

УДК 517.9

## Диффузионный хаос в задаче «реакция–диффузия» с гантелеобразной областью определения пространственной переменной

Глызин С. Д., Шокин П. Л.<sup>1</sup>

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова  
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14*

*e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru, katarai@yandex.ru*

*получена 25 марта 2013*

**Ключевые слова:** диффузионный хаос, аттрактор, ляпуновская размерность, уравнение Гинзбурга – Ландау, бифуркация.

Рассматривается краевая задача типа «реакция–диффузия» в области, состоящей из двух прямоугольных частей, связанных между собой перемычкой. Ширина перемычки является бифуркационным параметром задачи и меняется так, что мера области сохраняется.

Изучены условия возникновения хаотических колебаний и построена зависимость инвариантных характеристик аттрактора задачи от ширины перемычки. Параметр диффузии при этом выбран так, что для случая наиболее широкой перемычки (соответствует прямоугольной пространственной области) пространственно однородный цикл задачи орбитально асимптотически устойчив. За счет уменьшения ширины перемычки однородный цикл теряет устойчивость, а затем появляется пространственно неоднородный хаотический аттрактор. Для полученного аттрактора вычисляются ляпуновские экспоненты и ляпуновская размерность, при этом выяснилось, что размерность растет с уменьшением параметра, но лишь до некоторого предела. Показано, что увеличение размерности связано с усложнением распределения по пространственной переменной устойчивых режимов системы.

## Введение

Краевые задачи типа «реакция – диффузия» представляют собой важный модельный пример, на котором изучаются процессы формирования пространственно неоднородных структур в пространственно однородных средах. Данный феномен был впервые описан математически Аланом Тьюрингом в работе [1], посвященной явлению диффузионной неустойчивости пространственно однородных решений.

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.G34.31.0053 и при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.V37.21.0457.

Теорема Тьюринга – Пригожина [2] описывает ситуацию, когда при определенном изменении диффузионного параметра системы пространственно однородный режим теряет устойчивость, а в его окрестности появляются устойчивые пространственно неоднородные режимы. Доказательства соответствующих фактов нетрудно получить в случае простых областей, например, отрезка или выпуклых областей с гладкой границей. В нашей работе рассматривается задача о потере устойчивости пространственно однородного цикла распределенной динамической системы типа «реакция–диффузия» в случае, когда при сохранении меры области определения меняется ее граница. В частности, подробно рассмотрен случай гантелеобразной области. Краевые задачи параболического типа в такой области были рассмотрены ранее в статьях Хосе Арриета (J. Arrieta) [4, 5] и серии более поздних его статей с соавторами [6–8]. В этих публикациях, однако, ставилась несколько иная задача, заключающаяся в исследовании ситуации, когда ширина перемычки, соединяющей области, стремится к нулю.

С целью более осмысленного подбора параметров задачи были сделаны некоторые дополнительные предположения. В первую очередь, область определения пространственной переменной для простоты выбиралась в виде двух прямоугольных частей, связанных между собой перемычкой. Ширина перемычки принималась бифуркационным параметром задачи, причем максимальное значение этого параметра соответствовало исходной прямоугольной области. Далее, предполагалось, что параметры точечной (не зависящая от пространственной переменной) системы находятся вблизи бифуркации Андронова – Хопфа и, тем самым, задача имеет пространственно однородный цикл. Следующее предположение состоит в том, что в задаче возможна диффузионная потеря устойчивости однородного цикла и параметр диффузии для указанной выше прямоугольной области выбран вблизи, но больше критического значения параметра диффузии.

Таким образом, основная решаемая в работе задача состоит в выяснении, при каком значении ширины перемычки пространственно однородный режим теряет устойчивость и какие при этом появляются устойчивые режимы.

В случае появления неупорядоченных колебаний численно определяется набор инвариантных числовых характеристик аттрактора (ляпуновских экспонент) с тем, чтобы по ним судить о сложности бифурцирующих пространственно неоднородных режимов. Одним из основных результатов, полученных на этом пути, является тот факт, что увеличение ляпуновской размерности аттрактора тесно связано с усложнением пространственного распределения аттрактора. Иначе говоря, в более сложном случае имеется более изрезанный профиль распределения переменных по пространственной области.

## 1. Постановка задачи

Будем рассматривать уравнение типа «реакция — диффузия»

$$\dot{u} = \nu D \Delta u + F(u) \quad (1)$$

с условием Неймана на границе

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad (2)$$

где  $u = u(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $1 \leq k \leq 3$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа, диагональная матрица  $D$  имеет вид  $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_m\}$ ,  $d_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, m$ , параметр  $\nu > 0$  отвечает за пропорциональное уменьшение коэффициентов диффузии. Наконец,  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к кусочно-гладкой границе  $\partial\Omega$  ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ .

Предположим, что у краевой задачи (1), (2) имеется пространственно однородный цикл  $u = u_0(t)$  ( $u_0(t + T) \equiv u_0(t)$ ). Для исследования его устойчивости линеаризуем на нем краевую задачу (1), (2). Система в вариациях имеет вид

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \nu D \Delta \xi + A(t)\xi, \quad \left. \frac{\partial \xi}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3)$$

где  $A(t) = F'(u)|_{u=u_0(t)}$ . Для применения к получившейся системе метода Фурье введем в рассмотрение собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в области  $\Omega$  так, что

$$\Delta w_k = \lambda_k w_k, \quad \left. \frac{\partial w_k}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad k = 1, \dots, \quad (4)$$

где  $0 = \lambda_0 \leq -\lambda_1 \leq -\lambda_2 \dots$ , — занумерованные в порядке возрастания модуля собственные значения оператора  $\Delta$  с граничным условием Неймана.

