

Piecewise Constant Regimes of Fully Coupled Networks and Their Limit Integro-differential Systems

S. D. Glyzin¹, S. A. Kashchenko¹, D. S. Kosterin¹

DOI: [10.18255/1818-1015-2025-2-206-224](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2025-2-206-224)

¹P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

MSC2020: 45J05, 34K18, 39A11

Research article

Full text in Russian

Received April 23, 2025

Revised May 12, 2025

Accepted May 14, 2025

Fully connected networks of oscillators and their limit systems of integro-differential equations with periodic boundary conditions are considered. It is assumed that the connection is weak, i. e. the coefficient at the integral term is small. In the problem of stability of the zero equilibrium state, the simplest critical cases of loss of stability are distinguished. In these situations, quasi-normal forms are constructed, which are integro-differential equations for which several continuous families of piecewise constant two-step solutions are analytically determined, and their stability is studied. The existence of piecewise constant solutions with more than one discontinuity point is shown. A numerical experiment illustrating the analytical constructions is performed.

Keywords: integro-differential systems; piecewise constant solutions; stability; cluster synchronization

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Glyzin, Sergey D.	ORCID iD: 0000-0002-6403-4061 . E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru Head of the Department of Computer Networks, Dr. Sc., Professor
Kashchenko, Sergey A.	ORCID iD: 0000-0002-4846-6040 . E-mail: kasch@uniyar.ac.ru Dr. Sc., Professor
Kosterin, Dmitry S. (corresponding author)	ORCID iD: 0009-0003-6385-8063 . E-mail: kosterin.dim@mail.ru Senior Lecturer

Funding: This work was carried out within the framework of a development programme for the Regional Scientific and Educational Mathematical Center of the Yaroslavl State University with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement on provision of subsidy from the federal budget No. 075-02-2025-1636).

For citation: S. D. Glyzin, S. A. Kashchenko, and D. S. Kosterin, "Piecewise constant modes of operation of fully coupled networks and their limit integro-differential systems", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 32, no. 2, pp. 206–224, 2025. DOI: [10.18255/1818-1015-2025-2-206-224](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2025-2-206-224).

Кусочно-постоянные режимы работы полносвязных сетей и их предельных интегро-дифференциальных систем

С. Д. Глызин¹, С. А. Кащенко¹, Д. С. Костерин¹

DOI: [10.18255/1818-1015-2025-2-206-224](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2025-2-206-224)

¹Ярославский государственный университет им.П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

УДК 517.937

Научная статья

Полный текст на русском языке

Получена 23 апреля 2025 г.

После доработки 12 мая 2025 г.

Принята к публикации 14 мая 2025 г.

Рассматриваются полносвязные сети осцилляторов и их предельные системы интегро-дифференциальных уравнений с периодическими краевыми условиями. Предполагается, что связь слабая, то есть мал коэффициент при интегральном члене. В задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия выделяются простейшие критические случаи потери устойчивости. В этих ситуациях строятся квазинормальные формы, представляющие собой интегро-дифференциальные уравнения, для которых аналитически определяются несколько континуальных семейств кусочно-постоянных двухступенчатых решений. Исследуется устойчивость этих решений. Показано существование кусочно-постоянных решений, имеющих более одной точки разрыва. Выполнен численный эксперимент, иллюстрирующий аналитические построения.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные системы; кусочно-постоянные решения; устойчивость; кластерная синхронизация

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Глызин, Сергей Дмитриевич	ORCID iD: 0000-0002-6403-4061 . E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru Заведующий кафедрой компьютерных сетей, доктор физ.-мат. наук, профессор
Кащенко, Сергей Александрович	ORCID iD: 0000-0002-4846-6040 . E-mail: kasch@uniyar.ac.ru Доктор физ.-мат. наук, профессор
Костерин, Дмитрий Сергеевич (автор для корреспонденции)	ORCID iD: 0009-0003-6385-8063 . E-mail: kosterin.dim@mail.ru Старший преподаватель

Финансирование: Работа выполнена в рамках программы развития РНОМЦ ЯрГУ им. П. Г. Демидова при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении субсидии из федерального бюджета № 075-02-2025-1636).

