периоде T определяется как pT, где $p \in (0; 1)$, а длительность второго импульса m_2 соответственно будет равна $(1-p)T$. Графически прямоугольный сигнал представлен на рис. 3.

На практике идеальный прямоугольный сигнал, описываемый функцией $s(t)$, встречается редко. Более реалистичным сценарием является тот, когда на сигнал накладывается шум, искажающий его идеальную прямоугольную форму (рис. 4). Будем предполагать, что на прямоугольный сигнал

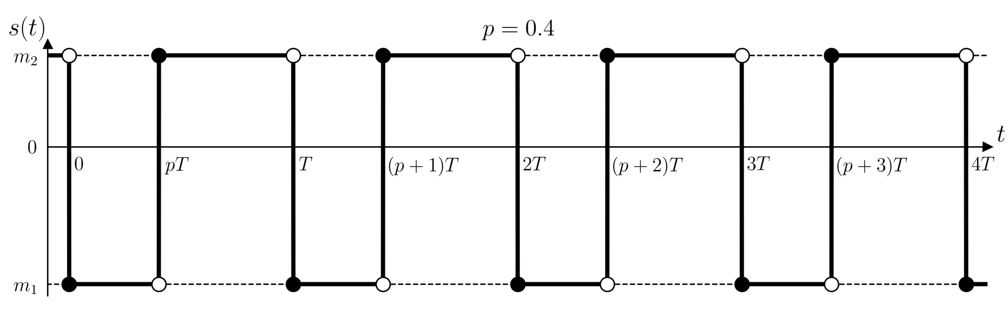


Fig. 3. A square wave signal

Рис. 3. Прямоугольный сигнал

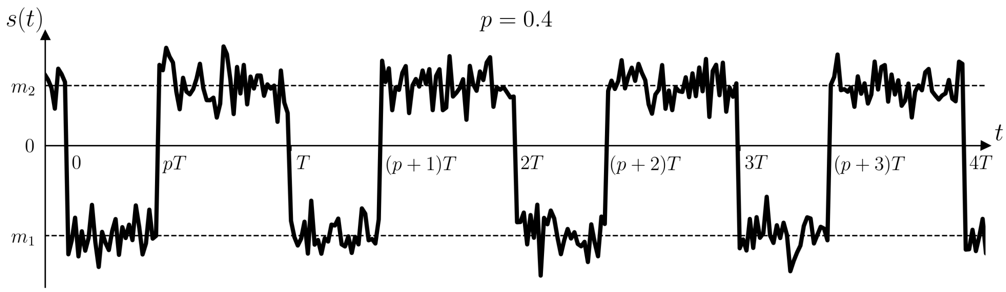


Fig. 4. The square wave signal with normal noise

Рис. 4. Прямоугольный сигнал с нормальным шумом

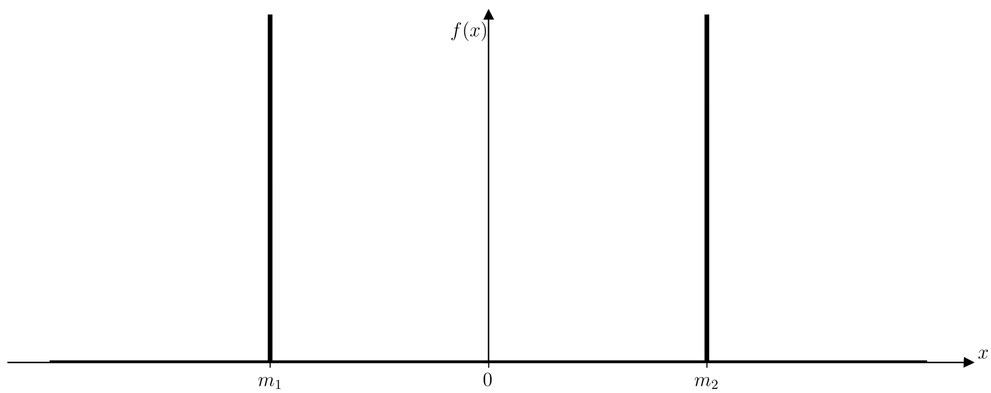


Fig. 5. The distribution density function of a square wave signal

Рис. 5. Функция плотности распределения прямоугольного сигнала

накладывается нормальный гомоскедастичный шум с дисперсией σ^2. В этом случае можно говорить о случайных величинах Y_t вида

$$Y_t = s(t) + \varepsilon_t, \text{ где } \varepsilon_t \sim \mathbb{N}(0;\sigma^2). \tag{3}$$

Величины Y_t будут распределены по нормальному закону $\mathbb{N}(m_1;\sigma^2)$ при $t \in [kT;(p+k)T)$ и по нормальному закону $\mathbb{N}(m_2;\sigma^2)$ при $t \in [(p+k)T;(k+1)T)$, то есть в зависимости от параметра t величины Y_t могут иметь разные законы распределения.

Если бы импульсы в сигнале $s(t)$ не имели обязательной продолжительности и могли бы возникать произвольно в любой момент времени t, а параметр p регулировал бы соотношение количества отрицательных и положительных импульсов, то сигнал $s(t)$ можно было бы рассматривать как функцию от случайной величины, плотность распределения которой можно записать через смесь двух δ-функций Дирака (рис. 5):

$$f(x) = p\delta(x-m_1) + (1-p)\delta(x-m_2), \text{ где } \delta(x) = 0 \text{ для } \forall x \neq 0 \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1.$$

Конечно, сигнал $s(t)$ с произвольными моментами импульсации уже не является прямоугольным. Но модель такого сигнала может быть полезна для исследования прямоугольных сигналов. В отличие от Y_t получаемые здесь случайные величины Z_t будут иметь один и тот же закон распределения независимо от времени t — гомоскедастичную смесь двух гауссиан $\mathbb{N}_2(m_1, m_2, \sigma^2, p)$, где m_1, m_2 — математические ожидания значений отрицательного и положительного импульсов,

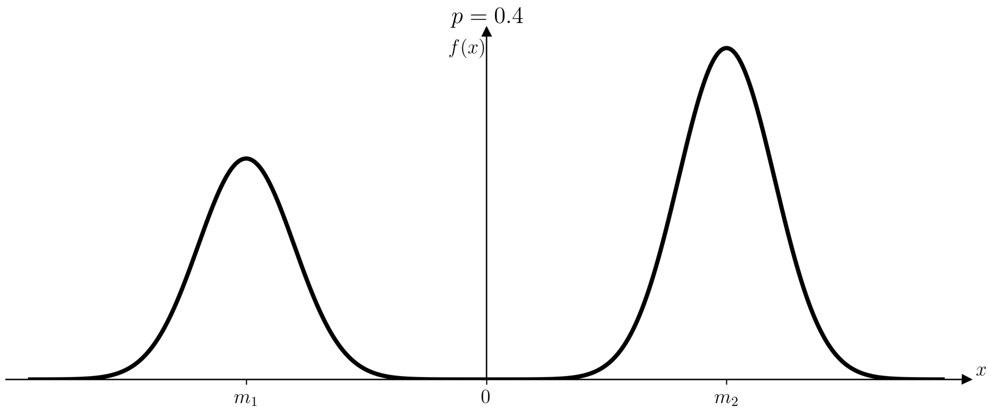


Fig. 6. The distribution density function of a square wave signal with normal noise

Рис. 6. Функция плотности распределения прямоугольного сигнала с нормальным шумом

σ^2 — дисперсия нормального шума, p — параметр смеси. Такой переход позволяет заменить последовательность величин Y_t, имеющих разный закон распределения в зависимости от t, на одну единственную величину Z:

$$Z_t = Z \sim \mathbb{N}_2(m_1, m_2, \sigma^2, p). \tag{4}$$

Первый гауссиан сосредоточен вокруг отрицательного импульса m_1 по нормальному закону $\mathbb{N}(m_1, \sigma^2)$. Соответственно, второй гауссиан сосредоточен вокруг положительного значения m_2 по закону $\mathbb{N}(m_2; \sigma^2)$. Соотношение гауссианов в смеси определяется параметром $p \in [0; 1]$. Это те самые гауссианы, которые описывали распределение величин Y_t (рис. 6). Функция плотности распределения величины Z имеет вид

$$f_Z(x) = \frac{p}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma^2}} + \frac{(1-p)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma^2}}. \tag{5}$$

Величина Z соответствует импульсным сигналам с произвольными моментами импульсации. Такой объект для исследования кажется более простым по сравнению с последовательностью величин Y_t прямоугольного шума, поэтому пока остановимся на нём. В дальнейшем будет предложен способ связать произвольные импульсные шумы с прямоугольными через SW-характеристику.

Важным свойством прямоугольного шума является его выраженная полярность, или, иначе, бимодальность. Если m_1 и m_2 достаточно близки друг к другу, то смесь двух гауссиан вырождается в один единственный гауссиан. Необходимые и достаточные условия бимодальности гомоскедастичной смеси двух гауссиан были получены в [13].

Теорема о бимодальности гомоскедастичной смеси. *Функция плотности* (5) *распределения является бимодальной тогда и только тогда, когда число* $D = \frac{|m_2 - m_1|}{2\sigma}$ *удовлетворяет всем перечисленным ниже условиям:*

(1) $D^2 > 1$,

(2) $|\log \frac{p}{1-p}| < 2\log(D - \sqrt{D^2 - 1}) + 2D\sqrt{D^2 - 1}$.

В нашем случае $m_2 > m_1$, поэтому модуль в числе D можно опустить. Рисунки 7 и 8 показывают, что происходит со смесью гауссиан $\mathbb{N}_2$, когда условия бимодальности (1) и (2) не соблюдаются. При нарушении условий биполярность функции плотности распределения теряется. Прямоугольные сигналы не могут иметь такого распределения. Таким образом, необходимо потребовать, чтобы функция плотности распределения величины Z была бимодальной смесью двух гауссиан.

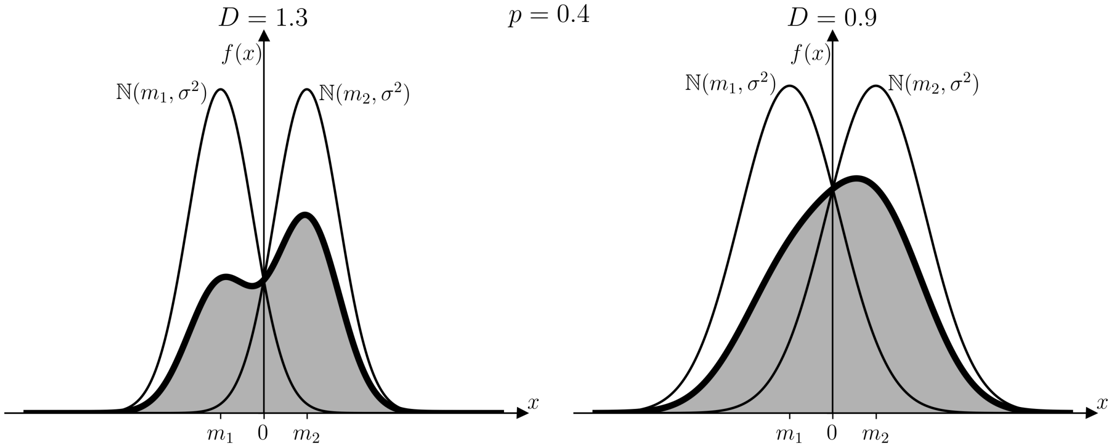


Fig. 7. The distribution density function of two Gaussian mixture when the condtition (1) of the bimodality theorem is met (on the left) and when the condition is violated (on the right)

Рис. 7. Функция плотности распределения смеси двух гауссиан при выполнении условия (1) теоремы о бимодальности (слева) и нарушении этого условия (справа)

Число p отвечает за частоту встречаемости отрицательных импульсов среди импульсов обоих знаков. Изменение параметра p регулирует относительную высоту гауссиан в смеси. При значениях p, близких к 0 или к 1, смесь гауссиан в соответствии с теоремой о бимодальности теряет полярность, что, опять же, не характерно для прямоугольных сигналов.

4. Вероятностные предположения о данных

Будем считать, что данные одного канала вихретоковой дефектограммы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ порождены случайной величиной X с нормальным законом распределения $\mathbb{N}(\mu, s^2)$. К данным примешивается импульсный шум с распределением $\mathbb{N}_2$.

Лемма 1. *Пусть* $X \sim \mathbb{N}(\mu, s^2)$, $Z \sim \mathbb{N}_2(m_1, m_2, \sigma^2, p)$, X *и* Z *независимы, тогда случайная величина* $H = X + Z$ *имеет распределение смеси гауссиан такое, что* $H \sim \mathbb{N}_2(m_1 + \mu, m_2 + \mu, \sigma^2 + s^2, p)$.

Доказательство. Характеристическая функция нормально распределённой случайной величины K, $K \sim \mathbb{N}(m, \sigma^2)$, имеет вид [25]

$$\varphi_K(t) = e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}. \tag{6}$$

Рассмотрим вид характеристической функции смеси двух гауссиан.

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{E}e^{itZ} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itl} f_Z(l) dl = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itl} \left(\frac{p}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(l-m_1)^2}{2\sigma^2}} + \frac{(1-p)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(l-m_2)^2}{2\sigma^2}} \right) dl =$$
$$= p \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itl} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(l-m_1)^2}{2\sigma^2}} dl + (1-p) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itl} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(l-m_2)^2}{2\sigma^2}} dl. \tag{7}$$

Каждый из интегралов в формуле (7) представляет собой характеристическую функцию нормального распределения. Заменим их по формуле (6). Получим

$$\varphi_Z(t) = p e^{itm_1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} + (1-p) e^{itm_2 - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}. \tag{8}$$

Итак, характеристическая функция смеси гауссиан имеет вид (8).