Раскладывая  $\xi(t, x)$  в ряд по собственным функциям  $\xi(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)w_k(x)$  и подставляя это разложение в систему (3), получим следующие соотношения:

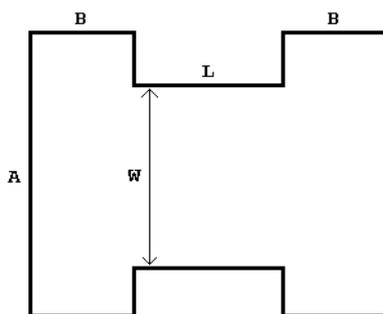
$$\dot{a}_k = (A_0(t) - zD)a_k, \quad (5)$$

где  $z = -\nu\lambda_k$ . Пусть  $\mu_s = \mu_s(z)$ ,  $s = \overline{1, m}$  — мультипликаторы задачи (5), введем функцию

$$\alpha(z) = \max_{1 \leq s \leq m} \left\{ \frac{1}{T} \text{Re}(\ln \mu_s(z)) \right\}.$$

Нетрудно видеть, если найдутся такие  $0 \leq z_1 < z_2$ , что  $\alpha(z) > 0$  при  $z_1 < z < z_2$ , то при достаточно малых  $\nu$  цикл  $u = u_0(t)$  неустойчив и наблюдается явление тьюринговой неустойчивости [1, 3].

Рассмотрим следующую задачу: предположим, что величина  $\nu$  относительно мала, однако больше, чем критическое значение, при котором однородный цикл теряет устойчивость. Выберем область определения пространственной переменной  $\Omega$  в виде двух соединенных перемычкой прямоугольников (см. рис. 1). Будем считать, что прямоугольники имеют фиксированную длину и ширину  $A \times B$ , а перемычка имеет длину  $L$ , а ширину  $W$ . Теперь будем уменьшать  $W$  и, соответственно, увеличивать  $L$  таким образом, чтобы произведение  $LW$  оставалось неизменным. Рассмотрим характер потери устойчивости однородного цикла при указанном изменении  $\Omega$  и определим инвариантные числовые характеристики возникающих при этом аттракторов задачи.

Рис. 1. Область определения  $\Omega$ 

## 2. Выбор параметров задачи на основе асимптотических методов

Рассмотрим краевую задачу (1), (2) в ситуации, когда соответствующая ей точечная задача близка к бифуркации Андронова – Хопфа

$$\dot{u} = \varepsilon \nu D \Delta u + (A_0 + \varepsilon A_1)u + F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + F_*(u), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad (6)$$

как и выше  $u = u(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$  — положительный малый параметр,  $n \times n$  матрица  $A_0$  имеет пару собственных чисел на мнимой оси  $\pm i\omega$ , причем все остальные собственные числа данной матрицы лежат в левой комплексной полуплоскости,  $n \times n$  матрица  $A_1$  такова, что собственные числа матрицы  $A_0 + \varepsilon A_1$  переходят в правую комплексную полуплоскость при  $\varepsilon > 0$ . Вектор-функции векторного аргумента  $F_2(u, u)$ ,  $F_3(u, u, u)$  линейны по каждому аргументу, гладкая функция  $F_*(u)$  имеет порядок малости по  $u$  выше третьего. Введем собственный вектор  $a$ , соответствующий собственному числу  $i\omega$  так, что  $(A_0 - i\omega)a = 0$ , в свою очередь собственный вектор сопряженной задачи  $(A_0^T + i\omega)b = 0$  выберем при дополнительном условии  $(a, b) = 1$ , где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в унитарном пространстве.

Хорошо известно, что система (6) с помощью замены

$$u(t, x, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}(\xi(s, x) \exp(i\omega t)a + \bar{\xi}(s, x) \exp(-i\omega t)\bar{a}) + \varepsilon u_2(s, x) + \varepsilon^{3/2} u_3(s, x) + \dots, \quad (7)$$

где  $s = \varepsilon t$ , в результате приравнивания коэффициентов при степенях  $\sqrt{\varepsilon}$  на третьем шаге приводится к укороченной квазинормальной форме (см. [9])

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = \nu(Da, b)\Delta \xi + (A_1 a, b)\xi + d|\xi|^2 \xi, \quad \left. \frac{\partial \xi}{\partial \bar{n}} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad (8)$$

где  $d = d_0 + ic_0$  — первая ляпуновская величина, определяемая нелинейностью задачи. Нетрудно найти

$$d_0 + ic_0 = \left( F_2(a, w_0) + F_2(w_0, a) + F_2(\bar{a}, w_1) + F_2(w_1, \bar{a}) + F_3(a, a, \bar{a}) + F_3(a, \bar{a}, a) + F_3(\bar{a}, a, a), b \right), \quad (9)$$

где  $w_0 = -A_0^{-1}(F_2(\bar{a}, a) + F_2(a, \bar{a}))$ ,  $w_1 = (2i\omega E - A_0)^{-1}F_2(a, a)$ . Основное предположение, принимаемое на этом этапе, состоит в том, что  $d_0 < 0$ . Учтем, кроме того, что собственные числа матрицы  $A_0 + \varepsilon A_1$  переходят при  $\varepsilon > 0$  в правую комплексную полуплоскость, что гарантирует положительность величины  $\text{Re}(A_1 a, b)$ . В этой ситуации, выполняя в системе (8) замены  $\xi = \eta \sqrt{-\text{Re}(A_1 a, b)/d_0} \exp(\text{Im}(A_1 a, b)s)$ ,  $\tau = \text{Re}(A_1 a, b)s$ , получим уравнение Гинзбурга — Ландау вида

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \nu(1 - ic_1)\Delta\eta + \eta - (1 + ic_2)|\eta|^2\eta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (10)$$

где  $\nu \text{Re}(Da, b)/\text{Re}(A_1 a, b)$  снова обозначено  $\nu$ ,  $c_1 = -\text{Im}(Da, b)/(\text{Re}(A_1 a, b)\text{Re}(Da, b))$ ,  $c_2 = -c_0/d_0$ . Относительно уравнения (10) известно, что его грубым режимам соответствуют, при достаточно малых  $\varepsilon$ , грубые режимы исходной системы (6) той же устойчивости [9].