Для цитирования: S. D. Glyzin, S. A. Kashchenko, and D. S. Kosterin, "Piecewise constant modes of operation of fully coupled networks and their limit integro-differential systems", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 32, no. 2, pp. 206–224, 2025. DOI: [10.18255/1818-1015-2025-2-206-224](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2025-2-206-224).

1. Постановка задачи

В работе рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au + F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + D \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s)u(t, x + s)ds \quad (1)$$

с периодическим краевым условием

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (2)$$

Здесь $u(t, x) \in \mathbb{R}^n$ при каждом $t > 0$, $x \in [0, 2\pi)$, A_0 , A_1 и D_0 , D_1 — $n \times n$ -матрицы. Вектор-функции $F_2(\cdot, \cdot)$, $F_3(\cdot, \cdot, \cdot)$ линейны по каждому аргументу.

Задача (1), (2) может быть получена в качестве предельной для полносвязной системы нелинейных осцилляторов, которая в общем случае (см. [1, 2]) может быть записана в следующей форме:

$$\dot{u}_j = Au_j + F_2(u_j, u_j) + F_3(u_j, u_j, u_j) + \frac{1}{N}D \sum_{k=1}^N c_{j-k}u_k, \quad (3)$$

где $j = 1, \dots, N+1$, $u_{N+1} \equiv u_1$, $u_j \in \mathbb{R}^n$, матрицы A_0 , A_1 и D_0 , D_1 — те же, что и в (1), c_j — весовые коэффициенты.

Значения $u_j(t)$ удобно ассоциировать со значениями функции двух переменных $u(t, x)$, где x_j — равномерно распределенные на некоторой окружности точки такие, что $x_j \in (-\infty, \infty)$ и выполнено условие периодичности $u(t, x_j + 1) \equiv u(t, x_j)$.

Предположим, что количество N элементов цепочки является достаточно большим: $N \gg 1$. В этом случае разность между значениями угловых переменных $x_{j+1} - x_j$ мала и равна

$$v = \frac{2\pi}{N} \ll 1.$$

Это дает основание переменную x считать непрерывной и от системы (3) перейти (см., [1–5]) к пространственно-распределенной системе уравнений (1) относительно $u(t, x)$ с периодическим краевым условием (2). Отметим, что весовые коэффициенты c_j предполагаются равными единице.

Система интегро-дифференциальных уравнений (1), (2), дополненная начальными условиями, является однозначно разрешимой (см. [6–8]). Следует отметить, что системы вида (1), (2) используются в качестве модельных для ряда задач нелинейной оптики [9, 10] и популяционной динамики [11–13].

Будем считать, что матрица A зависит от малого положительного параметра $0 < \varepsilon \ll 1$, причем

$$A = A_0 + \varepsilon A_1.$$

Заметим, что нулевое состояние равновесия получившейся краевой задачи является асимптотически устойчивым, если все собственные значения матриц

$$A + \frac{1}{2\pi}D \int_0^{2\pi} f(s) \exp(iks)ds \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4)$$

имеют отрицательную вещественную часть.

В настоящей работе исследуется поведение в простейших критических случаях решений краевой задачи (1), (2) из некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия.

В работе будет предполагаться, что связь, определяемая матрицей D , является слабой, т. е. эта матрица представима в виде

$$D = \varepsilon D_0.$$

Рассмотрим ситуацию, когда все весовые коэффициенты в системе (3) равны единице. В этом случае $f(x) \equiv 1$. Тогда при $k \neq 0$ все матрицы вида (4) равны A . При $k = 0$ имеем матрицу $A + D$, то есть матрицу $A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon D_0$. Это означает, что устойчивость нулевого решения краевой задачи (1), (2) определяется в главном собственными числами матрицы A_0 .