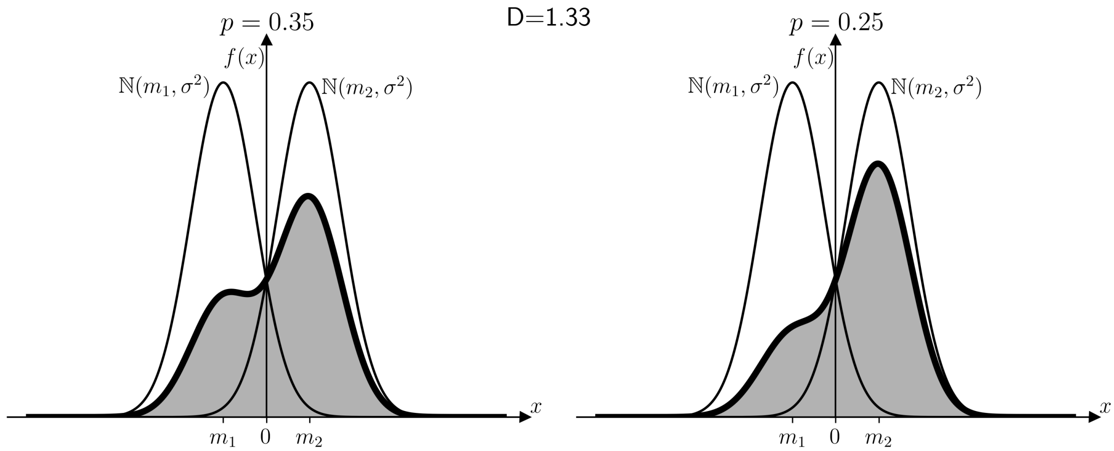


Fig. 8. The distribution density function of two Gaussian mixture when the condition (2) of the bimodality theorem is met (on the left) and when the condition is violated (on the right)

Рис. 8. Функция плотности распределения смеси двух гауссиан при выполнении условия (2) теоремы о бимодальности (слева) и нарушении этого условия (справа)

Известно, что если случайные величины $K_1, K_2, \ldots, K_n$ независимы, то характеристическая функция их совместной величины $(K_1, K_2, \ldots, K_n)$ может быть найдена как [26]

$$\varphi(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{K_i}(t).$$

Величины X и Z независимы. Это означает, что характеристическую функцию их суммы $X + Z$ можно вычислить следующим образом:

$$\varphi_H(t) = \varphi_{X+Z}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Z(t) = \left(pe^{itm_1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} + (1-p)e^{itm_2 - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}\right) \cdot e^{it\mu - \frac{s^2 t^2}{2}} =$$
$$= pe^{it(m_1+\mu) - \frac{(\sigma^2+s^2)t^2}{2}} + (1-p)e^{it(m_2+\mu) - \frac{(\sigma^2+s^2)t^2}{2}}. \quad (9)$$

Заметим, что формулы (8) и (9) отличаются только значениями параметров распределения $\mathbb{N}_2$. Таким образом, величина H имеет распределение $\mathbb{N}_2(m_1 + \mu, m_2 + \mu, \sigma^2 + s^2, p)$. □

Лемма 1 позволяет утверждать, что если данные имеют нормальное распределение и к ним аддитивным образом примешивается биполярный импульсный шум с распределением $\mathbb{N}_2$, то новое распределение будет также удовлетворять закону $\mathbb{N}_2$.

5. Правдоподобие импульсного шума

В связи с тем, что нормально распределённые данные сохраняют форму распределения произвольного импульсного шума $\mathbb{N}_2$, возникает идея обнаружения этого шума на основе оценки соответствия распределения данных распределению $\mathbb{N}_2$.

Наиболее распространённым методом оценки параметров смеси распределений является *EM*-алгоритм (Expectation Maximization Algorithm) [27]. Алгоритм является итеративным и решает задачу, максимизируя функцию правдоподобия данных. Хотя *EM*-алгоритм находит широкое применение, он обладает существенным недостатком, так как обеспечивает сходимость только к локальному минимуму функции правдоподобия. В связи с этим разработан ряд альтернативных методов оценки параметров смеси [15].

В *EM*-алгоритме и в его аналогах количество распределений в смеси является гиперпараметром. Это означает, что для определения количества гауссиан в смеси необходимо использовать какие-то другие методы. Распространённым подходом является оценка числа распределений в смеси с помощью информационного критерия. Модель смеси с наименьшим значением информационного критерия считается наиболее подходящей для имеющихся данных. Таким образом, с помощью информационного критерия можно оценить, наличие какого количества гауссиан в смеси наиболее оправдано. Популярными информационными критериями являются байесовский критерий (*BIC*), критерии Такеучи (*TIC*) и Акаике (*AIC*) [28].

Применение *EM*-алгоритма для обнаружения прямоугольных сигналов в вихретоковых дефектограммах осложнено требованием алгоритма для своей сходимости большого количества данных, тогда как на практике прямоугольные сигналы чаще всего обладают малой протяжённостью. Поэтому востребованными остаются эффективные методы обнаружения прямоугольных сигналов, работающие на относительно небольших выборках.

Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — выборка из распределения $\mathbb{N}_2(m_1, m_2, \sigma^2, p)$, порождённая случайной величиной X. Рассмотрим функцию правдоподобия

$$L(\overline{x}, m_1, m_2, \sigma, p) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-m_1)^2}{2\sigma^2}} + \frac{(1-p)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-m_2)^2}{2\sigma^2}} \right). \tag{10}$$

Разделим произведение (10) на 2 части: в первом произведении будут фигурировать числа $x_i \leqslant \mathbb{E}X$, то есть данные, не превосходящие математическое ожидание величины X, а во втором — все оставшиеся числа. Через K обозначим количество величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, не превосходящих $\mathbb{E}X$: $K = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{I}[X_i \leqslant \mathbb{E}X]$. Число k — реализация величины K на выборке $\overline{x}$.

$$\begin{aligned} L(\overline{x}, m_1, m_2, \sigma, p) = \prod_{x_i \leqslant \mathbb{E}X} \left(\frac{p}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-m_1)^2}{2\sigma^2}} + \frac{(1-p)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-m_2)^2}{2\sigma^2}} \right) \cdot \\ \cdot \prod_{x_i > \mathbb{E}X} \left(\frac{p}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-m_1)^2}{2\sigma^2}} + \frac{(1-p)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-m_2)^2}{2\sigma^2}} \right) = L_1 \cdot L_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Оценим L снизу с помощью формулы

$$L(\overline{x}, m_1, m_2, \sigma, p) \geqslant \prod_{x_i \leqslant \mathbb{E}X} \left(\frac{p}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-m_1)^2}{2\sigma^2}} \right) \cdot \prod_{x_i > \mathbb{E}X} \left(\frac{(1-p)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-m_2)^2}{2\sigma^2}} \right) = L'_1 \cdot L'_2. \tag{12}$$

Если математическое ожидание $\mathbb{E}X$ равно 0, то числа m_1 и m_2 соответствуют средним значениям отрицательных и положительных импульсов в сигнале. В общем случае, m_1 — это среднее значение импульсов, не превосходящих $\mathbb{E}X$, а m_2 — среднее значение импульсов, больших $\mathbb{E}X$: $m_1 \leqslant \mathbb{E}X < m_2$. Числа L'_1 и L'_2 в формуле (12) можно интерпретировать как правдоподобия «левого» и «правого» гауссиан в смеси. Та часть функции L, которой нижняя оценка пренебрегает, соответствует правдоподобию данных в «хвостах» гауссиан. В случае ярко выраженных биполярных импульсов погрешность оценки становится несущественной.

Рассмотрим логарифм правдоподобия нижней оценки L из формулы (12)

$$\ln(L'_1 \cdot L'_2) = k \ln\left(\frac{p}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{x_i \leqslant \mathbb{E}X} (x_i - m_1)^2 + (n-k) \ln\left(\frac{1-p}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{x_i > EX}^{n} (x_i - m_2)^2. \tag{13}$$

Рост логарифма правдоподобия в формуле (13) обеспечивается в первую очередь за счёт минимизации среднеквадратического отклонения данных, не превосходящих $\mathbb{E}X$, от среднего значения отрицательных импульсов m_1 и среднеквадратического отклонения данных, больших $\mathbb{E}X$, от среднего значения положительных импульсов m_2. Величина этих отклонений определяет правдоподобие двух компонент сигнала, наличие двух заметных импульсов. Чем меньше значение среднеквадратических отклонений, тем более распределение данных похоже на смесь двух гауссиан, а значит и на распределение импульсного шума. Характеристика, основанная на этих величинах, может позволить отличать биполярные импульсные шумы от прочих шумов, имеющих распределение $\mathbb{N}_2$. Подробнее эта идея будет рассмотрена в разделе 6.

Приравниваем формулы (13) к 0 можно получить оценки параметров распределения:

$$p' = \frac{K}{n}, \tag{14}$$

$$m_1' = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \mathbb{I}[X_i \leqslant \mathbb{E}X], \tag{15}$$

$$m_2' = \frac{1}{n-K}\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \mathbb{I}[X_i > \mathbb{E}X]. \tag{16}$$

6. SW-характеристика

Пусть X — непрерывная случайная величина с функцией плотности распределения $f_X(t), \mathbb{E}X$ — её математическое ожидание. Определим на основе X две случайные величины X_1 и X_2. Функция плотности $f_{X_1}(t)$ имеет тот же вид, что и функция $f_X(t)$ на промежутке $(-\infty; \mathbb{E}X]$ и равна 0 на прочей области. Число J_1 выступает в роли нормирующей константы для распределения.

$$f_{X_1}(t) = \begin{cases} \frac{f_X(t)}{J_1}, & t \in (-\infty; \mathbb{E}X], J_1 = \int_{-\infty}^{\mathbb{E}X} f_X(l)dl, \\ 0, & t \in (\mathbb{E}X; +\infty). \end{cases} \tag{17}$$

Аналогично функция плотности $f_{X_2}(t)$ величины X_2 имеет вид

$$f_{X_2}(t) = \begin{cases} \frac{f_X(t)}{J_2}, & t \in (\mathbb{E}X; +\infty), J_2 = \int_{\mathbb{E}X}^{+\infty} f_X(l)dl, \\ 0, & t \in (-\infty; \mathbb{E}X]. \end{cases} \tag{18}$$

Определим характеристику, которую в дальнейшем будем использовать для оценки соответствия распределения данных распределению прямоугольных сигналов. Эта характеристика ранее в литературе не упоминалась, в данной работе вводится впервые.

Определение 1. *Пусть функция $g(X)$ от случайной величины X имеет вид*

$$g(X) = \begin{cases} \left(\frac{X - \mathbb{E}X_1}{\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2}\right)^2, & X \in (-\infty; \mathbb{E}X], \\ \left(\frac{X - \mathbb{E}X_2}{\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2}\right)^2, & X \in (\mathbb{E}X; +\infty). \end{cases} \tag{19}$$

SW-характеристикой *(Square Waves Characteristic) случайной величины X назовём число*

$$SW(X) = \mathbb{E}_X(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{\mathbb{E}X} \left(\frac{t - \mathbb{E}X_1}{\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2}\right)^2 f_X(t)dt +$$
$$+ \int_{\mathbb{E}X}^{+\infty} \left(\frac{t - \mathbb{E}X_2}{\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2}\right)^2 f_X(t)dt = \frac{1}{(\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2)^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\mathbb{E}X} (t - \mathbb{E}X_1)^2 f_X(t)dt + \int\limits_{\mathbb{E}X}^{+\infty} (t - \mathbb{E}X_2)^2 f_X(t)dt\right). \tag{20}$$

SW-характеристика показывает, чему в среднем равна сумма квадратов отклонений случайной величины X на интервале $(-\infty; \mathbb{E}X)$ от среднего значения величины на этом интервале $\mathbb{E}X_1$

и квадратов отклонений этой величины на полуинтервале $[\mathbb{E}X;+\infty)$ от среднего значения на этом полуинтервале $\mathbb{E}X_2$. Это те самые квадратичные отклонения, которые фигурировали в (13). Вместо чисел m_1, m_2 выступают их оценки $\mathbb{E}X_1$, $\mathbb{E}X_2$ в соответствии с оценками правдоподобия (15), (16). Таким образом, минимизация SW-характеристики ведёт к максимизации правдоподобия смеси гауссиан $\mathbb{N}_2$.

Число $\frac{1}{(\mathbb{E}X_1-\mathbb{E}X_1)^2}$ призвано усилить значение «полярности» в SW-характеристике. Разность $|m_2-m_1|$ тесно связана с количеством мод в распределении. В соответствии с теоремой о бимодальности гомоскедастичная смесь двух гауссиан является бимодальной, только если квадрат разности $|m_2-m_1|$ по крайней мере в 4 раза превосходит дисперсию σ^2. Соответственно, при малых значениях $|m_2-m_1|$ бимодальность в смеси становится всё менее выраженной и даже пропадает вовсе. Функция плотности распределения биполярных импульсных шумов должна обладать выраженной бимодальностью, поэтому разность $|m_2-m_1|$ и оценка разности $|\mathbb{E}X_2-\mathbb{E}X_1|$ в таких сигналах должны быть достаточно большими величинами. Это в свою очередь означает, что SW-характеристика для них должна быть «небольшой». Формальная оценка величины SW-характеристики для биполярных импульсных сигналов будет проведена в следующих разделах статьи.

Отметим, что кусочно-заданная формулой (19) функция $g(X)$ в точке $\mathbb{E}X$ терпит разрыв 1-го рода. Но, так как рассматриваемые интегралы являются лебеговскими, а не римановскими, данное обстоятельство никак не вредит интегрируемости функции на промежутке $(\mathbb{E}X;+\infty)$ [26].