Уравнение (10) имеет однородный цикл

$$\eta = \exp(-ic_2\tau + i\alpha), \quad \alpha = \text{const}. \quad (11)$$

В точечной модели (в отсутствие диффузионного слагаемого) цикл (11) является орбитально асимптотически устойчивым. Устойчивость этого цикла для задачи (10) ( $\nu \neq 0$ ) исследуется следующим образом. Дополним (10) комплексно-сопряженной краевой задачей

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \tau} = \nu(1 + ic_1)\Delta\bar{\eta} + \bar{\eta} - (1 - ic_2)|\bar{\eta}|^2\bar{\eta}, \quad (12)$$

выполним замены

$$\eta = \exp(-ic_2t)(1 + h_1), \quad \bar{\eta} = \exp(ic_2t)(1 + h_2) \quad (13)$$

и отбросим нелинейные слагаемые, в результате приходим к системе

$$\begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial \tau} = \nu(1 - ic_1)\Delta h_1 - (1 + ic_2)(h_1 + h_2), & \frac{\partial h_1}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \\ \frac{\partial h_2}{\partial \tau} = \nu(1 + ic_1)\Delta h_2 - (1 - ic_2)(h_1 + h_2), & \frac{\partial h_2}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (14)$$

к которой, в свою очередь, может быть применен метод Фурье по системе функций  $w_k(x)$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . В результате, учитывая равенство  $\Delta w_k = \lambda_k w_k$  (см. (4)), убеждаемся, что за устойчивость однородного цикла (11) по отношению к пространственно неоднородным возмущениям начальных условий отвечает расположение спектра семейства матриц

$$-\begin{pmatrix} 1 + ic_2 & 1 + ic_2 \\ 1 - ic_2 & 1 - ic_2 \end{pmatrix} + \lambda_k \nu \begin{pmatrix} 1 - ic_1 & 0 \\ 0 & 1 + ic_1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

И наконец, анализ матриц (15) приводит к выводу, что цикл (11) устойчив (неустойчив) в рамках краевой задачи (10) при  $\nu - \nu_* > 0$  ( $< 0$ ), где

$$\nu_* = -\frac{2(c_1 c_2 - 1)}{\lambda_1(1 + c_1^2)} > 0. \quad (16)$$

Учитывая положительность параметра  $\nu$  и отрицательность величины  $\lambda_1$ , из (16) следует, что для появления диффузионной неустойчивости цикла необходимо выполнение условия

$$c_1 c_2 > 1. \quad (17)$$

Предпринятый анализ позволяет уточнить постановку задачи для численного эксперимента. Рассмотрим уравнение Гинзбурга–Ландау (10) в области  $\Omega$  (см. рис. 1). Будем считать, что недеформированная область  $\Omega$  представляет собой квадрат со стороной единица. Зафиксируем параметры  $c_1 = 0.5$ ,  $c_2 = 8$  так, что выполнено неравенство (17). В этой ситуации величина  $\lambda_1 = -\pi^2$  и, тем самым, критическое значение  $\nu$ , вычисленное по формуле (16), дает  $\nu_* = \frac{6}{\pi^2 1.25} \approx 0.4863$ . Выберем  $\nu = 2$ , заведомо превосходящим порог  $\nu_*$ , и рассмотрим процесс потери устойчивости однородного цикла при уменьшении ширины полосы, связывающей прямоугольника в  $\Omega$ .

### 3. Результаты численного счета

#### 3.1. Разностная модель для численного анализа уравнения Гинзбурга – Ландау

Для численной оценки решения краевой задачи (10) будем использовать разностные аппроксимации по пространственным переменным. Построим разностную модель, аппроксимирующую (10), для этого отнесем начало координат на плоскости изменения пространственной переменной в левый нижний угол области  $\Omega$ , затем разобьем область  $\Omega$  на прямоугольники размером не более, чем  $\delta x \times \delta y$ , где  $\delta x = A/N$ ,  $\delta y = (L + 2B)/M$ . Далее, узлами сетки будем считать точки  $(x_i, y_j)$ , с координатами  $x_i = (i - 1/2)\delta x$ ,  $y_j = (j - 1/2)\delta y$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$ ,  $j = 1, \dots, M - 1$ . Для точек  $(x_i, y_j) \in \Omega$  вместо краевой задачи (10), заменяя оператор Лапласа его разностным аналогом, выпишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\eta_{i,j}}{d\tau} = \nu(1 - ic_1) \left( \frac{\eta_{i-1,j} + \eta_{i+1,j} - 2\eta_{i,j}}{\delta x^2} + \frac{\eta_{i,j-1} + \eta_{i,j+1} - 2\eta_{i,j}}{\delta y^2} \right) + \eta_{i,j} - (1 + ic_2)|\eta_{i,j}|^2 \eta_{i,j}, \quad (18)$$

где  $(i, j) \in Ind$ , а множество индексов  $Ind$  определяется следующим образом:

$$Ind = \{(i, j) \mid i \in \{1, \dots, N - 1\}, j \in \{1, \dots, M - 1\} \text{ и } (x_i, y_j) \in \Omega\}. \quad (19)$$

Граничные условия непроницаемости моделируются стандартным образом: на внешней границе области  $\Omega$  считаем, что

$$\begin{aligned} \eta_{0,j} = \eta_{1,j}, \quad \eta_{N,j} = \eta_{N-1,j}, \quad j = 1, \dots, M - 1; \\ \eta_{i,0} = \eta_{i,1}, \quad ((x_i, y_1) \in \Omega), \quad \eta_{i,M} = \eta_{i,M-1}, \quad ((x_i, y_{M-1}) \in \Omega), \quad i = 1, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (20)$$

На границе перемычки и на границах прямоугольников, к ней примыкающих, приблизим краевые условия по аналогии с (20), учитывая с помощью линейных аппрок-

симаций тот факт, что граница проходит не посередине расстояния между узловыми точками. Получившуюся систему обыкновенных дифференциальных уравнений будем решать методами Дормана – Принса 8(5) (см. [10]).

### 3.2. Алгоритм вычисления ляпуновских экспонент и ляпуновских размерностей краевой задачи

Поведение решений системы (18) с уменьшением ширины перемычки довольно быстро усложняется, поэтому возникает потребность в вычислении некоторых инвариантных характеристик аттрактора задачи, определяющих его хаотичность. Алгоритм определения спектра ляпуновских экспонент и ляпуновской размерности базируется на известной мультипликативной эргодической теореме Оселедца [11], согласно которой для конечномерной динамической системы величина старшего ляпуновского показателя не зависит от начальной точки на аттракторе (точнее говоря, он одинаков для почти всех начальных значений по некоторой инвариантной мере). В нашем случае бесконечномерная задача (10) заменена конечномерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений (18) и их ляпуновские экспоненты могут, вообще говоря, не совпадать. В связи с этим дополнительный интерес представляет вопрос об адекватности модели (18).