Будем рассматривать следующие критические случаи:

1. Первый случай. Матрица A_0 имеет простое нулевое собственное значение, а все остальные ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части.
2. Второй случай. Матрица A_0 имеет пару чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega$ ($\omega > 0$), а все остальные ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части.

Совокупность матриц (4) имеет в этих случаях бесконечно много собственных значений на мнимой оси. Тем самым реализуется критический случай в задаче об устойчивости решения $u \equiv 0$ бесконечной размерности. Ниже будет показано, что это приводит к новым динамическим эффектам.

Методика исследования рассматриваемой задачи схожа с исследованием систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{u} = (A_0 + \varepsilon A_1)u + F_2(u, u) + F_3(u, u, u). \quad (5)$$

Приведем некоторые известные результаты, связанные с устойчивостью нулевого решения этой системы. Если матрица A_0 имеет только собственные значения с отрицательной вещественной частью, то нулевое решение системы является асимптотически устойчивым. Если для матрицы A_0 выполнено условие 1 или 2, то реализуется критический случай размерности один или размерности два в задаче об устойчивости нулевого решения.

1. Первый случай. Учитывая, что матрица A_0 имеет простое нулевое собственное значение, предположим, что $A_0 a = 0$, $A_0^* b = 0$, где A_0^* — сопряженная матрица. Удобно, кроме того, считать, что $(a, b) = 1$.

Пусть выполнено неравенство

$$\delta = (F_2(a, a), b) \neq 0,$$

тогда в некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия системы (5) существует локальное устойчивое одномерное инвариантное многообразие, на котором система (5) принимает с точностью до $O(\varepsilon)$ вид

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda \xi + \delta \xi^2, \quad (6)$$

где $\tau = \varepsilon t$, $\lambda = (A_1 a, b)$, $\delta = (F_2(a, a), b)$. Таким образом, при $\lambda, \delta \neq 0$ уравнение (6) имеет два состояния равновесия, одно из которых устойчиво, а второе — неустойчиво.

Решения (6) и (5) связаны асимптотическим равенством

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon a \xi(\tau) + \varepsilon^2 u_2 \xi^2(\tau) + \dots, \quad (7)$$

где u_2 — решение системы

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{d\xi}{d\tau} a = A_0 u_2 + \xi A_1 a + \xi^2 F_2(a, a).$$

Нормальная форма (6) выводится из условий разрешимости вышеуказанного уравнения в классе ограниченных функций.

Отметим, что при $\delta = 0$ последнее слагаемое в правой части (6) заменяется на $\delta_1 \xi^3$, где

$$\delta_1 = (F_3(a, a, a) + F_2(u_2, a) + F_2(a, u_2), b),$$

а разложение в аналогичный (7) ряд идет по степеням $\varepsilon^{1/2}$.

2. Второй случай. Здесь выполняется условие известной бифуркации Андронова–Хопфа. Предположим, что $A_0 a = i\omega a$, $A_0^* b = -i\omega b$, причем удобно считать, что $(a, b) = 1$, $(a, \bar{b}) = 0$.

Положим

$$\sigma = (F_3(a, a, \bar{a}) + F_3(a, \bar{a}, a) + F_3(a, a, \bar{a}) + F_2(u_{20}, a) + F_2(a, u_{20}) + F_2(u_{21}, \bar{a}) + F_2(\bar{a}, u_{21}), b),$$

пусть

$$\operatorname{Re} \sigma \neq 0,$$

тогда в достаточно малой и независимой от ε окрестности нулевого состояния равновесия (5) имеется двумерное устойчивое локальное инвариантное многообразие, на котором систему (5) с точностью до $O(\varepsilon)$ можно записать в виде

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda \xi + \sigma \xi |\xi|^2, \quad (8)$$

где $\tau = \varepsilon t$, $\lambda = (A_1 a, b)$.