Лемма 2 позволяет оценивать SW-характеристику по выборке.

Лемма 2. *Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые и одинаково распределённые с X величины, $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, K — количество $X_i \leqslant \overline{X}$, то есть $K=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}[X_i\leqslant\overline{X}]$. Также определены оценки $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ как $\overline{X}_1=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\mathbb{I}[X_i\leqslant\overline{X}]$ и $\overline{X}_2=\frac{1}{n-K}\sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\mathbb{I}[X_i>\overline{X}]$. Тогда оценка $\widehat{SW}(X_1,X_2,\ldots,X_n)$*

$$\widehat{SW}(X_1,X_2,\ldots,X_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(X_i-\overline{X}_1)\cdot\mathbb{I}[X_i\leqslant\overline{X}]}{\overline{X}_1-\overline{X}_2}\right)^2+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(X_i-\overline{X}_2)\cdot\mathbb{I}[X_i>\overline{X}]}{\overline{X}_1-\overline{X}_2}\right)^2 \tag{21}$$

сходится по вероятности к $SW(X)$ при $n\to\infty$.

Доказательство. Лемма целиком основывается на следствии из закона больших чисел [24], которое гласит, что выборочное среднее сходится по вероятности к математическому ожиданию

$$\overline{X}\xrightarrow{P}\mathbb{E}X \text{ при } n\to\infty.$$

Обозначим через S_1 сумму

$$S_1=\sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\mathbb{I}[X_i\leqslant\overline{X}].$$

Необходимо показать, что

$$\overline{X}_1=\frac{S_1}{K}\xrightarrow{P}\mathbb{E}X_1=\mathbb{E}(X|X\leqslant\mathbb{E}X) \text{ при } n\to\infty.$$

Величина K равна количеству величин X_i, не превосходящих $\overline{X}$. Это означает, что K имеет биномиальное распределение $Binomial(n,q)$, где $q=\mathbb{P}(X\leqslant\mathbb{E}X)$. Рассмотрим число $\frac{K}{n}$. Сумму индикаторов, образующую K, разобьём на 2 части:

$$\frac{K}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}[X_i\leqslant\overline{X}]=\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}[X_i\leqslant\mathbb{E}X]}_{A_n}+\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\mathbb{I}[X_i\leqslant\overline{X}]-\mathbb{I}[X_i\leqslant\mathbb{E}X]\Big)}_{B_n}. \tag{22}$$

По закону больших чисел

$$A_n \xrightarrow{P} q = \mathbb{P}(X \leqslant \mathbb{E}X) \text{ при } n \to \infty.$$

Покажем, что B_n сходится по вероятности к 0. Рассмотрим $|B_n|$:

$$|B_n| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big| \mathbb{I}[X_i \leqslant \overline{X}] - \mathbb{I}[X_i \leqslant \mathbb{E}X] \Big|.$$

Заметим, что ненулевой вклад в $|B_n|$ дают индикаторы событий, когда X_i попадает между $\overline{X}$ и $\mathbb{E}X$, то есть $\mathbb{I}\Big[\min\{\overline{X}, \mathbb{E}X\} \leqslant X_i \leqslant \max\{\overline{X}, \mathbb{E}X\}\Big]$. Вычислим вероятность индикаторного события:

$$\mathbb{P}(\min\{\overline{X}, \mathbb{E}X\} \leqslant X_i \leqslant \max\{\overline{X}, \mathbb{E}X\}) = \int\limits_{\min\{\overline{X}, \mathbb{E}X\}}^{\max\{\overline{X}, \mathbb{E}X\}} f_X(t)dt = f_X(c) \cdot |\overline{X} - \mathbb{E}X|, c \in [\min\{\overline{X}, \mathbb{E}X\}; \max\{\overline{X}, \mathbb{E}X\}].$$

По закону больших чисел $|\overline{X} - \mathbb{E}X|$ сходится по вероятности к 0, поэтому

$$\mathbb{P}(\min\{\overline{X}, \mathbb{E}X\} \leqslant X_i \leqslant \max\{\overline{X}, \mathbb{E}X\}) \xrightarrow{P} 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Величину $n \cdot |B_n|$ можно интерпретировать как количество исходов, когда величина X_i оказалась заключена между $\overline{X}$ и $\mathbb{E}X$, то есть можно считать, что $n \cdot |B_n|$ распределена по биномиальному закону $Binomial(n, \mathbb{P}(\min\{\overline{X}, \mathbb{E}X\} \leqslant X_i \leqslant \max\{\overline{X}, \mathbb{E}X\}))$. Тогда по закону больших чисел

$$|B_n| \xrightarrow{P} \mathbb{P}(\min\{\overline{X}, \mathbb{E}X\} \leqslant X_i \leqslant \max\{\overline{X}, \mathbb{E}X\}) \xrightarrow{P} 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Итак, $|B_n|$ сходится по вероятности к 0. Тогда из (22) следует, что

$$\frac{K}{n} \xrightarrow{P} q = \mathbb{P}(X \leqslant \mathbb{E}X) \text{ при } n \to \infty. \tag{23}$$

Величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, поэтому величины $X_i \cdot \mathbb{I}[X_i \leqslant \overline{X}]$, являющиеся функциями от исходных величин X_i, будут также независимы [24]. По тому же закону больших чисел величина $\frac{S_1}{n}$ будет сходиться по вероятности к математическому ожиданию величины $X \cdot \mathbb{I}[X \leqslant \mathbb{E}X]$:

$$\frac{S_1}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X \cdot \mathbb{I}[X \leqslant \mathbb{E}X]) \text{ при } n \to \infty. \tag{24}$$

Величина $X \cdot \mathbb{I}[X \leqslant \mathbb{E}X]$ равна $X|X \leqslant \mathbb{E}X$ с вероятностью $\mathbb{P}(X \leqslant \mathbb{E}X) = q$ и равна 0 с вероятностью $1 - q$. Поэтому ожидание $\mathbb{E}(X \cdot \mathbb{I}[X \leqslant \mathbb{E}X])$ можно переписать как

$$\mathbb{E}(X \cdot \mathbb{I}[X \leqslant \mathbb{E}X]) = \mathbb{E}(q \cdot X|X \leqslant \mathbb{E}X) = q \cdot \mathbb{E}(X|X \leqslant \mathbb{E}X) = q \cdot \mathbb{E}X_1.$$

Из (23) и (24) следует, что $\overline{X}_1$ будет сходиться по вероятности к $\mathbb{E}X_1$ при $K \neq 0$:

$$\overline{X}_1 = \frac{S_1}{K} = \frac{\frac{S_1}{n}}{\frac{K}{n}} \xrightarrow{P} \frac{q \cdot \mathbb{E}X_1}{q} = \mathbb{E}X_1 \text{ при } n \to \infty.$$

Аналогично можно показать, что $\overline{X}_2$ сходится по вероятности к $\mathbb{E}X_2$.

Функцию $g(X)$ из (19) можно представить через выборочные оценки в виде

$$g'(X) = \left(\frac{(X - \overline{X}_1) \cdot \mathbb{I}[X \leqslant \overline{X}] + (X - \overline{X}_2) \cdot \mathbb{I}[X > \overline{X}]}{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} \right)^2.$$

Тогда по закону больших чисел

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g'(X_i) \xrightarrow{P} \mathbb{E}_X(g(X)) = SW(X) \text{ при } n \to \infty.$$

□

Формулу для SW-характеристики можно переписать через моменты величин X, X_1 и X_2.

Теорема 1. *Для случайной величины X её SW-характеристика может быть найдена по формуле:*

$$SW(X) = \frac{\mathbb{E}X^2 - J_1 \mathbb{E}^2 X_1 - J_2 \mathbb{E}^2 X_2}{(\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2)^2}.$$

Доказательство. По определению (20) SW-характеристики:

$$SW(X) = \frac{1}{(\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2)^2} \left(\int_{-\infty}^{\mathbb{E}X} (t - \mathbb{E}X_1)^2 f_X(t) dt + \int_{\mathbb{E}X}^{+\infty} (t - \mathbb{E}X_2)^2 f_X(t) dt \right) = \frac{1}{(\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2)^2} (G_1 + G_2).$$

Раскроем квадрат разности в G_1:

$$G_1 = \int\limits_{-\infty}^{\mathbb{E}X} (t - \mathbb{E}X_1)^2 f_X(t) dt = \int\limits_{-\infty}^{\mathbb{E}X} (t^2 - 2t\mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}^2 X_1) f_X(t) dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\mathbb{E}X} t^2 f_X(t) dt - 2\mathbb{E}X_1 \int\limits_{-\infty}^{\mathbb{E}X} t f_X(t) dt + \mathbb{E}^2 X_1 \int\limits_{-\infty}^{\mathbb{E}X} f_X(t) dt.$$

Интеграл определён на промежутке $(-\infty; \mathbb{E}X]$. Поэтому $f_X(t)$ можно заменить на $J_1 f_{X_1}(t)$ в соответствии с (17):

$$G_1 = \int\limits_{-\infty}^{\mathbb{E}X} t^2 f_X(t) dt - 2J_1 \mathbb{E}X_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t f_{X_1}(t) dt + J_1 \mathbb{E}^2 X_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) dt = \int\limits_{-\infty}^{\mathbb{E}X} t^2 f_X(t) dt - J_1 \mathbb{E}^2 X_1.$$

Выполним аналогичные преобразования в G_2:

$$G_2 = \int\limits_{\mathbb{E}X}^{+\infty} (t - \mathbb{E}X_2)^2 f_X(t) dt = \int\limits_{\mathbb{E}X}^{+\infty} (t^2 - 2t\mathbb{E}X_2 + \mathbb{E}^2 X_2) f_X(t) dt = \int\limits_{\mathbb{E}X}^{+\infty} t^2 f_X(t) dt - J_2 \mathbb{E}^2 X_2.$$

Подставим G_1 и G_2 в формулу SW-характеристики и в результате получим:

$$SW(X) = \frac{1}{(\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2)^2} (G_1 + G_2) = \frac{1}{(\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2)^2} \left(\int\limits_{-\infty}^{\mathbb{E}X} t^2 f_X(t) dt + \int\limits_{\mathbb{E}X}^{+\infty} t^2 f_X(t) dt - J_1 \mathbb{E}^2 X_1 - J_2 \mathbb{E}^2 X_2 \right) =$$

$$= \frac{1}{(\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2)^2} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t) dt - J_1 \mathbb{E}^2 X_1 - J_2 \mathbb{E}^2 X_2 \right) = \frac{\mathbb{E}X^2 - J_1 \mathbb{E}^2 X_1 - J_2 \mathbb{E}^2 X_2}{(\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2)^2}.$$

□

Вычислим второй момент гомоскедастичной смеси двух гауссиан $\mathbb{N}_2$. Для этого воспользуемся формулой (1):

$$\mathbb{E}X^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 \left(\frac{p}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m_1)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1-p}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m_2)^2}{2\sigma^2}}\right)dt = p\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m_1)^2}{2\sigma^2}}dt +$$
$$+ (1-p)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m_2)^2}{2\sigma^2}}dt = p(\sigma^2 + m_1^2) + (1-p)(\sigma^2 + m_2^2) = \sigma^2 + pm_1^2 + (1-p)m_2^2. \quad (25)$$

Если использовать оценки параметров распределения (14), (15), (16), то можно заметить сходство между вторым моментом распределения $\mathbb{N}_2$ и величиной $J_1\mathbb{E}^2X_1 + J_2\mathbb{E}^2X_2$ в теореме 1. Можно сказать, что SW-характеристика некоторым образом оценивает величину $\frac{\sigma^2}{(m_1-m_2)^2}$, что является обратным значением для числа $\frac{D^2}{4}$ из теоремы о бимодальности. Это ещё раз подчёркивает связь SW-характеристики с бимодальностью распределения. Чем $SW(X)$ меньше, тем более выраженную бимодальность имеет распределение величины X.

Лемма 3. *SW-характеристика неотрицательна для любой случайной величины X и равна 0 тогда и только тогда, когда функцию плотности распределения $f_X(x)$ можно считать смесью двух δ-функций*

$$f_X(x) = p\delta(x - \mathbb{E}X_1) + (1-p)\delta(x - \mathbb{E}X_2), \text{ где } \delta(x) = 0 \text{ для } \forall x \neq 0 \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1.$$

Доказательство. Функция $g(X)$, задаваемая формулой (19), неотрицательна на всей прямой $(-\infty; +\infty)$. Следовательно, SW-характеристика, равная по определению $\mathbb{E}_X(g(X))$, также неотрицательна.