Для вычисления ляпуновских экспонент системы (18) будем пользоваться методом Беннетина [12, 13] (точнее, его вариантом, изложенным в [14]). С этой целью сначала выполняется выход на аттрактор системы, он заключается в решении (18) с начальными условиями из бассейна притяжения изучаемого аттрактора на протяжении примерно тысячи периодов ( $2\pi/c_2$ ) пространственно однородного режима (11). Затем наряду с системой (18), которая дает решение на аттракторе  $\eta_{i,j}^*(t)$ , решается следующая система в вариациях:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_{i,j}}{d\tau} = \nu(1 - ic_1) & \left( \frac{\theta_{i-1,j} + \theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j}}{\delta x^2} + \frac{\theta_{i,j-1} + \theta_{i,j+1} - 2\theta_{i,j}}{\delta y^2} \right) + \\ & + \theta_{i,j} - (1 + ic_2)(2\eta_{i,j}^* \bar{\theta}_{i,j} + \bar{\eta}_{i,j}^* \theta_{i,j}), \quad (i, j) \in Ind, \end{aligned} \quad (21)$$

краевые условия для которой выбираются по тому же правилу, что и в задаче (18), (20). Система (21) решается для комплекта из  $K$  ортонормированных начальных условий на промежутке длины периода  $2\pi/c_2$ . На основе полученных  $K$  решений выполняется оценка  $K$  старших ляпуновских экспонент аттрактора системы

$$\lambda_l^{(1)} = \frac{1}{T} \ln \|\theta^{(l)}(T)\|, \quad l = 1, \dots, K, \quad (22)$$

где  $T = 2\pi/c_2$ ,  $\theta^{(l)}(T)$  обозначено  $l$ -е решение  $\theta_{i,j}^{(l)}(T)$ ,  $(i, j) \in Ind$  системы (21), под нормой  $\|\cdot\|$  понимается величина

$$\|\theta^{(l)}(T)\| = \frac{1}{\text{mes } \Omega} \sqrt{\sum_{(i,j) \in Ind} |\theta_{i,j}^{(l)}(T)|^2 \delta x \delta y}. \quad (23)$$

Отметим, что показатели  $\lambda_l$  перенумерованы в порядке убывания. Затем для решений  $\theta^{(l)}(T)$  выполняется стандартная процедура ортонормирования Грамма –

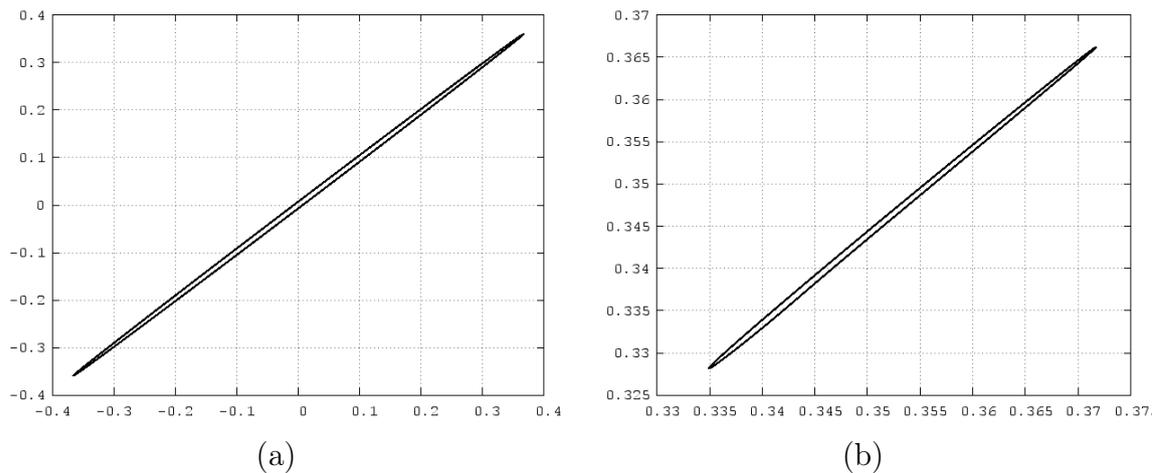


Рис. 2. Фазовый портрет системы (21): (а)  $\mu = 0.62$  — пространственно однородный цикл; (б)  $\mu = 0.61$  — пространственно неоднородный цикл

Шмидта и полученные на ее основе векторы выбираются начальными условиями системы (21). Далее, данная система снова решается на промежутке длины  $T$  и на основе полученных решений вычисляется поправка для ляпуновских экспонент. Данная процедура повторяется до тех пор, пока среднее квадратическое отклонение от среднего значения величин  $\lambda_l^{(k)}$   $k = 1, 2, \dots$  не станет мало.

Для контроля результата выбирается другой комплект из  $K$  ортонормированных начальных условий и процедура повторяется. Результат считается приемлемым, если отличие полученных оценок невелико. К сожалению, как промежуток времени, необходимый системе для выхода на аттрактор, так и продолжительность вычислений для определения ляпуновских экспонент является величиной экспериментальной и требует дополнительной проверки другими методами.

Полученные ляпуновские экспоненты позволяют оценить ляпуновскую размерность аттрактора задачи (21). Полагая, что на предыдущем шаге получены оценки  $\lambda_l$ ,  $l = 1, \dots, K$  и их величины перенумерованы в порядке убывания, введем ляпуновскую размерность по формуле (см. Каплан, Йорке [15])

$$d_L = j + \frac{1}{|\lambda_{j+1}|} \sum_{l=1}^j \lambda_l, \quad (24)$$

где целое  $j$  выбирается по следующему правилу:

$$\sum_{l=1}^j \lambda_l \geq 0, \quad \sum_{l=1}^{j+1} \lambda_l < 0.$$

### 3.3. Результаты численного эксперимента

Перейдем к описанию основных результатов статьи. Численный эксперимент для краевой задачи (10) в области  $\Omega$  выполнялся при следующих значениях параметров:

$$c_1 = 0.5, c_2 = 8, \nu = 2. \quad (25)$$

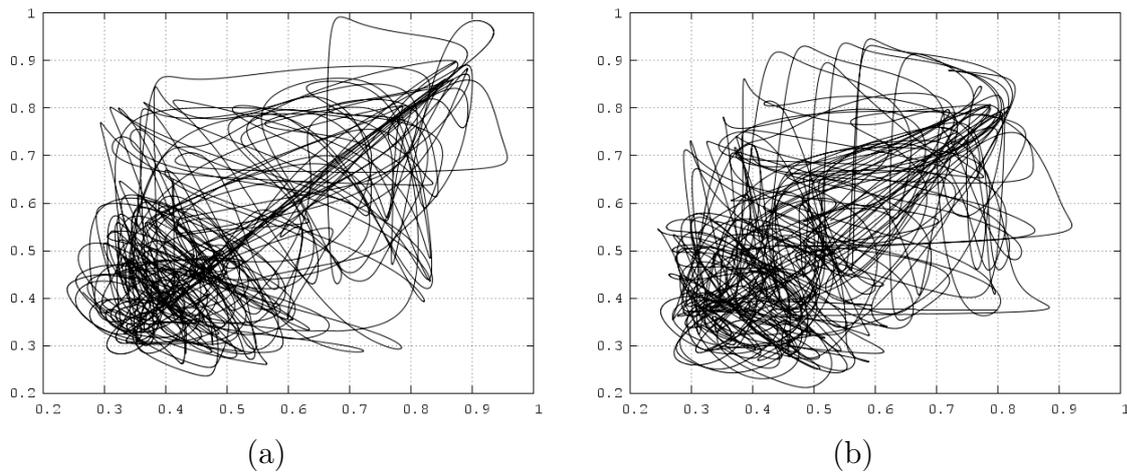


Рис. 3. Фазовые портреты решений системы (21): (a)  $\mu = 0.59$ ; (b)  $\mu = 0.56$

Размеры области  $\Omega$  предполагались следующими:  $A = 1$ ,  $B = 1/3$ , площадь перемычки при этом не меняется и равна  $LW = 1/3$ , а параметры разбиения принимались равными  $N = 200$ ,  $M = 200$ . Введем бифуркационный параметр

$$\mu = W/A. \tag{26}$$

Система (21) решалась численно при различных  $\mu$  в промежутке от 1 до 0.2. Нижняя граница  $\mu = 0.2$  выбрана из соображений сохранения точности применяемой разностной схемы. Выполненные расчеты показали, что при уменьшении  $\mu$  на промежутке от 1 до 0.62 остается устойчивым пространственно однородный цикл. Иллюстрацией этому служит рис. 2(a), на котором изображена проекция фазовой кривой устойчивого режима системы (21) на плоскость  $(\text{Re } \theta_{5,5}, \text{Re } \theta_{150,55})$ . Близость кривой к биссектрисе первого координатного угла как раз и означает, что колебания в различных точках области  $\Omega$  синхронизированы. При  $\mu \approx 0.62$  пространственно однородный цикл мягко теряет устойчивость, при этом рождается пространственно неоднородный цикл, проекция которого изображена на рис. 2(b). Кривые 2(a) и 2(b) близки друг другу, в связи с этим имеет смысл рассмотреть пространственное распределение амплитуды решения системы (21)  $|\theta_{i,j}^{(l)}(t)|$ ,  $((i, j) \in \text{Ind})$  при том же значении  $\mu$ . На рис. 9(a) хорошо видно, что получающийся в этой ситуации режим является пространственно неоднородным.

Значение  $\mu = 0.6$  является следующим критическим, поскольку при  $\mu < 0.6$  колебательные режимы, устанавливающиеся в системе (21), становятся неупорядоченными. При значениях близких к  $\mu = 0.6$  (см. рис. 3(a), 3(b), построенные для  $\mu = 0.59$  и  $\mu = 0.56$ ) колебательный режим устроен так, что на протяжении длительных промежутков времени значения в различных точках области синхронизированы, это приводит к тому, что на указанных рисунках в окрестности биссектрисы первого координатного угла наблюдается уплотнение траекторий системы.

Дальнейшее уменьшение  $\mu$  приводит к усложнению колебательных режимов (см. рис. 4, 5, 6). Степень их сложности находит свое отражение в построенных для аттрактора системы (21) графиков зависимости от  $\mu$  старшего ляпуновского показателя  $\lambda_1$  и ляпуновской размерности  $d_L$ . Нетрудно видеть (см. рис. 7, 8), что после возникновения при  $\mu < 0.6$  у системы хаотического аттрактора, величина  $\lambda_1(\mu)$  ко-

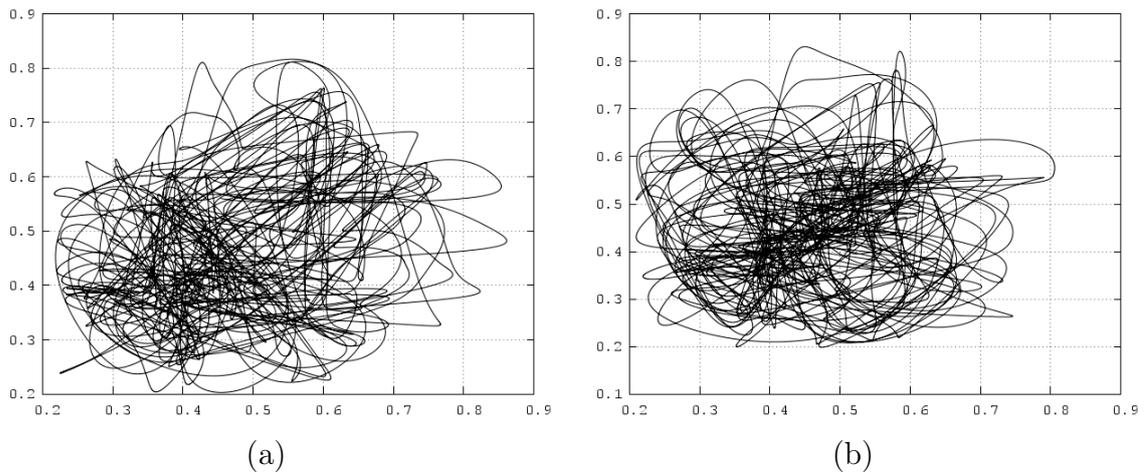


Рис. 4. Фазовые портреты решений системы (21): (a)  $\mu = 0.5$ ; (b)  $\mu = 0.45$