Решения (8) и (5) связаны асимптотическим равенством

$$u = \varepsilon^{1/2} (a \xi \exp(i\omega t) + \bar{a} \bar{\xi} \exp(-i\omega t)) + \varepsilon (u_{20} |\xi|^2 + u_{21} \xi^2 \exp(2i\omega t) + \bar{u}_{21} \bar{\xi}^2 \exp(-2i\omega t)) + \dots,$$

где

$$u_{20} = -A_0^{-1} (F_2(a, \bar{a}) + F_2(\bar{a}, a)), \quad u_{21} = (2i\omega I - A_0)^{-1} F_2(a, a).$$

Отметим, что уравнение (8) интегрируется. Например, при условии $\operatorname{Re} \gamma > 0$ и $\operatorname{Re} \sigma < 0$ в (8) имеется орбитально устойчивый цикл $\xi = \xi_0 \exp(i\varphi_0 t)$, где

$$\xi_0(\tau) = ((\operatorname{Re} \lambda)(-\operatorname{Re} \sigma)^{-1})^{1/2} \exp(i\varphi_0 \tau), \quad \varphi_0 = \operatorname{Im} \gamma - \operatorname{Im} \sigma (\operatorname{Re} \lambda)(\operatorname{Re} \sigma)^{-1}.$$

Этому циклу соответствует устойчивый цикл в (5).

Уравнения (6) и (8) называют нормальными формами. Алгоритмы метода нормальных форм хорошо описаны в классических книгах [14–16] для конечномерного фазового пространства и в книгах [17–20] для бесконечномерного случая.

В настоящей работе для изучения локальной динамики краевой задачи (1), (2) в соответствующих критических случаях применен метод бесконечномерной нормализации, развитый в исследованиях [9, 10, 21, 22], построены аналоги нормальных форм, называемые квазинормальными формами (КНФ). В качестве основных результатов построены КНФ и приведены некоторые утверждения о решениях этих КНФ. В частности, показано, что они могут иметь семейства нетривиальных кусочно-непрерывных периодических решений.

2. Случай простого нулевого собственного значения. Уравнение с квадратичной нелинейностью

2.1. Построение квазинормальной формы

Здесь предполагаем, что выполнены условия случая 1. Способ построения КНФ довольно простой. Решения краевой задачи (1), (2) ищем в виде асимптотического ряда

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon \xi(\tau, x) a + \varepsilon^2 u_2 \xi^2(\tau, x) + \dots \quad (9)$$

Подставим (9) в (1). В получившемся формальном тождестве будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε . На первом шаге, собирая коэффициенты при ε^1 , получаем верное равенство $A_0 a = 0$. Собирая коэффициенты при ε^2 , приходим к краевой задаче для определения неизвестной функции $\xi(\tau, x)$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \lambda \xi + \delta \xi^2 + \gamma_0 M(\xi), \quad \xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x). \quad (10)$$

Здесь коэффициенты λ и δ те же, что и в (6), а для γ_0 имеем равенство $\gamma_0 = (Da, b)$. $M(\xi)$ обозначает среднее функции ξ на отрезке $[0, 2\pi]$, т. е.

$$M(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\tau, x) dx.$$

Отличие распределенной КНФ (10) от (6) состоит лишь в том, что в (10) присутствует линейное по ξ слагаемое $\gamma_0 M(\xi)$. Достаточно ограничиться случаем, когда $\lambda > 0$, $\delta < 0$. С помощью нормировок времени и функции ξ можно считать, что $\lambda = 1$, $\delta = -1$.

Таким образом, приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \xi - \xi^2 + \gamma M(\xi), \quad \xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x), \quad (11)$$

где γ — действительное число, пропорциональное γ_0 .

Далее рассмотрим примеры решений этой краевой задачи.