Пусть $SW(X) = 0$. По формуле (20) это означает, что

$$\frac{1}{(\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2)^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\mathbb{E}X} (t - \mathbb{E}X_1)^2 f_X(t)dt + \int\limits_{\mathbb{E}X}^{+\infty} (t - \mathbb{E}X_2)^2 f_X(t)dt\right) = 0; \quad \Leftrightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{\mathbb{E}X} (t - \mathbb{E}X_1)^2 f_X(t)dt +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{E}X}^{+\infty} (t - \mathbb{E}X_2)^2 f_X(t)dt = 0; \quad \Leftrightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{\mathbb{E}X} (t - \mathbb{E}X_1)^2 f_X(t)dt = \int\limits_{\mathbb{E}X}^{+\infty} (t - \mathbb{E}X_2)^2 f_X(t)dt = 0. \quad (26)$$

Теперь, если в выражении (26) от величины X перейти к X_1 и X_2 в соответствии с формулами (17) и (18), то получим

$$J_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}X_1)^2 f_{X_1}(t)dt = J_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}X_2)^2 f_{X_2}(t)dt = 0; \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{V}X_1 = \mathbb{V}X_2 = 0.$$

Итак, в случае нулевой характеристики $SW(X)$ дисперсии величин X_1 и X_2 равны 0. Отсюда следует [24], что величины X_1 и X_2 являются константами и равны своим ожиданиям $\mathbb{E}X_1$ и $\mathbb{E}X_2$. Саму величину X тогда можно записать в виде:

$$X = \begin{cases} \mathbb{E}X_1, & X \leqslant \mathbb{E}X, \\ \mathbb{E}X_2, & X > \mathbb{E}X. \end{cases}$$

Функцию плотности распределения величины X можно представить через смесь δ-функций с параметром p, равным $\mathbb{P}(X \leqslant \mathbb{E}X)$:

$$f_X(x) = p\delta(x - \mathbb{E}X_1) + (1-p)\delta(x - \mathbb{E}X_2).$$

□

Лемма 3 показывает, как SW-характеристика связана с импульсными сигналами. Она равна 0 только для величин, имеющих распределение такое же, как у идеального биполярного импульсного сигнала (рис. 5). Кроме того, SW-характеристика неотрицательна. Если считать, что при возрастании SW-характеристика соответствует сигналам всё менее и менее похожим на биполярный импульсный шум, то SW-характеристику можно использовать для обнаружения таких шумов. Детектировать биполярные импульсные шумы в данных можно было бы по малому значению SW-характеристики. Насколько эта идея оправдана, будет обсуждено в последующих разделах статьи. Но эту же идею можно взять за основу для критерия обнаружения прямоугольных сигналов, являющихся частным случаем биполярных импульсных шумов. Для этого необходимо определить, как считать SW-характеристику для прямоугольного шума. Следующая теорема даёт ответ на данный вопрос.

Теорема 2. *Пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ — независимые случайные величины с распределением $Y_t = s(t) + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_t \sim \mathbb{N}(0; \sigma^2)$, Z — величина с законом распределения $\mathbb{N}_2(m_1, m_2, \sigma^2, p)$. Тогда $\widehat{SW}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ сходится по вероятности к $SW(Z)$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Формула (21) оценки SW-характеристики представляет собой сумму случайных величин. Это означает, что порядок величин $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ при суммировании становится не важен. Данный факт позволяет при вычислении $\widehat{SW}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ рассматривать $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ как набор независимых величин, одинаково распределённых с Z. Покажем, как происходит такой переход при вычислении $\overline{Y}$.

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot \mathbb{I}[s(i) = m_1] + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot \mathbb{I}[s(i) = m_2]. \tag{27}$$

Рассмотрим величину $Y_i \cdot \mathbb{I}[s(i) = m_1]$. Она равна Y_i с вероятностью $\mathbb{P}(s(i) = m_1)$ и равна 0 с вероятностью $1 - \mathbb{P}(s(i) = m_1)$. При суммировании порядок величин становится не важен, поэтому вероятность $\mathbb{P}(s(i) = m_1)$ можно вычислить как отношение количества точек i, в которых $s(i)$ равна m_1, к общему числу точек n. Если количество точек n кратно периоду T, то трудностей при вычислении вероятности $\mathbb{P}(s(i) = m_1)$ не возникает. В случае n, не кратного T, в последнем периоде точки будут иначе распределены, чем во всех предыдущих, но в силу того, что $n \to \infty$, это обстоятельство нивелируется и вероятность всё равно можно считать как в случае n, кратного периоду. Количество точек, в которых $s(i) = m_1$, равно числу периодов, умноженному на количество точек в периоде и на число p точек в периоде, где $s(i) = m_1$. Тогда вероятность $\mathbb{P}(s(i) = m_1)$ может быть найдена как

$$\mathbb{P}(s(i) = m_1) = \frac{\frac{n}{T} \cdot T \cdot p}{n} = p.$$

Величины $Y_i \cdot \mathbb{I}[s(i) = m_1]$ и $Y_i \cdot \mathbb{I}[s(i) = m_2]$ в (27) можно заменить на величины Z_i:

$$Z_i \sim \begin{cases} \mathbb{N}(m_1; \sigma^2), & \text{с вероятностью } p, \\ \mathbb{N}(m_2; \sigma^2), & \text{с вероятностью } 1 - p. \end{cases}$$

По закону больших чисел

$$\overline{Y} = \overline{Z} \xrightarrow{P} \mathbb{E}Z \text{ при } n \to \infty.$$

Аналогичное преобразование можно выполнить во всех суммах, фигурирующих в (21). $\square$

Теорема 2 связывает гомоскедастичную смесь двух гауссиан с прямоугольным шумом с помощью SW-характеристики и все проведённые в данном разделе рассуждения позволяет перенести на прямоугольные сигналы. При игнорировании порядка отчётов $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ сигнал перестаёт обязательно содержать продолжительные фрагменты, но такое допущение позволяет рассматривать прямоугольный сигнал как частный случай биполярного импульсного сигнала. SW-характеристика для прямоугольного шума будет оценивать «выраженность» прямоугольной структуры в виде двух продолжительных импульсов, а нулевое значение характеристики будет соответствовать идеальному прямоугольному сигналу.

При $SW(X) = 0$ можно говорить об идеальном биполярном импульсном сигнале и, в частности, идеальном прямоугольном сигнале. Попробуем найти критические значения SW-характеристики, которые сигнализируют об окончательной утрате сигналом биполярности, а значит и прямоугольности. Для этого исследуем, чему равна SW-характеристика в нормальном распределении и в распределении смеси гауссиан.

7. SW-характеристика нормального распределения

В данном разделе будем считать, что величина X распределена нормально по закону $\mathbb{N}(0;\sigma^2)$.

Теорема 3. *Пусть $X \sim \mathbb{N}(0;\sigma^2)$. SW-характеристика для величины X равна*

$$SW(X) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

Доказательство. Математическое ожидание $\mathbb{E}X$ равно 0. Вычислим $\mathbb{E}X_1$ и $\mathbb{E}X_2$, используя формулы (17) и (18).

Если $X \sim \mathbb{N}(0,1)$, то функция распределения $F_X(x)$ случайной величины X может быть вычислена как $F_X(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \Phi(x)$, где функция $\Phi(X)$ называется *функцией Лапласа* [24]. Функция Лапласа обладает рядом полезных свойств. Для нахождения констант J_1 и J_2 будет полезно следующее свойство функции Лапласа:

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = -\lim_{x\to-\infty} \Phi(x) = \frac{1}{2}.$$

Пользуясь этим свойством, найдём J_1:

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\mathbb{E}X} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \left| \begin{array}{l} l = \frac{t}{\sigma} \\ dl = \frac{1}{\sigma} dt \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{l^2}{2}} dl = -\int_{0}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{l^2}{2}} dl = -\Phi(-\infty) = \frac{1}{2}.$$

Аналогично константа J_2 получается также равной $1/2$.

Числа J_1 и J_2 равны, следовательно, функции $f_{X_1}(t)$ и $f_{X_2}(t)$ будут иметь один и тот же вид

$$f_{X_1}(t) = \begin{cases} \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}, & t \in (-\infty; 0], \\ 0, & t \in (0; +\infty). \end{cases} \quad \text{и} \quad f_{X_2}(t) = \begin{cases} \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}, & t \in (0; +\infty), \\ 0, & t \in (-\infty; 0]. \end{cases}$$

Найдём числа $\mathbb{E}X_1$ и $\mathbb{E}X_2$.

$$\mathbb{E}X_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{X_1}(t)dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{2t}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \left| \begin{array}{l} l = t^2 \\ dl = 2tdt \end{array} \right| = \int_{+\infty}^{0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{l}{2\sigma^2}} dl =$$

$$= \left| \begin{array}{l} s = \frac{l}{2\sigma^2} \\ ds = \frac{1}{2\sigma^2} dl \end{array} \right| = \int_{+\infty}^{0} \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-s} ds = -\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-s} \Big|_{+\infty}^{0} = -\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(e^0 - e^{-\infty}\right) = -\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}.$$

Вычисление $\mathbb{E}X_2$ производится аналогично $\mathbb{E}X_1$

$$\mathbb{E}X_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{X_2}(t)dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{2t}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \left| \begin{array}{l} l = t^2 \\ dl = 2tdt \end{array} \right| = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{l}{2\sigma^2}} dl = -\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-s} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}.$$

Посчитаем SW-характеристику для X по определению 1:

$$SW(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_X(t)dt = \frac{1}{(\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2)^2} \left(\int_{-\infty}^{0} (t - \mathbb{E}X_1)^2 f_X(t)dt + \int_{0}^{+\infty} (t - \mathbb{E}X_2)^2 f_X(t)dt \right) =$$

$$= \frac{1}{(\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2)^2} \left(J_1 \int_{-\infty}^{0} \left(t^2 - 2t\mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}^2X_1\right) f_{X_1}(t)dt + J_2 \int_{0}^{+\infty} \left(t^2 - 2t\mathbb{E}X_2 + \mathbb{E}^2X_2\right) f_{X_2}(t)dt \right) =$$

$$= \frac{1}{2(\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2)^2} \left(\int_{-\infty}^{0} t^2 f_{X_1}(t)dt - 2\mathbb{E}X_1 \cdot \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}^2X_1 + \int_{0}^{+\infty} t^2 f_{X_2}(t)dt - 2\mathbb{E}X_2 \cdot \mathbb{E}X_2 + \mathbb{E}^2X_2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2(\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2)^2} \left(\int_{-\infty}^{0} t^2 f_{X_1}(t)dt - \mathbb{E}^2X_1 + \int_{0}^{+\infty} t^2 f_{X_2}(t)dt - \mathbb{E}^2X_2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2(\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2)^2} \left(2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)dt - \mathbb{E}^2X_1 - \mathbb{E}^2X_2 \right) = \frac{2\sigma^2 - \frac{4\sigma^2}{\pi}}{\frac{16\sigma^2}{\pi}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

□

SW-характеристика нормального распределения равна числу $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$. Этот результат позволяет с помощью SW-характеристики сравнивать, насколько распределение смеси двух гауссиан соответствует распределению одного единственного гауссиана. Фактически это и есть то самое «критическое значение», соответствующее моменту, когда два выраженных биполярных импульса окончательно слились в один импульс.

8. SW-характеристика распределения $\mathbb{N}_2$ и SW-критерий обнаружения прямоугольных сигналов

Теперь вычислим SW-характеристику для смеси гауссиан $\mathbb{N}_2(m_1, m_2, \sigma^2, p)$.

Теорема 4. *Пусть $X \sim \mathbb{N}_2(m_1, m_2, \sigma^2, p)$, $m_2 \geqslant m_1$, $r = \frac{m_2 - m_1}{\sigma}$, тогда SW-характеристика для величины X равна*

$$SW(X) = J_2^2 \frac{1 + r^2(1-p)p}{(\Theta_1 - r(1-p))^2} - J_1 J_2, \text{ где} \tag{28}$$

$$\Theta_1 = \frac{1}{J_1} \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(p e^{-\frac{(p-1)^2 r^2}{2}} + (1-p) e^{-\frac{p^2 r^2}{2}} \right) + rp \int_{-\infty}^{-(p-1)r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{l^2}{2}} dl \right),$$

$$J_1 = p \int_{-\infty}^{-(p-1)r} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{l^2}{2}} dl + (1-p) \int_{-\infty}^{-pr} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{l^2}{2}} dl, \quad J_2 = 1 - J_1.$$

Доказательство. См. приложение A. □

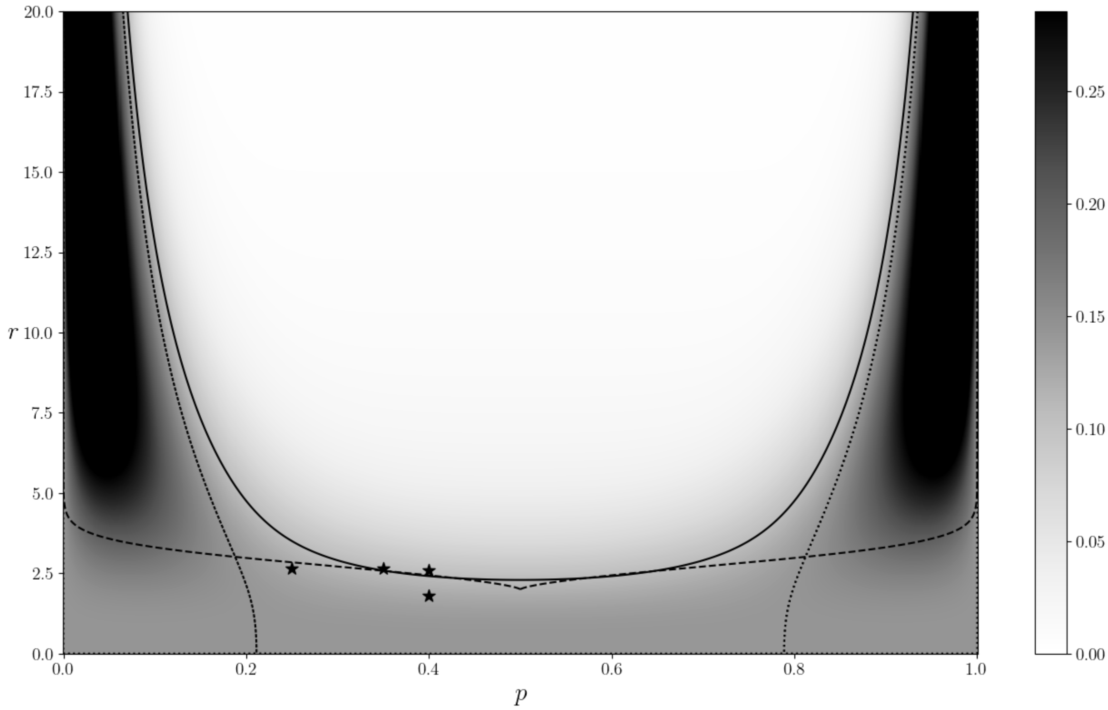


Fig. 9. The heat map of the *SW*″=characteristic for the $\mathbb{N}_2$ distribution. The curve specified by the condition (2) of bimodality theorem is shown as a dash, a dotted line corresponds to the number 0,1427, a solid line — to the number 0,1077.