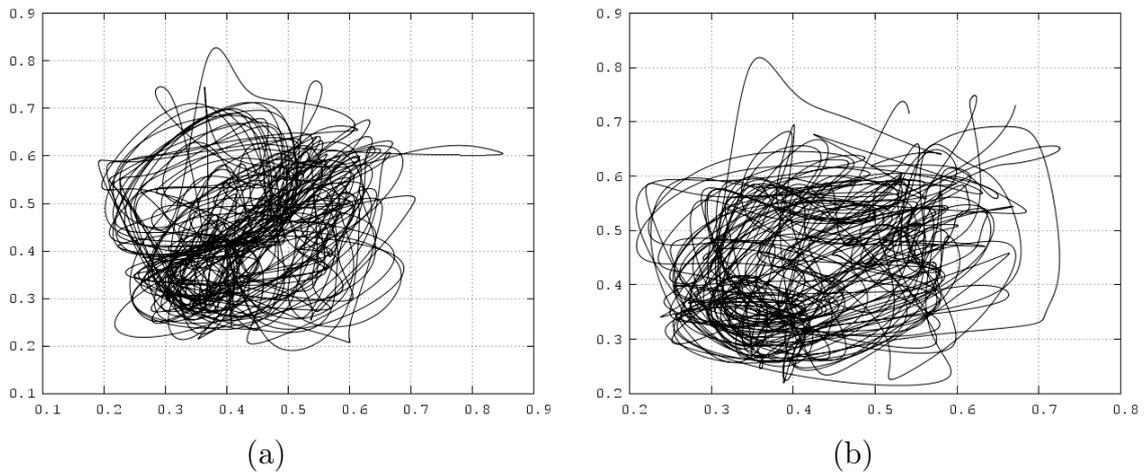


Рис. 5. Фазовые портреты решений системы (21): (a)  $\mu = 0.42$ ; (b)  $\mu = 0.38$

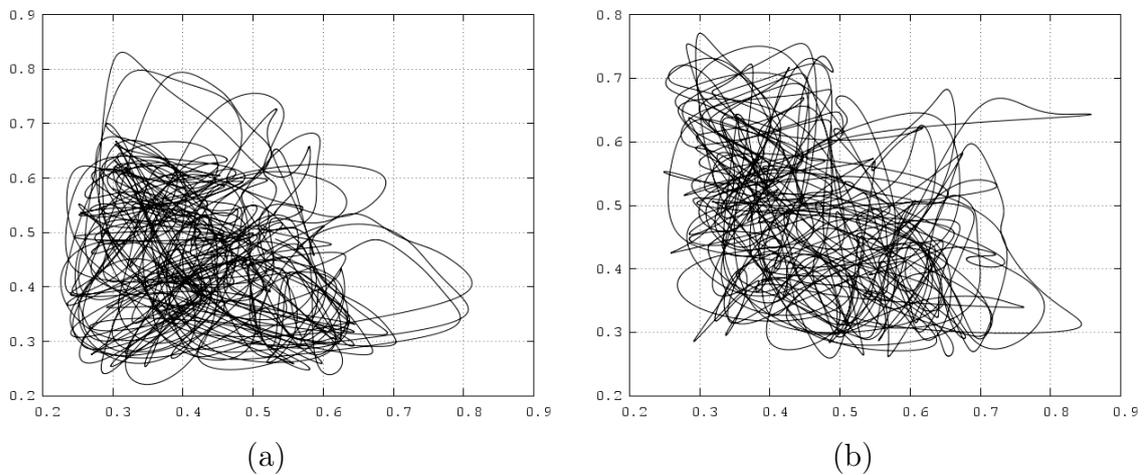


Рис. 6. Фазовые портреты решений системы (21): (a)  $\mu = 0.29$ ; (b)  $\mu = 0.22$

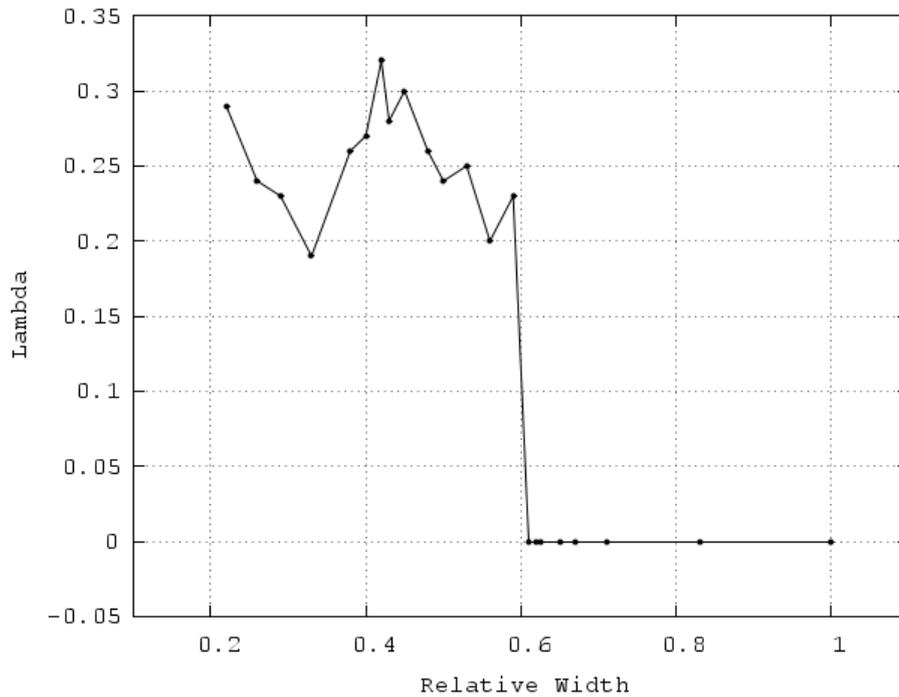


Рис. 7. График зависимости старшего ляпуновского показателя  $\lambda_1$  аттрактора системы (21) от относительной толщины перемычки  $\mu$

леблется в относительно узких пределах, а значение  $d_L(\mu)$  после промежутка от  $\mu \approx 0.6$  до  $\mu \approx 0.32$ , где оно почти не меняется, после  $\mu \approx 0.32$  растёт.