2.2. Устойчивость однородных состояний равновесия

В начале рассмотрим вопрос о существовании и устойчивости однородных состояний равновесия краевой задачи (11). Справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Краевая задача (11) имеет однородные состояния равновесия $\xi_0 = 0$ и $\xi_1 = 1 + \gamma$. Состояние равновесия ξ_0 неустойчиво. Состояние равновесия ξ_1 является асимптотически устойчивым, если $\gamma > -1/2$ и неустойчивым, если $\gamma < -1/2$.*

Доказательство. Существование таких состояний равновесия проверяется непосредственной подстановкой их в уравнение (11). Неустойчивость состояния равновесия ξ_0 очевидна и легко получается применением теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Рассмотрим вопрос об устойчивости решения ξ_1 . Пусть

$$\xi(\tau, x) = 1 + \gamma + \eta(\tau, x).$$

Подставим $\xi(\tau, x)$ в уравнение (11), отбросив слагаемые более высокого порядка малости. Получим уравнение

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = (-1 - 2\gamma)\eta + \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(\tau, x) dx.$$

Представим функцию $\eta(\tau, x)$ в виде суммы двух функций

$$\eta(\tau, x) = \eta_0(\tau, x) + \eta_1(\tau, x),$$

причем $\int_0^{2\pi} \eta_0(\tau, x) dx = 0$. Тогда получим систему из двух уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} &= (-1 - 2\gamma)\eta_0, \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} &= (-1 - 2\gamma)\eta_1 + \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta_1(\tau, x) dx.\end{aligned}$$

Проинтегрировав второе уравнение системы по x от 0 до 2π , получим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} &= (-1 - 2\gamma)\eta_0, \\ \int_0^{2\pi} \frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} dx &= (-1 - \gamma) \int_0^{2\pi} \eta_1(\tau, x) dx.\end{aligned}$$

Решения первого уравнения построенной системы стремятся к нулю при $\gamma > -1/2$, а решения второго уравнения — при $\gamma > -1$. Тем самым, решение $\xi_1 = 1 + \gamma$ краевой задачи (11) является асимптотически устойчивым при $\gamma > -1/2$ и неустойчивым при $\gamma < -1/2$. $\square$

2.3. Кусочно-постоянные решения

Рассмотрим вопрос о существовании и устойчивости неоднородных периодических по x состояний равновесия краевой задачи (11).

Пусть $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{k+1} = 2\pi$ и

$$\xi_*(x) = \{\rho_j \text{ при } x \in [\alpha_j, \alpha_{j+1}), j = 0, \dots, k\}$$

является кусочно-постоянным решением краевой задачи (11).

Определим понятие α -устойчивого кусочно-постоянного решения. Рассмотрим решения краевой задачи (11) с начальными условиями, «близкими» к $\xi_*(x)$. Для этого фиксируем достаточно малое значение $r > 0$ и рассмотрим множество начальных условий $\xi(\tau_0, x)$ вида

$$\{\xi(\tau_0, x) = \rho_j + \eta_j(x), \text{ при } x \in [\alpha_j, \alpha_{j+1}), j = 0, \dots, k, \max_x \sum_{j=1}^k |\eta_j(x)| \leq r\}.$$

Назовем решение $\xi_*(x)$ краевой задачи (11) α -устойчивым по Ляпунову, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что из условия $\max_x \sum_{j=1}^k |\eta_j(x)| < \delta$ следует неравенство $\max_x |\xi(\tau, x) - \xi_*(x)| < \varepsilon$ при всех $\tau \geq \tau_0$.

Если при этом $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \max_x |\xi(\tau, x) - \xi_*(x)| = 0$, то решение $\xi_*(x)$ будем называть асимптотически α -устойчивым.

Из указанных определений вытекает, что вопрос об α -устойчивости решения на отрезке $[0, 2\pi]$ можно условно разбить на изучение асимптотической устойчивости отдельно на каждом из промежутков $[\alpha_j, \alpha_{j+1})$. Кроме того, справедлива теорема А. М. Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Аналогично можно ввести понятие α -неустойчивости. Отметим, что из α -неустойчивости следует неустойчивость решения.