Рис. 9. Тепловая карта *SW*-характеристики распределения $\mathbb{N}_2$. Пунктиром обозначена кривая, задаваемая условием (2) из теоремы о бимодальности, линия из точек соответствует числу 0,1427, сплошная линия — числу 0,1077.

Из теоремы 4 следует, что для распределения $\mathbb{N}_2$ формулу SW-характеристики можно разрешить относительно всего 2 переменных r и p. Это позволяет исследовать SW-характеристику для смеси двух гауссиан графически.

Переменная r — это практически тот же параметр, что фигурировал в теореме о бимодальности, но умноженный на 2, то есть $r = 2D$. Таким образом, SW-характеристика смеси двух гауссиан зависит от параметров, определяющих бимодальность распределения. Изучим поведение SW-характеристики для распределения $\mathbb{N}_2$ в зависимости от значений r и p.

Рисунок 9 представляет собой тепловую карту SW-характеристики для распределения $\mathbb{N}_2$. По оси Ox отложены значения параметра $p \in [0; 1]$, по оси Oy — значения параметра $r \geqslant 0$. Белому цвету соответствуют значения SW-характеристики близкие к 0, чёрному — значительно превышающие 0.

В соответствии с теоремой 3 SW-характеристика для нормального распределения равна $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \approx$ 0,1427. Нормальное распределение унимодально. Если SW-характеристика смеси гауссиан $\mathbb{N}_2$ близка к данному числу, то можно считать, что распределение уже однозначно перестало быть бимодальным. Значения SW-характеристики, равные 0,1427, соединены на рис. 9 линией из точек. Тривиальные расположения этой линии при $p = 0$, $p = 1$ и $r = 0$ соответствует случаю идеального нормального распределения, когда в смеси присутствует только один гауссиан. Больший интерес представляют линии из точек, отделяющие белую область от областей с насыщенным чёрным цветом. Такие случаи смеси двух гауссиан теорема о бимодальности считает бимодальными (расположены выше пунктирной линии). При этом эти виды распределений никак нельзя назвать соответствующими распределению прямоугольных сигналов. В таких случаях распределение выглядит как один единственный гауссиан с левым или правым «тяжёлым хвостом» (см., например, мгновенный импульсный шум на рис. 15). Таким образом, значение 0,1427 SW-характеристики позволяет обнаруживать не только случай одного гауссиана в смеси, но и более сложный случай, когда гауссиан всё ещё один, но имеет «тяжёлый хвост», артефакт второго гауссиана. Поведение SW-характеристики распределения $\mathbb{N}_2$ в «чёрных областях» заслуживает отдельного исследования. В данной работе ограничимся уже сделанными замечаниями.

Пунктирной линией на рис. 9 отображена кривая, разграничивающая бимодальный и унимодальный случай в распределении. Она задана с помощью уравнения из свойства (2) теоремы о бимодальности. Звёздочками на рис. 9 отмечены случаи, соответствующие рисункам 7 и 8 ($D = \frac{r}{2}$). Некоторые из этих случаев унимодальны, хотя и не имеют форму идеального гауссиана, то есть SW-характеристика нормального распределения 0,1427 их не отлавливает. Но если взять значение SW-характеристики как некоторое $\omega < 0{,}1427$, такое, чтобы все значения, меньшие ω лежали на рис. 9 выше пунктирной линии, то случаи, когда SW-характеристика попадает в промежуток $(0; \omega)$, будут считаться бимодальными. При этом в чёрные области такие случаи попадать не будут. На рис. 9 сплошной линией отображены значения SW-характеристики, равные 0,1077. Эта линия соприкасается снизу с пунктирной линией. Таким образом, по одну сторону от этой линии располагаются только бимодальные случаи смеси двух гауссиан. На рис. 9 также видно, что сплошная линия разделяет значения SW-характеристики, меньшие 0,1077, от значений, больших 0,1077. Это значение характеристики можно воспринимать как критическое, при достижении которого говорить о наличии прямоугольных сигналов в данных уже нельзя.

Итак, выбрав некоторое критическое значение $\omega \in (0; 0{,}1427)$, мы можем сравнить с этим значением SW-характеристику и, если она окажется меньше ω, делать вывод, что в данных могут присутствовать прямоугольные сигналы. С помощью такого простого правила определяется **SW-критерий для обнаружения прямоугольных сигналов**. Критическое значение ω для SW-характеристики подбирается эмпирически в зависимости от анализируемых данных.

Напомним, что в соответствии с леммой 1 распределение биполярных импульсов будет сохраняться при их суммировании с нормально распределённой величиной. Это позволяет применять SW-критерий в любых данных, о нормальном распределении которых можно говорить достаточно уверенно. В частности, большая часть данных вихретоковых дефектограмм представлена рельсовым нормально распределённым шумом, поэтому применение SW-критерия более чем оправдано. Распределение сигналов конструктивных элементов в дефектограммах не является нормальным, но ввиду того, что они возникают достаточно редко (менее 10 % сигналов [2]) и часто имеют малую протяжённость, форма нормального распределения искажается незначительно.

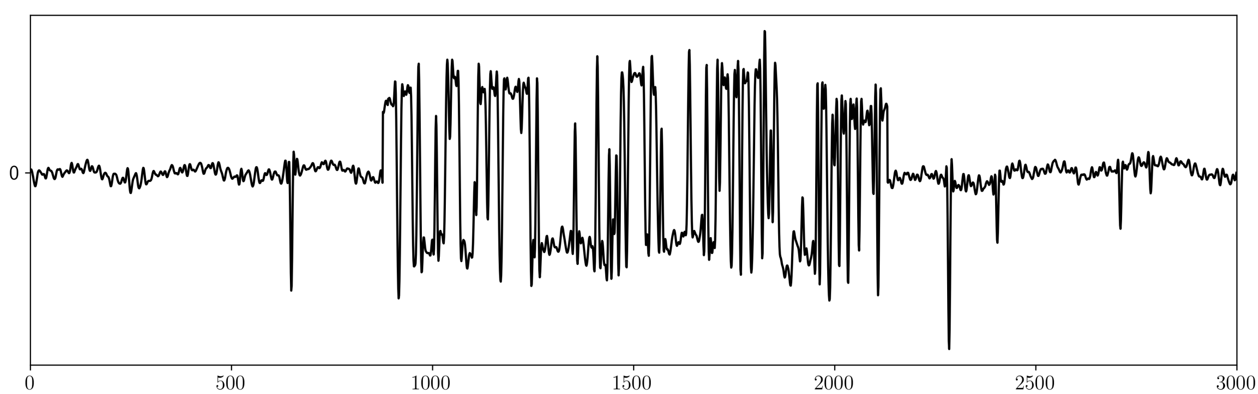


Fig. 10. Local additions of square wave signals on the eddy current defectogram

Рис. 10. Локальные примеси прямоугольных сигналов на вихретоковой дефектограмме

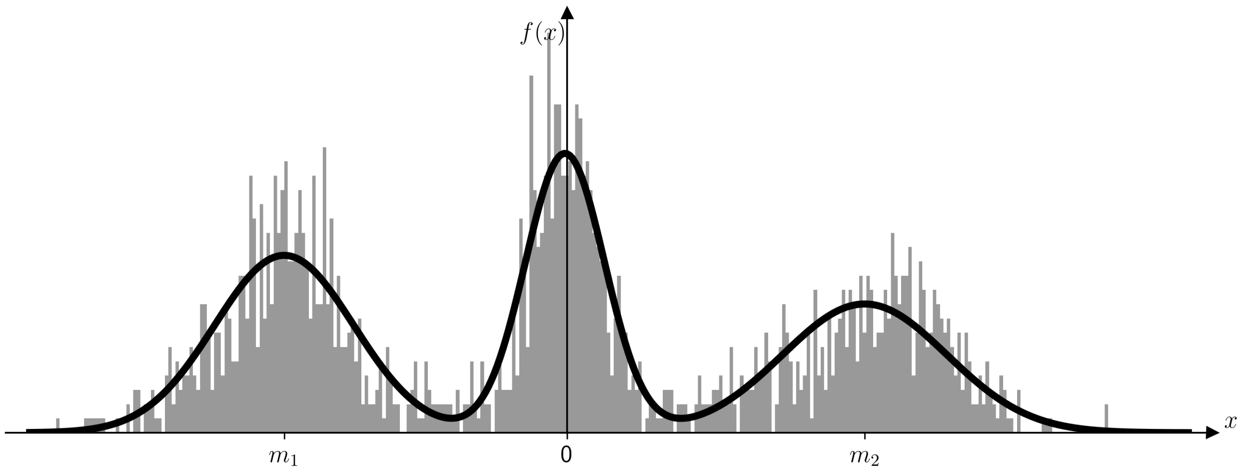


Fig. 11. The distribution density function of local additions of square wave signals on the eddy current defectogram

Рис. 11. Функция плотности распределения локальной примеси прямоугольных сигналов на вихретоковой дефектограмме

Table 1. The comparative table of statistical characteristics used for detection of square wave signals in eddy current defectogram data

Таблица 1. Сравнительная таблица статистических характеристик, используемых для детекции прямоугольных сигналов в данных вихретоковых дефектограмм

Figure	SW	BIC for 1 Gaussian	BIC for 2 Gaussians	Optimal amount	Optimal BIC	MDE
12	0,0220	2,8425	1,5863	9	0,8113	3.7840
13	0,0201	2,8413	1,4877	8	1,1393	3.6726
14	0,0239	2,7968	1,7124	7	1,4284	3.7242
15	0,2425	2,8389	1,9133	9	1,2228	3.6111
16	0,1488	2,8392	2,8467	1	2,8392	5.4550

Протяжённые сигналы, распределение которых не является нормальным, вносят существенные изменения в распределение, и гомоскедастичная смесь двух гауссиан перестаёт сохраняться. Этим определяется одно из ограничений SW-критерия, основанного на свойствах SW-характеристики распределения $\mathbb{N}_2$.

Ещё одним важным ограничением на применение SW-критерия является *локальность* аддитивности прямоугольных сигналов. Если прямоугольные сигналы возникают локально, только в некоторой части данных, распределённых нормально, то распределение всей совокупности данных с локальными примесями прямоугольных сигналов будет представлять собой смесь трёх, а не двух гауссиан. Новый гауссиан будет возникать как артефакт исходного нормального распределения данных (см. рис. 10 и 11). Локальность SW-критерия может быть преодолена использованием скользящего окна. Конкретные реализации оконного SW-критерия заслуживают отдельного исследования. Здесь они не обсуждаются.

9. Примеры применения SW-критерия

В завершение будут рассмотрены несколько примеров поиска прямоугольных сигналов в реальных данных вихретоковых дефектограмм. Все рассматриваемые сигналы нормированы по выборочной дисперсии.