Усложнение аттрактора системы можно проиллюстрировать и с помощью графиков пространственного распределения амплитуды решения системы (21) при различных значениях относительной толщины перемычки и фиксированном  $t$ . На графиках 9 в узлах решетки области  $\Omega$  построены величины  $|\theta_{i,j}^{(l)}(t)|$ , где  $(i, j) \in Ind$ . Нетрудно видеть, что режимы, получающиеся при малых  $\mu$  (см. рис. 9(c), 9(d), построенные при  $\mu = 0.33$  и  $\mu = 0.22$  соответственно), оказываются существенно более изрезанными по сравнению с режимами, возникающими при значениях  $\mu$  близких к критическому значению, при котором теряет устойчивость пространственно однородный цикл (см. рис. 9(a), 9(b), построенные при  $\mu = 0.61$  и  $\mu = 0.59$  соответственно).

Подводя итог, следует отметить, что исследуемое уравнение Гинзбурга – Ландау (10) может обладать многомодовым хаотическим аттрактором (см. [16–18]) не только за счет уменьшения коэффициента диффузии, но и посредством изменения геометрии области определения пространственной переменной.

Авторы благодарят С. А. Каценко за привлечение внимания к данной задаче и полезное обсуждение результатов.

## Список литературы

1. Turing Alan M. The Chemical Basis of Morphogenesis // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences. V. 237. No. 641 (Aug. 14, 1952).

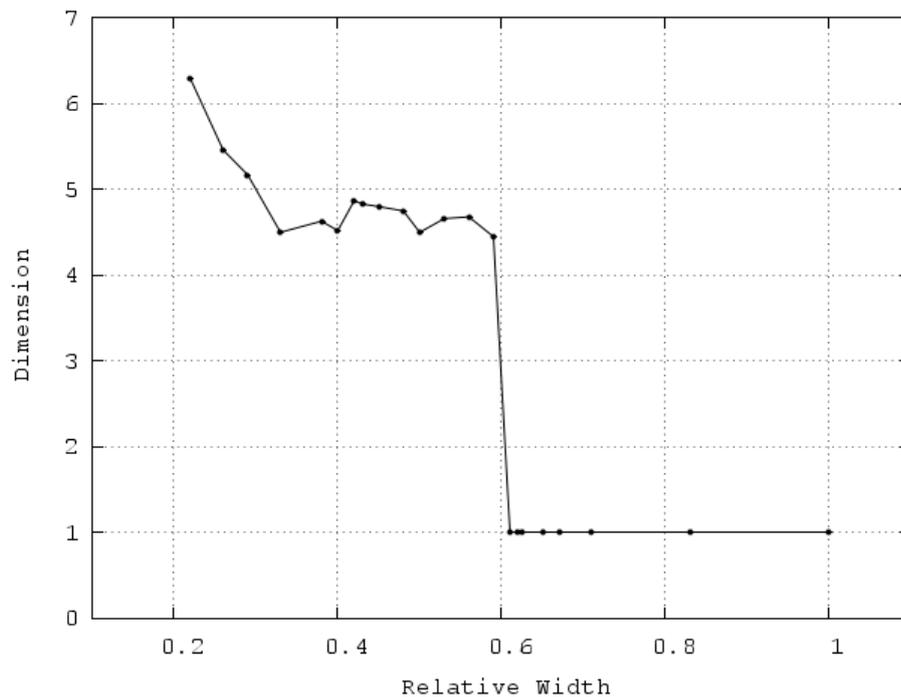
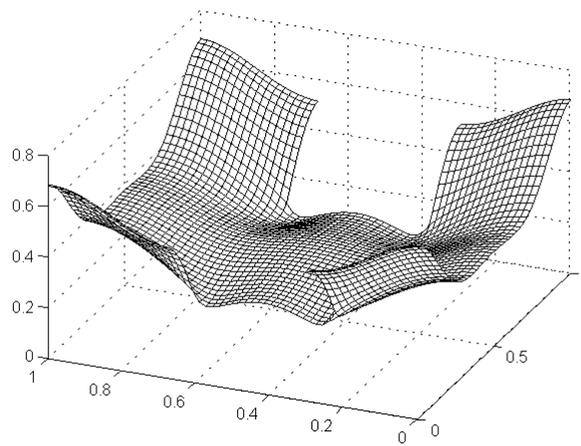


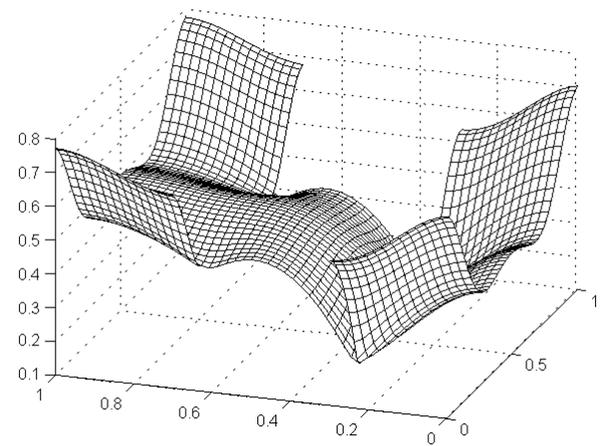
Рис. 8. График зависимости ляпуновской размерности  $d_L$  аттрактора системы (21) от относительной толщины перемычки  $\mu$