Обсудим теперь вопрос о существовании и устойчивости двухступенчатых решений краевой задачи. Справедлив следующий результат.

Теорема 2. Краевая задача (11) имеет однопараметрическое семейство кусочно-постоянных решений вида

$$\xi(\tau, x) = \begin{cases} \rho, & x \in [0, \alpha), \\ 1 - \rho, & x \in [\alpha, 2\pi), \end{cases} \quad (12)$$

где ρ — решение квадратного уравнения

$$\rho^2 - \left(1 + \frac{\gamma(\alpha - \pi)}{\pi}\right)\rho - \frac{\gamma(2\pi - \alpha)}{2\pi} = 0. \quad (13)$$

Решения этого семейства являются неустойчивыми при любых α и γ .

Доказательство. Наличие решений вида (12) проверяется непосредственной подстановкой функции $\xi(\tau, x)$ в уравнение (11).

Рассмотрим вопрос об устойчивости решений вида (12). Представим решение краевой задачи в виде

$$\xi(\tau, x) = \begin{cases} \rho + \eta_1(\tau, x), & x \in [0, \alpha), \\ 1 - \rho + \eta_2(\tau, x), & x \in [\alpha, 2\pi). \end{cases}$$

Подставив его в уравнение (11) и отбросив слагаемые более высокого порядка малости, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} &= (1 - 2\rho)\eta_1 + \frac{\gamma}{2\pi} \left(\int_0^\alpha \eta_1(\tau, x) dx + \int_\alpha^{2\pi} \eta_2(\tau, x) dx \right), \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial \tau} &= (-1 + 2\rho)\eta_2 + \frac{\gamma}{2\pi} \left(\int_0^\alpha \eta_1(\tau, x) dx + \int_\alpha^{2\pi} \eta_2(\tau, x) dx \right). \end{aligned}$$

Представим функции $\eta_1(\tau, x)$ и $\eta_2(\tau, x)$ в виде суммы двух функций

$$\eta_j(\tau, x) = \eta_{j0}(\tau, x) + \eta_{j1}(\tau, x), \quad j = 1, 2,$$

где $\int_0^\alpha \eta_{10}(\tau, x) dx = 0, \int_\alpha^{2\pi} \eta_{20}(\tau, x) dx = 0.$

Тогда получим систему четырех уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_{10}}{\partial \tau} &= (1 - 2\rho)\eta_{10}, \quad \frac{\partial \eta_{20}}{\partial \tau} = (-1 + 2\rho)\eta_{20}, \\ \frac{\partial \eta_{11}}{\partial \tau} &= (1 - 2\rho)\eta_{11} + \frac{\gamma}{2\pi} \left(\int_0^\alpha \eta_{11}(\tau, x) dx + \int_\alpha^{2\pi} \eta_{21}(\tau, x) dx \right), \\ \frac{\partial \eta_{21}}{\partial \tau} &= (-1 + 2\rho)\eta_{21} + \frac{\gamma}{2\pi} \left(\int_0^\alpha \eta_{11}(\tau, x) dx + \int_\alpha^{2\pi} \eta_{21}(\tau, x) dx \right). \end{aligned}$$