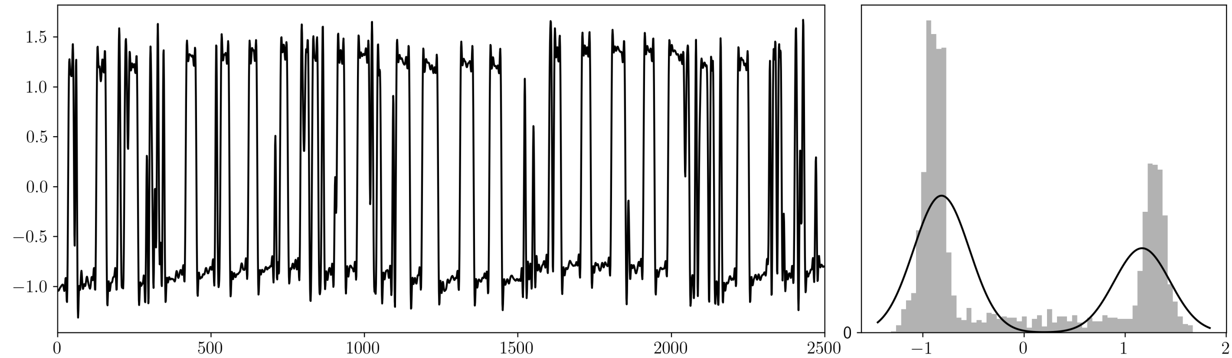


Fig. 12. The common square wave signal on the eddy current defectogram

Рис. 12. Стандартный прямоугольный сигнал на вихретоковой дефектограмме

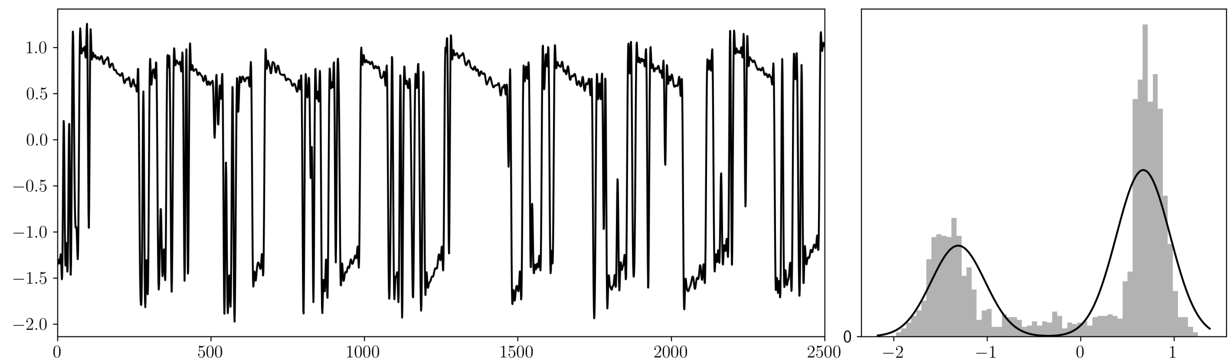


Fig. 13. The inclined square wave signal on the eddy current defectogram

Рис. 13. Наклонный прямоугольный сигнал на вихретоковой дефектограмме

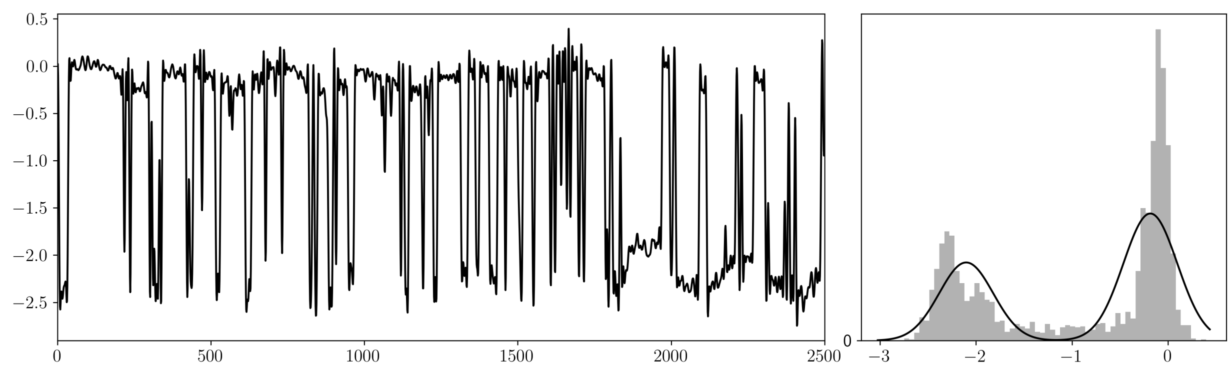
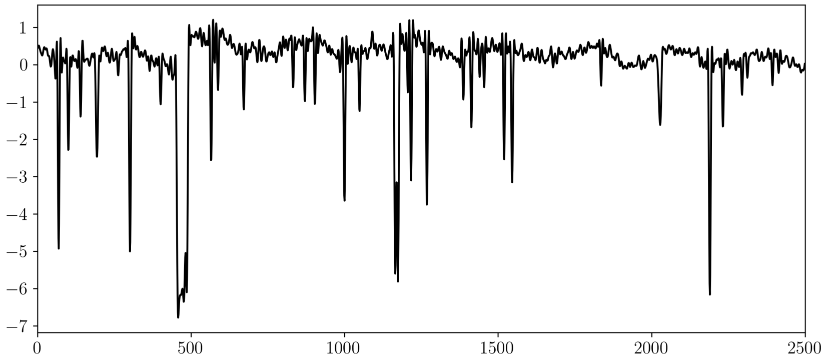


Fig. 14. The square wave signal with variable pulsation on the eddy current defectogram

Рис. 14. Прямоугольный сигнал с переменной пульсацией на вихретоковой дефектограмме

В таблице 1 приведены результаты эксперимента для 5 видов данных вихретоковых дефектограмм. Помимо вычисления *SW*-характеристики к данным применяется *EM*-алгоритм и считается сумма многомасштабных дисперсных энтропий (MDE) по трём масштабам, которая использовалась для обнаружения прямоугольного шума в [19]. В таблице приведены значения байесовского информационного критерия (*BIC*) для моделей на основе *EM*-алгоритма с разным количеством гауссиан. Кроме одного и двух гауссиан приводится модель с количеством гауссиан, в которой значение *BIC* минимально (оптимальная модель).



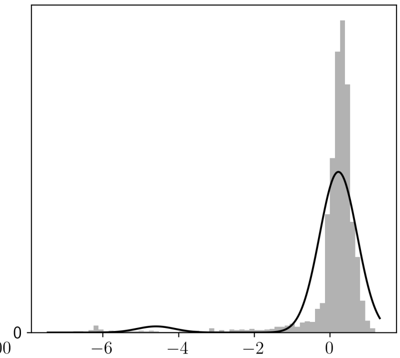
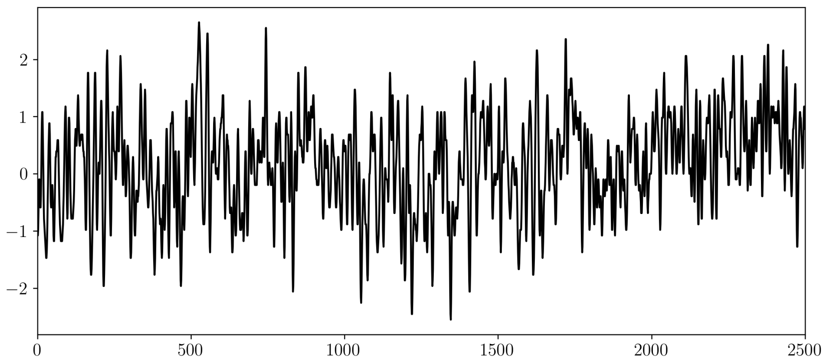


Fig. 15. The impulse instant noise on the eddy current defectogram

Рис. 15. Импульсный мгновенный шум на вихретоковой дефектограмме



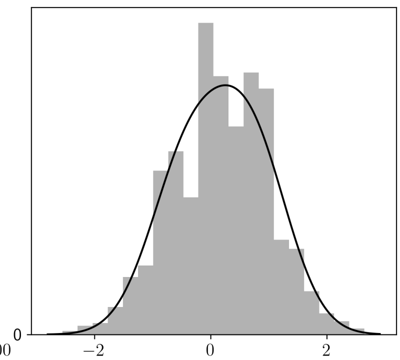


Fig. 16. The rail noise on the eddy current defectogram

Рис. 16. Рельсовый шум на вихретоковой дефектограмме

В 3 из 5 рассмотренных случаев, где действительно присутствуют прямоугольные сигналы, SW-характеристика принимает значения в 7,5 раз меньшие, чем число 0,1427, которое, как было показано в разделе 7, характерно для одного гауссиана. Это можно расценивать как свидетельство о том, что в данных присутствуют прямоугольные сигналы. Значение информационного критерия во всех примерах с прямоугольными сигналами в модели для двух гауссиан меньше, чем в модели с одним гауссианом. При этом для случая импульсного мгновенного шума (рис. 15) *BIC* для одного гауссиана больше, чем для двух, тогда как в распределении имеется только один ярко выраженный гауссиан. Значение *MDE* в зашумлённых данных меньше, чем в чистых, но наименьшим значением обладают не прямоугольные, а импульсные мгновенные шумы. Таким образом, утверждение, выдвинутое в [19], о том, что прямоугольный шум обладает наименьшим значением *MDE*, не подтверждается.

В примерах, где прямоугольные сигналы отсутствуют, SW-характеристика получилась большой: $0{,}1488 > 0{,}1427$ — для рельсового шума, и 0,2425 — для импульсного мгновенного шума.

Заключение

Прямоугольные сигналы являются примером биполярных импульсных сигналов, которые, в свою очередь, обладают специфическим видом вероятностного распределения. Этот вид распределения хорошо описывается гомоскедастичной смесью двух гауссиан. Ввиду того, что прямоугольный сигнал имеет выраженную полярность импульсации, смесь гауссиан должна быть бимодальной. Таким образом, задачу обнаружения прямоугольных сигналов в данных можно рассматривать как составную задачу проверки соответствия распределения данных гомоскедастичной бимодальной смеси двух гауссиан. Лемма 1 показывает, что при условии нормальности данных примешанные к ним биполярные импульсные сигналы будут сохранять свою специфическую форму распределения.

Естественным методом проверки соответствия распределения данных заданному распределению является оценка функции правдоподобия. Таковая оценка была произведена в разделе 5 и в дальнейшем использована для определения SW-характеристики. SW-характеристика вводится как показатель «прямоугольности» данных. Доказано, что она равна 0 только для величин, имеющих распределение идеального биполярного импульсного сигнала (Лемма 3). Лемма 2 определяет формулу оценки SW-характеристики по выборке. Теорема 1 предоставляет ещё одну формулу для вычисления SW-характеристики через второй момент. Наконец, теорема 2 связывает распределение биполярных импульсных шумов с прямоугольными. SW-характеристика позволяет рассматривать прямоугольный шум как частный случай биполярного импульсного шума, для которого продолжительная импульсация не имеет обязательного характера.

SW-характеристика была подсчитана для нормального распределения (теорема 3) и для гомоскедастичной смеси двух гауссиан (теорема 4). Рисунок 9 демонстрирует, что SW-характеристика позволяет различать бимодальную и одномодальную смеси гауссиан. Когда SW-характеристика смеси гауссиан становится близка к SW-характеристике нормального распределения, то бимодальность смеси совершенно исчезает. Такое простое верхнее ограничение SW-характеристики, кроме всего прочего, позволяет отделять продолжительный прямоугольный шум от мгновенного импульсного шума в некоторых ситуациях. Таким образом, возникает естественное определение критерия обнаружения прямоугольных сигналов на основе SW-характеристики (SW-критерия) — сравнить значение характеристики с некоторым верхним порогом, не превышающим значение SW-характеристики для нормального распределения и позволяющим отделить только бимодальные случаи.

SW-критерий оказывается достаточно эффективным в обнаружении прямоугольных сигналов в данных вихретоковых дефектограмм, которые преимущественно представлены нормальным рельсовым шумом. В завершение приведены результаты эксперимента применения разных критериев обнаружения прямоугольных сигналов в вихретоковых дефектограммах. Во всех примерах SW-критерий дал верный ответ, из чего можно сделать вывод, что применение SW-критерия может быть достаточно эффективным при решении задачи выявления прямоугольных шумов в данных вихретоковых дефектограмм. Кроме того, по сравнению с другими методами критерий обладает высокой объясняющей способностью, так как значения SW-характеристики имеют прямую связь с бимодальностью, правдоподобием распределения импульсных сигналов, а также идеальным биполярным импульсным сигналом и, соответственно, идеальным прямоугольным сигналом. Таким образом, обнаружение прямоугольного шума с помощью SW-характеристики может быть оправданным не только для вихретоковых дефектограмм, но и для других видов данных.

References

[1] K. V. Vlasov and A. L. Bobrov, “Influence of object physical properties instability on edge current method sensitivity”, *Vestnik IzhGTU imeni M. T. Kalashnikova*, vol. 27, no. 1, pp. 55–62, 2024, in Russian. DOI: 10.22213/2413-1172-2024-1-55-62.

[2] E. V. Kuzmin, O. E. Gorbunov, P. O. Plotnikov, and V. A. Tyukin, “Finding the level of useful signals on interpretation of magnetic and eddy-current defectograms”, *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 52, pp. 658–666, 2018. DOI: 10.3103/S0146411618070179.

[3] E. V. Kuzmin *et al.*, “Application of convolutional neural networks for recognizing long structural elements of rails in eddy current defectograms”, *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 55, pp. 712–722, 2021. DOI: 10.3103/S0146411621070099.

[4] E. V. Kuzmin *et al.*, "Assessing flaw severity on interpretation of eddy-current defectograms", *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 56, pp. 723–734, 2023. DOI: 10.3103/S0146411622070124.

[5] L. Y. Bystrov, A. N. Gladkov, and E. V. Kuzmin, "Suppression of additive periodic low-frequency interference on eddy current defectograms", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 31, no. 2, pp. 164–181, 2024, in Russian. DOI: 10.18255/1818-1015-2024-2-164-181.

[6] P. A. Lyakhov and A. R. Orazaev, "New method for detecting and removing random-valued impulse noise from images", *Computer Optics*, vol. 47, pp. 262–271, 2023, in Russian. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1145.

[7] R. Kunsoth and M. Biswas, "Modified decision based median filter for impulse noise removal", in *Proceedings of the International Conference on Wireless Communications, Signal Processing and Networking (WiSPNET)*, 2016, pp. 1316–1319. DOI: 10.1109/WiSPNET.2016.7566350.

[8] G. Manmadha Rao *et al.*, "Reduction of impulsive noise from speech and audio signals by using Sd-Rom algorithm", *International Journal of Recent Technology and Engineering*, vol. 10, no. 1, pp. 265–268, 2021. DOI: 10.35940/ijrte.A5943.0510121.

[9] S. Pham and A. Dinh, "Adaptive-cognitive Kalman filter and neural network for an upgraded nondispersive thermopile device to detect and analyze fusarium spores", *Sensors*, vol. 19, no. 22, p. 4900, 2021. DOI: 10.3390/s19224900.

[10] Y. Huo, K. Yang, Y. Qi, and T. Xu, "Robust maximum correlation entropy Kalman filtering algorithm based on S-functions under impulse noise", *Signal, Image and Video Processing*, vol. 18, pp. 1–15, 2024. DOI: 10.1007/s11760-024-03135-y.

[11] Y. Cheng, C. Li, S. Chen, and Z. Zhou, "An enhanced impulse noise control algorithm using a novel nonlinear function", *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol. 42, pp. 1–20, 2023. DOI: 10.1007/s00034-023-02421-3.

[12] C. Xing, Y. Ran, G. Tan, Q. Meng, and M. Lu, "Impulse noise mitigation and channel estimation method in OFDM systems based on TMSBL", *IEEE Access*, vol. 12, pp. 123 376–123 387, 2024. DOI: 10.1109/ACCESS.2024.3454316.