P. 37–72.

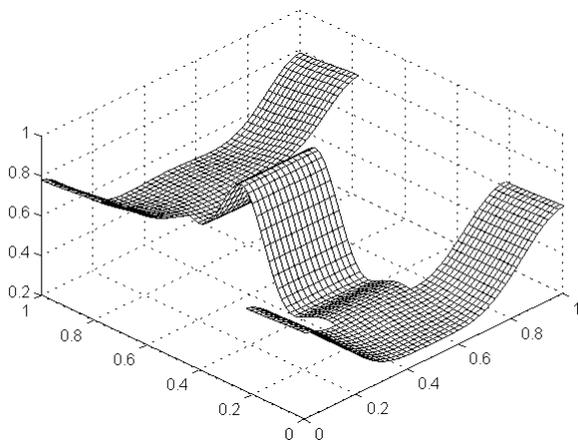
2. *Nicolis G., Prigogine I.* Self-Organization in Non-Equilibrium Systems. Wiley, 1977.
3. *Kuramoto Y.* Diffusion-Induced Chaos in Reaction Systems // Prog. Theor. Phys. Supplement. 1978. No. 64(1978). P. 346–367. DOI : 10.1143/PTPS.64.346.
4. *Arrieta J. M.* Neumann eigenvalue problems on exterior perturbations of the domain // Journal of Differential Equations. 1995. V. 118, No. 1. P. 54–103.
5. *Arrieta J. M.* Rates of Eigenvalues on a Dumbbell Domain. Simple Eigenvalue Case // Transactions of the American Mathematical Society. 1995. V. 347, No. 9 (Sep., 1995). P. 3503–3531.
6. *Arrieta J. M., Carvalho A. N., Lozada-Cruz G.* Dynamics in dumbbell domains I. Continuity of the set of equilibria // Journal of Differential Equations. 2006. V. 231, No. 2. P. 551–597.
7. *Arrieta J. M., Carvalho A. N., Lozada-Cruz G.* Dynamics in dumbbell domains II. The limiting problem // Journal of Differential Equations. 2009. V. 247, No 1. P. 174–202.
8. *Arrieta J. M., Carvalho A. N., Lozada-Cruz G.* Dynamics in dumbbell domains III. Continuity of attractors // Journal of Differential Equations. 2009. V. 247, No. 1. P. 225–259.
9. *Васильева А. Б., Кащенко С. А., Колесов Ю. С., Розов Н. Х.* Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией // Математический сборник. 1986. Т. 130(172), № 4(8). С. 488–499. (English transl.: *Vasil'eva A. B., Kashchenko S.A., Kolesov Yu.S., Rozov N.Kh.* Bifurcation of self-oscillations of nonlinear



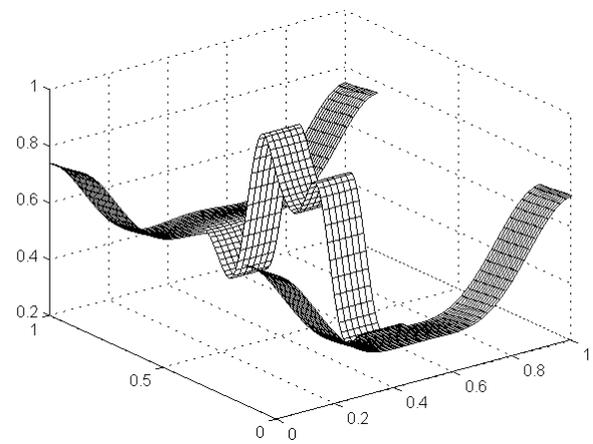
(a)



(b)



(c)



(d)

Рис. 9. Пространственное распределение амплитуды решения системы (21) при различных значениях относительной толщины перемычки и фиксированном  $t$ . (a)  $\mu = 0.61$ ; (b)  $\mu = 0.59$ ; (c)  $\mu = 0.33$ ; (d)  $\mu = 0.22$

- parabolic equations with small diffusion // Mathematics of the USSR-Sbornik, 1987. V 58:2. P. 491–503.)
10. *Dormand J.R., Prince P.J.* A Family of Embedded Runge – Kutta Formulae // J. Comp. Appl. Math. 1980. V. 6. P. 19–26.
  11. *Оседедец В.И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Тр. ММО. Т. 19. М., 1968. С. 179–210. (Oseledec V.I. A multiplicative ergodic theorem. Characteristic Ljapunov, exponents of dynamical systems // Trudy Moskov. Mat. Obs. V. 19. 1968. P. 179–210 [in Russian].)
  12. *Benettin G., Galgani L., Strelcyn J. M.* Kolmogorov entropy and numerical experiments // Phys. Rev. 1976. V. A14. P. 2338–2345.
  13. *Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A.* Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica D. 1985. V. D16. P. 285–317.
  14. *Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 2. С. 268–273. (English transl.: *Glyzin D.S., Glyzin S.D., Kolesov A. Yu., and Rozov N.Kh.* The Dynamic Renormalization Method for Finding the Maximum Lyapunov Exponent of a Chaotic Attractor // Differential Equations. 2005. V. 41. No. 2. P. 284–289.)
  15. *Frederickson P., Kaplan J., Yorke J.* The Lyapunov dimension of strange attractors // J. Different. Equat. 1983. V. 49. №2. P. 185–207.
  16. *Глызин С. Д.* Разностные аппроксимации уравнения «реакция-диффузия» на отрезке // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16, № 3. С. 96–116. (*Glyzin S. D.* Difference approximations of “reaction – diffusion” equation on a segment // Modeling and Analysis of Information Systems. 2009. V. 16, No 3. P. 96–116 [in Russian].)
  17. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Конечномерные модели диффузионного хаоса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50, № 5. С. 860–875. (English transl.: *Glyzin S.D., Kolesov A. Yu., and Rozov N.Kh.* Finite-dimensional models of diffusion chaos // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2010. V. 50. No 5. P. 816–830. DOI: 10.1134/S0965542510050076.)
  18. *Глызин С. Д.* Размерностные характеристики диффузионного хаоса // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т. 20, № 1. С. 30–51. (*Glyzin S. D.* Dimensional Characteristics of Diffusion Chaos // Modeling and Analysis of Information Systems. 2013. V. 20, No 1. P. 30–51 [in Russian].)

## Diffusion Chaos in Reaction – Diffusion Boundary Problem in the Dumbbell Domain

Glyzin S. D., Shokin P. L.

*P.G. Demidov Yaroslavl State University,  
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia*

**Keywords:** diffusion chaos, attractor, Lyapunov dimension, Ginzburg – Landau equation, bifurcation

We consider a boundary problem of reaction-diffusion type in the domain consisting of two rectangular areas connected by a bridge. The bridge width is a bifurcation parameter of the problem and is changed in such way that the measure of the domain is preserved. The conditions on chaotic oscillations emergence were studied and the dependence of invariant characteristics of the attractor on the bridge width was constructed. The diffusion parameter was chosen such that in the case of widest possible bridge (corresponding to a rectangular domain) the spatially homogeneous cycle of the problem is orbitally asymptotically stable. By decreasing the bridge width the homogeneous cycle loses stability and then the spatially inhomogeneous chaotic attractor emerges. For the obtained attractor we compute Lyapunov exponents and Lyapunov dimension and notice that the dimension grows as the parameter decreases but is bounded. We show that the dimension growth is connected with the growing complexity of stable solutions distribution with respect to the space variable.

### Сведения об авторах:

**Глызин Сергей Дмитриевич,**

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей,

**Шокин Павел Леонидович,**

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
научный сотрудник