[13] J. Behboodian, "On the modes of a mixture of two normal distributions", *Technometrics*, vol. 12, no. 1, pp. 131–139, 1970. DOI: 10.1080/00401706.1970.10488640.

[14] M. Á. Carreira-Perpiñán and C. K. I. Williams, "On the number of modes of a Gaussian mixture", *Scale Space Methods in Computer Vision*, pp. 625–640, 2003. DOI: 10.1007/3-540-44935-3_44.

[15] Y. A. Dubnov and A. V. Bulychev, "Bayesian Identification of a Gaussian Mixture Model", *Journal of Information Technologies and Computing Systems*, no. 1, pp. 101–111, 2017.

[16] S. Jammalamadaka and Q. Jin, "A Bayesian test for the number of modes in a Gaussian mixture", *Asian Journal of Earth Sciences*, vol. 1, pp. 9–22, 2021.

[17] L. Dan, W. Xue, W. Guiqin, and Q. Zhihong, "A methodological approach for detecting burst noise in the time domain", *World Academy of Science, Engineering and Technology*, vol. 58, pp. 974–978, Oct. 2009.

[18] X. Chen, Y. Han, and J. Wu, "Burst noise measuring on the basis of wavelet and fourier transform", in *Proceedings of the International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation*, 2010, pp. 769–771. DOI: 10.1109/ICMTMA.2010.366.

[19] R. Zhou, J. Han, Z. Guo, and T. Li, "De-noising of magnetotelluric signals by discrete wavelet transform and SVD decomposition", *Remote Sensing*, vol. 13, no. 23, pp. 1–19, 2021. DOI: 10.3390/rs13234932.

[20] X. Zhang *et al.*, "Separation of magnetotelluric signals based on refined composite multiscale dispersion entropy and orthogonal matching pursuit", *Earth, Planets and Space*, vol. 73, pp. 1–18, 2021. DOI: 10.1186/s40623-021-01399-z.

[21] L. Zhang *et al.*, "Identification and suppression of magnetotelluric noise via a deep residual network", *Minerals*, vol. 12, p. 766, 2022. DOI: 10.3390/min12060766.

[22] G. Zuo *et al.*, "Magnetotelluric noise attenuation using a deep residual shrinkage network", *Minerals*, vol. 12, no. 9, p. 1086, 2022. DOI: 10.3390/min12091086.

[23] G. Li *et al.*, "Low-frequency magnetotelluric data denoising using improved denoising convolutional neural network and gated recurrent unit", *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 62, pp. 1–16, 2024. DOI: 10.1109/TGRS.2024.3374950.

[24] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 3rd ed. John Wiley & Sons, 1970, vol. 1, p. 509.

[25] V. Boss, *Lekcii po matematike: Veroyatnost', informaciya, statistika.* KomKniga, 2005, vol. 4, 216 pp., in Russian.

[26] A. N. Shiryaev, *Veroyatnost'*, 3rd ed. MCNMO, 2004, vol. 1, p. 520, in Russian.

[27] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin, "Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm", *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, vol. 39, no. 1, pp. 1–22, 1977. DOI: 10.1111/j.2517-6161.1977.tb01600.x.

[28] K. P. Burham and D. R. Anderson, *Model Selection and Multimodel Inference*, 2nd ed. Springer New York, 2002, 515 pp. DOI: 10.1007/b97636.

[29] L. D. Kudryavcev, *Kurs matematicheskogo analiza.* Vysshaya shkola, 1981, vol. 1, 687 pp., in Russian.

A. Вывод формулы SW-характеристики

Для вывода формул используется ряд классических методов интегральных преобразований. Для ясности обозначений приведём здесь некоторые из них.

Пусть $f(x)$ непрерывна на интервале $(a;b)$, функция $\varphi(t)$ определена и непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $(\alpha;\beta)$, причём для всех $t \in (\alpha;\beta)$ выполнено неравенство $a < \varphi(t) < b$. Если $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$, тогда справедливо равенство:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно-дифференцируемы на отрезке $(a;b)$, то [29]

$$\int_{a}^{b} udv = uv|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} vdu.$$

Приложение посвящено доказательству следующей теоремы:

Теорема 4. *Пусть* $X \sim \mathbb{N}_2(m_1, m_2, \sigma^2, p)$, $m_2 \geqslant m_1$, $r = \frac{m_2 - m_1}{\sigma}$, *тогда SW-характеристика для величины* X *равна*

$$SW(X) = J_2^2 \frac{1 + r^2(1-p)p}{(\Theta_1 - r(1-p))^2} - J_1 J_2, \text{ где}$$

$$\Theta_1 = \frac{1}{J_1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(pe^{-\frac{(p-1)^2r^2}{2}} + (1-p)e^{-\frac{p^2r^2}{2}}\right) + rp\int\limits_{-\infty}^{-(p-1)r}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{l^2}{2}}dl\right),$$

$$J_1 = p\int\limits_{-\infty}^{-(p-1)r}\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{l^2}{2}}dl + (1-p)\int\limits_{-\infty}^{-pr}\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{l^2}{2}}dl, \quad J_2 = 1 - J_1.$$

Доказательство. Доказательство разбивается на несколько частей. В первой части производится прямое вычисление SW-характеристики для распределения $\mathbb{N}_2$. Во второй и третьей частях формула преобразуется так, чтобы она зависела только от 2 переменных. Наконец, в заключительной четвёртой части полученная формула SW-характеристики приводится к упрощённому виду, в котором она представлена в формулировке доказываемой теоремы.

Пусть $X \sim \mathbb{N}_2(m_1, m_2, \sigma^2, p)$. Вычислим $\mathbb{E}X$

$$\mathbb{E}X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(pe^{-\frac{(t-m_1)^2}{2\sigma^2}} + (1-p)e^{-\frac{(t-m_2)^2}{2\sigma^2}}\right)dt = p\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m_1)^2}{2\sigma^2}}dt +$$
$$+ (1-p)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m_2)^2}{2\sigma^2}}dt = pm_1 + (1-p)m_2.$$

Выпишем нормировочные константы функции плотности $f_{X_1}(t)$ и $f_{X_2}(t)$ с учётом найденного значения $\mathbb{E}X$

$$J_1 = \int\limits_{-\infty}^{pm_1+(1-p)m_2}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(pe^{-\frac{(t-m_1)^2}{2\sigma^2}}\right)dt + \int\limits_{-\infty}^{pm_1+(1-p)m_2}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left((1-p)e^{-\frac{(t-m_2)^2}{2\sigma^2}}\right)dt = J_{11} + J_{12}, \tag{29}$$

$$J_2 = \int\limits_{pm_1+(1-p)m_2}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(pe^{-\frac{(t-m_1)^2}{2\sigma^2}}\right)dt + \int\limits_{pm_1+(1-p)m_2}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left((1-p)e^{-\frac{(t-m_2)^2}{2\sigma^2}}\right)dt = J_{21} + J_{22}. \tag{30}$$

Числа $J_{11}, J_{12}, J_{21}, J_{22}$ оказываются связаны с параметром распределения p. Связующие их соотношения будут полезны в последующих преобразованиях.

$$J_{11} + J_{21} = p, \tag{31}$$
$$J_{12} + J_{22} = 1 - p. \tag{32}$$

Вычисление $\mathbb{E}X_2$ разобьём на 2 части:

$$\mathbb{E}X_2 = \frac{1}{J_2}\int\limits_{pm_1+(1-p)m_2}^{+\infty}t\left(\frac{p}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m_1)^2}{2\sigma^2}}\right)dt + \frac{1}{J_2}\int\limits_{pm_1+(1-p)m_2}^{+\infty}t\left(\frac{(1-p)}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m_2)^2}{2\sigma^2}}\right)dt = \frac{1}{J_2}(I_1 + I_2). \tag{33}$$

Интеграл I_1 в свою очередь также разобьём на 2 части и в одной из частей получим выражение с J_{21} из (30):

$$I_1 = p\int\limits_{pm_1+(1-p)m_2}^{+\infty}\frac{t}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m_1)^2}{2\sigma^2}}dt = p\int\limits_{pm_1+(1-p)m_2}^{+\infty}\frac{t - m_1 + m_1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m_1)^2}{2\sigma^2}}dt =$$
$$= p\int\limits_{pm_1+(1-p)m_2}^{+\infty}\frac{t - m_1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m_1)^2}{2\sigma^2}}dt + m_1J_{21} = I_{11} + m_1J_{21}.$$

Выполним замену $s = \frac{(t-m_1)^2}{2\sigma^2}$ в интеграле I_{11}:

$$I_{11} = p \int\limits_{pm_1+(1-p)m_2}^{+\infty} \frac{t-m_1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m_1)^2}{2\sigma^2}} dt = \left| \begin{array}{lll} s = \frac{(t-m_1)^2}{2\sigma^2} & \alpha = pm_1 + (1-p)m_2 & \beta = +\infty \\ ds = \frac{t-m_1}{\sigma^2} dt & a = \frac{(p-1)^2(m_1-m_2)^2}{2\sigma^2} & b = +\infty \end{array} \right| =$$

$$= p \int\limits_{\frac{(p-1)^2(m_1-m_2)^2}{2\sigma^2}}^{+\infty} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-s} ds = - \frac{p\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-s} \Big|_{\frac{(p-1)^2(m_1-m_2)^2}{2\sigma^2}}^{+\infty} = - \frac{p\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\infty} - e^{-\frac{(p-1)^2(m_1-m_2)^2}{2\sigma^2}} \right) =$$

$$= \frac{p\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(p-1)^2(m_1-m_2)^2}{2\sigma^2}}.$$

Вычисление I_2 во многом повторяет рассуждения, применяемые при вычислении I_1. Сначала разобьём интеграл I_2 на 2 части и в одной из частей обнаружим J_{22} из (30):

$$I_2 = \int\limits_{pm_1+(1-p)m_2}^{+\infty} \frac{(1-p)t}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m_2)^2}{2\sigma^2}} dt = \int\limits_{pm_1+(1-p)m_2}^{+\infty} \frac{(1-p)(t-m_2+m_2)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m_2)^2}{2\sigma^2}} dt =$$

$$= \int\limits_{pm_1+(1-p)m_2}^{+\infty} \frac{(1-p)(t-m_2)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m_2)^2}{2\sigma^2}} dt + m_2 J_{22} = I_{21} + m_2 J_{22}.$$

Выполним замену $s = \frac{(t-m_2)^2}{2\sigma^2}$ в интеграле I_{21}. Она производится аналогично замене в интеграле I_{11}, поэтому, чтобы не повторяться, несколько сократим вычисления:

$$I_{21} = (1-p) \int\limits_{\frac{p^2(m_1-m_2)^2}{2\sigma^2}}^{+\infty} \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}} ds = \frac{(1-p)\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{p^2(m_1-m_2)^2}{2\sigma^2}}.$$

Полученные формулы для I_1 и I_2 подставим в (33):

$$\mathbb{E}X_2 = \frac{1}{J_2} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(pe^{-\frac{(p-1)^2(m_1-m_2)^2}{2\sigma^2}} + (1-p)e^{-\frac{p^2(m_1-m_2)^2}{2\sigma^2}} \right) + m_1 J_{21} + m_2 J_{22} \right).$$

Теперь все те же рассуждения проведём для вычисления $\mathbb{E}X_1$:

$$\mathbb{E}X_1 = \frac{1}{J_1} \int\limits_{-\infty}^{pm_1+(1-p)m_2} t \left(\frac{p}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m_1)^2}{2\sigma^2}} \right) dt + \frac{1}{J_1} \int\limits_{-\infty}^{pm_1+(1-p)m_2} t \left(\frac{(1-p)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m_2)^2}{2\sigma^2}} \right) dt = \frac{1}{J_1}(I_3 + I_4). \tag{34}$$

Интеграл I_3 разобьём на 2 части и в одной из частей произведём замену интеграла на J_{11} из (29):

$$I_3 = p \int\limits_{-\infty}^{pm_1+(1-p)m_2} \frac{t}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m_1)^2}{2\sigma^2}} dt = p \int\limits_{-\infty}^{pm_1+(1-p)m_2} \frac{t-m_1+m_1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m_1)^2}{2\sigma^2}} dt =$$

$$= p \int\limits_{-\infty}^{pm_1+(1-p)m_2} \frac{t-m_1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m_1)^2}{2\sigma^2}} dt + m_1 J_{11} = I_{31} + m_1 J_{11}.$$

Выполним замену $s = \frac{(t-m_1)^2}{2\sigma^2}$ в интеграле I_{31}:

$$I_{31} = p \int\limits_{-\infty}^{pm_1+(1-p)m_2} \frac{t-m_1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m_1)^2}{2\sigma^2}} dt = \begin{vmatrix} s = \frac{(t-m_1)^2}{2\sigma^2} & \alpha = -\infty & \beta = pm_1 + (1-p)m_2 \\ ds = \frac{t-m_1}{\sigma^2} dt & a = +\infty & b = \frac{(p-1)^2(m_1-m_2)^2}{2\sigma^2} \end{vmatrix} =$$

$$= p \int\limits_{+\infty}^{\frac{(p-1)^2(m_1-m_2)^2}{2\sigma^2}} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-s} ds = -\frac{p\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-s} \Big|_{+\infty}^{\frac{(p-1)^2(m_1-m_2)^2}{2\sigma^2}} = -\frac{p\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{(p-1)^2(m_1-m_2)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\infty} \right) =$$

$$= -\frac{p\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(p-1)^2(m_1-m_2)^2}{2\sigma^2}}.$$

Повторяя все те же рассуждения, получим формулу для I_4:

$$I_4 = -\frac{(1-p)\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{p^2(m_1-m_2)^2}{2\sigma^2}} + m_2 J_{12}.$$

Подставим I_3 и I_4 в (34):

$$\mathbb{E}X_1 = \frac{1}{J_1} \left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(pe^{-\frac{(p-1)^2(m_1-m_2)^2}{2\sigma^2}} + (1-p)e^{-\frac{p^2(m_1-m_2)^2}{2\sigma^2}} \right) + m_1 J_{11} + m_2 J_{12} \right). \quad (35)$$

Нам известны $\mathbb{E}X, \mathbb{E}X_1$ и $\mathbb{E}X_2$. Для вычисления $SW(X)$ воспользуемся теоремой 1. Единственной неизвестной в формуле величиной является второй момент $\mathbb{E}X^2$. Его возьмём из (25).

Теперь покажем, что для описания SW-характеристики смеси двух гауссиан достаточно трёх переменных, то есть $SW(m_1, m_2, \sigma^2, p) = SW(d, \sigma^2, p)$, где $d = m_2 - m_1$. Это означает, что SW-характеристика зависит не от математических ожиданий в смеси, а только от расстояния между ними.

Для того, чтобы J_1 и J_2 зависели только от разности m_2 и m_1, достаточно показать, что J_{11}, J_{12}, J_{21} и J_{22} зависят только от $m_2 - m_1$. Напомним, что $\mathbb{E}X = pm_1 + (1-p)m_2$. Рассмотрим интеграл J_{11}.

$$J_{11} = p \int\limits_{-\infty}^{\mathbb{E}X} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m_1)^2}{2\sigma^2}} dt = \begin{vmatrix} s = t - m_1 & \alpha = -\infty & \beta = pm_1 + (1-p)m_2 \\ ds = dt & a = -\infty & b = (p-1)(m_1 - m_2) \end{vmatrix} = p \int\limits_{-\infty}^{-(p-1)d} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}} ds.$$

В интеграле J_{12} выполним замену $t - m_2$:

$$J_{12} = \int\limits_{-\infty}^{\mathbb{E}X} \frac{1-p}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m_2)^2}{2\sigma^2}} dt = \begin{vmatrix} s = t - m_2 & \alpha = -\infty & \beta = pm_1 + (1-p)m_2 \\ ds = dt & a = -\infty & b = p(m_1 - m_2) \end{vmatrix} = \int\limits_{-\infty}^{-pd} \frac{1-p}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}} ds.$$

То же самое проделаем для J_{21} и J_{22}. Получим

$$J_{21} = p \int\limits_{-(p-1)d}^{+\infty} \tfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}} ds. \quad J_{22} = \int\limits_{-pd}^{+\infty} \tfrac{1-p}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}} ds.$$

Выполним замену $m_2 = m_1 + d$ в $\mathbb{E}X$:

$$\mathbb{E}X = pm_1 + (1-p)m_2 = pm_1 + (1-p)(m_1 + d) = m_1 + (1-p)d.$$

Далее для сокращения размера формул будем использовать функцию

$$\xi(t) = te^{-\frac{(t-1)^2 d^2}{2\sigma^2}}. \quad (36)$$

Функция $\xi(t)$ будет фигурировать только с двумя аргументами:

$$\xi(p) = pe^{-\frac{(p-1)^2 d^2}{2\sigma^2}}, \tag{37}$$

$$\xi(1-p) = (1-p)e^{-\frac{p^2 d^2}{2\sigma^2}}. \tag{38}$$

Перепишем формулу (35) с учётом замены $m_2 = m_1 + d$ и (37), (38):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_1 &= \frac{1}{J_1}\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(pe^{-\frac{(p-1)^2(m_1-m_2)^2}{2\sigma^2}} + (1-p)e^{-\frac{p^2(m_1-m_2)^2}{2\sigma^2}}\right) + m_1 J_{11} + m_2 J_{12}\right) = \\ &= \frac{1}{J_1}\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}(\xi(p) + \xi(1-p)) + m_1 J_{11} + m_2 J_{12}\right) = \frac{1}{J_1}\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}(\xi(p) + \xi(1-p)) + m_1 J_{11} + (m_1 + d)J_{12}\right) = \\ &= m_1 + \frac{1}{J_1}\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}(\xi(p) + \xi(1-p)) + dJ_{12}\right).\end{aligned} \tag{39}$$

То же самое проделаем с $\mathbb{E}X_2$:

$$\mathbb{E}X_2 = m_1 + \frac{1}{J_2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}(\xi(p) + \xi(1-p)) + dJ_{22}\right). \tag{40}$$

Отклонения $\mathbb{E}X_1$ и $\mathbb{E}X_2$ от m_1 обозначим θ_1 и θ_2 соответственно:

$$\theta_1 = \frac{1}{J_1}\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}(\xi(p) + \xi(1-p)) + dJ_{12}\right), \tag{41}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{J_2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}(\xi(p) + \xi(1-p)) + dJ_{22}\right). \tag{42}$$

Рассмотрим выражение $\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2 &= m_1 + \frac{1}{J_1}\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}(\xi(p) + \xi(1-p)) + dJ_{12}\right) - m_1 - \frac{1}{J_2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}(\xi(p) + \xi(1-p)) + dJ_{22}\right) = \\ &= \frac{1}{J_1}\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}(\xi(p) + \xi(1-p)) + dJ_{12}\right) - \frac{1}{J_2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}(\xi(p) + \xi(1-p)) + dJ_{22}\right) = \\ &= \frac{1}{J_1 J_2}\left(-\frac{(J_1 + J_2)\sigma}{\sqrt{2\pi}}(\xi(p) + \xi(1-p)) + dJ_2 J_{12} - dJ_1 J_{22}\right) = \\ &= \frac{1}{J_1 J_2}\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}(\xi(p) + \xi(1-p)) + dJ_2 J_{12} - dJ_1((1-p) - J_{12})\right) = \\ &= \frac{1}{J_1 J_2}\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}(\xi(p) + \xi(1-p)) + dJ_{12} - dJ_1(1-p)\right) = \frac{1}{J_1 J_2}(J_1\theta_1 - dJ_1(1-p)) = \frac{1}{J_2}(\theta_1 - d(1-p)).\end{aligned} \tag{43}$$

Из формул (41), (42) заметим, что

$$J_1\theta_1 + J_2\theta_2 = d(J_{12} + J_{22}) = d(1-p).$$

Напомним формулу SW-характеристики:

$$SW(X) = \frac{\mathbb{E}X^2 - J_1\mathbb{E}^2 X_1 - J_2\mathbb{E}^2 X_2}{(\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2)^2}.$$

Формула (43) позволяет переписать знаменатель данной формулы через параметр d. Запишем числитель, воспользовавшись формулой (25). Ожидания $\mathbb{E}X_1$ и $\mathbb{E}X_2$ перепишем с использованием чисел θ_1, θ_2 из (41), (42):

$$\mathbb{E}X^2 - J_1\mathbb{E}^2X_1 - J_2\mathbb{E}^2X_2 = \sigma^2 + pm_1^2 + (1-p)m_2^2 - J_1(m_1+\theta_1)^2 - J_2(m_1+\theta_2)^2 = \sigma^2 + pm_1^2 + (1-p)m_2^2 - \\ - J_1\left(m_1^2 - 2m_1\theta_1 + \theta_1^2\right) - J_2\left(m_1^2 - 2m_1\theta_2 + \theta_2^2\right) = \sigma^2 + (p-1)m_1^2 + (1-p)(m_1+d)^2 + J_1(2m_1\theta_1 - \theta_1^2) + \\ + J_2(2m_1\theta_2 - \theta_2^2) = \sigma^2 + (1-p)(-2m_1d + d^2) - J_1\theta_1^2 - J_2\theta_2^2 + 2m_1d(1-p) = \\ = \sigma^2 + (1-p)d^2 - J_1\theta_1^2 - J_2\theta_2^2. \quad (44)$$

Как можно видеть, и числитель (44), и знаменатель (43) SW-характеристики могут быть переписаны через параметр $d = m_2 - m_1$.

Оказывается, SW-характеристика смеси двух гауссиан может быть разрешена относительно всего лишь двух переменных. Вместо расстояния d между математическими ожиданиями гауссиан можно рассматривать величину $r = \frac{d}{\sigma}$.

$$SW(X) = SW(d, \sigma^2, p) = SW(r, p),$$

Замену переменной начнём выполнять с наиболее простых функций. Функция $\xi(t)$ из (36) переписывается следующим образом:

$$\xi(t) = te^{-\frac{(t-1)^2r^2}{2}}. \quad (45)$$

Рассмотрим J_{11}.

$$J_{11} = p\int\limits_{-\infty}^{-(p-1)d} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}}ds = \left| \begin{matrix} l = \frac{s}{\sigma} & \alpha = -\infty & \beta = -(p-1)d \\ dl = \frac{ds}{\sigma} & a = -\infty & b = -\frac{(p-1)d}{\sigma} \end{matrix} \right| = p\int\limits_{-\infty}^{-(p-1)r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{l^2}{2}}dl.$$

Ту же замену произведём в интеграле J_{12}:

$$J_{12} = (1-p)\int\limits_{-\infty}^{-pd} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}}ds = \left| \begin{matrix} l = \frac{s}{\sigma} & \alpha = -\infty & \beta = -pd \\ dl = \frac{ds}{\sigma} & a = -\infty & b = -\frac{pd}{\sigma} \end{matrix} \right| = (1-p)\int\limits_{-\infty}^{-pr} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{l^2}{2}}dl.$$

Опустим аналогичные преобразования для J_{21} и J_{22}.

$$J_{21} = p\int\limits_{-(p-1)r}^{+\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{l^2}{2}}dl. \quad J_{22} = (1-p)\int\limits_{-pr}^{+\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{l^2}{2}}dl.$$

Числитель SW-характеристики (44) перепишем следующим образом:

$$\sigma^2 + (1-p)d^2 - J_1\theta_1^2 - J_2\theta_2^2 = \sigma^2(1 + (1-p)r^2 - J_1\Theta_1^2 - J_2\Theta_2^2).$$

За Θ_1, Θ_2 обозначены величины:

$$\Theta_1 = \frac{\theta_1}{\sigma} = \frac{1}{J_1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\xi(p) + \xi(1-p)) + rJ_{12}\right),$$

$$\Theta_2 = \frac{\theta_2}{\sigma} = \frac{1}{J_2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\xi(p) + \xi(1-p)) + rJ_{22}\right).$$

Преобразуем знаменатель SW-характеристики (43):

$$(\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2)^2 = \frac{1}{J_2^2}\left(\theta_1 - d(1-p)\right)^2 = \frac{\sigma^2}{J_2^2}\left(\Theta_1 - r(1-p)\right)^2.$$

Число σ^2 присутствует и в знаменателе, и в числителе SW-характеристики. Следовательно, на него можно сократить. Итоговая формула имеет вид:

$$SW(X) = \frac{J_2^2\big(1 + (1-p)r^2 - J_1\Theta_1^2 - J_2\Theta_2^2\big)}{(\Theta_1 - r(1-p))^2}. \tag{46}$$

Формулу (46) можно ещё несколько упростить, чтобы она приобрела заявленный в теореме 4 вид. Перепишем Θ_2, используя свойство (32):

$$\Theta_2 = \frac{\theta_2}{\sigma} = \frac{1}{J_2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\xi(p) + \xi(1-p)) + rJ_{22}\right) = \frac{1}{J_2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\xi(p) + \xi(1-p)) + r((1-p) - J_{12})\right) =$$
$$= \frac{1}{J_2}\big(-J_1\Theta_1 + r(1-p)\big).$$

Числитель формулы (46) будет иметь вид

$$J_2^2\left(1 + (1-p)r^2 - J_1\Theta_1^2 - J_2\Theta_2^2\right) = J_2^2\left(1 + (1-p)r^2 - J_1\Theta_1^2 - \frac{1}{J_2}\left(J_1^2\Theta_1^2 - 2J_1\Theta_1 r(1-p) + r^2(1-p)^2\right)\right).$$

Воспользуемся следующим преобразованием

$$-J_1 - \frac{J_1^2}{J_2} = -\frac{J_1J_2 + J_1^2}{J_2} = -\frac{J_1(J_2 + J_1)}{J_2} = -\frac{J_1}{J_2},$$

Числитель SW-характеристики примет вид:

$$J_2^2\left(1 + (1-p)r^2 - \frac{J_1}{J_2}\Theta_1^2 + 2\frac{J_1}{J_2}\Theta_1 r(1-p) - \frac{1}{J_2}r^2(1-p)^2\right) =$$
$$= J_2^2\left(1 + (1-p)r^2 - \frac{J_1}{J_2}\left(\Theta_1 - r(1-p)\right)^2 + \frac{J_1}{J_2}r^2(1-p)^2 - \frac{1}{J_2}r^2(1-p)^2\right).$$

Теперь, пользуясь фактом, что $J_1 + J_2 = 1$, используем ещё одно полезное преобразование:

$$\frac{J_1}{J_2} - \frac{1}{J_2} = \frac{J_1 - (J_1 + J_2)}{J_2} = -1,$$

В результате числитель SW-характеристики перепишется:

$$J_2^2\left(1 + (1-p)r^2 - \frac{J_1}{J_2}\left(\Theta_1 - r(1-p)\right)^2 - r^2(1-p)^2\right) =$$
$$= J_2^2\left(1 - \frac{J_1}{J_2}\left(\Theta_1 - r(1-p)\right)^2 + r^2(-p^2 + 2p - 1 + 1 - p)\right) = J_2^2\left(1 - \frac{J_1}{J_2}\left(\Theta_1 - r(1-p)\right)^2 + r^2(1-p)p\right). \tag{47}$$

Теперь, подставив (47) в SW-характеристику, формулу удастся заметно сократить:

$$SW(X) = J_2^2\frac{1 + r^2(1-p)p}{(\Theta_1 - r(1-p))^2} - J_1J_2. \tag{48}$$

□