Проинтегрируем третье уравнение по x от 0 до α , а четвертое уравнение — от α до 2π . Получим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta_{10}}{\partial \tau} &= (1 - 2\rho)\eta_{10}, \quad \frac{\partial \eta_{20}}{\partial \tau} = (-1 + 2\rho)\eta_{20}, \\ \int_0^\alpha \frac{\partial \eta_{11}}{\partial \tau} dx &= \left(1 - 2\rho + \frac{\gamma\alpha}{2\pi}\right) \int_0^\alpha \eta_{11}(\tau, x) dx + \frac{\gamma\alpha}{2\pi} \int_\alpha^{2\pi} \eta_{21}(\tau, x) dx, \\ \int_0^\alpha \frac{\partial \eta_{21}}{\partial \tau} dx &= \frac{\gamma(2\pi - \alpha)}{2\pi} \int_0^\alpha \eta_{11}(\tau, x) dx + \left(\frac{-1 + 2\rho + \gamma(2\pi - \alpha)}{2\pi}\right) \int_\alpha^{2\pi} \eta_{21}(\tau, x) dx.\end{aligned}$$

Если $1 - 2\rho < 0$, то $-1 + 2\rho > 0$ и наоборот. Значит, решения этой системы не стремятся к нулю. Таким образом, решения вида (12) являются неустойчивыми. $\square$

3. Случай простого нулевого собственного значения. Уравнение с кубической нелинейностью

3.1. Построение квазинормальной формы

Более интересная ситуация может возникать в случае дополнительного вырождения, когда в (10) $\delta = 0$ и $\delta_1 \neq 0$. Рассмотрим ее при условиях $\lambda > 0$ и $\delta_1 < 0$. В этом случае роль ряда (9) играет ряд

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \xi(\tau, x) + \varepsilon u_2 \xi^2(\tau, x) + \varepsilon^{3/2} u_3 \xi^3(\tau, x) + \dots \quad (14)$$

Подставляя его в (1) и совершая стандартные действия, приходим к КНФ

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \lambda \xi + \delta_1 \xi^3 + \gamma_0 M(\xi), \quad \xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x). \quad (15)$$

Можно считать, что $\lambda = 1$, $\delta_1 = -1$. Таким образом, имеем краевую задачу

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \xi - \xi^3 + \gamma M(\xi), \quad \xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x), \quad (16)$$

где γ — действительное число, пропорциональное γ_0 .

3.2. Устойчивость однородных состояний равновесия

Как и для краевой задачи (11) рассмотрим свойства устойчивости однородных состояний равновесия.

Теорема 3. Краевая задача (16) имеет два ненулевых однородных состояния равновесия $\xi_1 = \sqrt{1 + \gamma}$ и $\xi_2 = -\sqrt{1 + \gamma}$, которые являются асимптотически устойчивыми при $\gamma > -\frac{2}{3}$ и неустойчивыми при $\gamma < -\frac{2}{3}$.

Доказательство. Существование таких решений проверяется непосредственной подстановкой ξ_1 и ξ_2 в уравнение (16).

Рассмотрим вопрос об устойчивости этих решений. Пусть

$$\xi(\tau, x) = \pm \sqrt{1 + \gamma} + \eta(\tau, x).$$

Аналогично предыдущему случаю построим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} &= (-2 - 3\gamma)\eta_0, \\ \int_0^{2\pi} \frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} dx &= (-2 - 2\gamma) \int_0^{2\pi} \eta_1(\tau, x) dx.\end{aligned}$$

Решения второго уравнения стремятся к нулю при $\gamma > -1$, решения первого — при $\gamma > -\frac{2}{3}$. Таким образом, состояния равновесия ξ_1 и ξ_2 являются асимптотически устойчивыми при $\gamma > -\frac{2}{3}$. $\square$

3.3. Кусочно-постоянные решения

Наконец, рассмотрим вопрос о двухступенчатых кусочно-постоянных решениях.

Теорема 4. Краевая задача (16) имеет семейство кусочно-постоянных решений вида

$$\xi(\tau, x) = \begin{cases} \rho_1, & x \in [0, \alpha), \\ \rho_2, & x \in [\alpha, 2\pi), \end{cases} \quad (17)$$

где ρ_1, ρ_2, α — решение алгебраической системы

$$\rho_j - \rho_j^3 + \frac{\gamma}{2\pi} [\rho_1 \alpha + (2\pi - \alpha) \rho_2] = 0, \quad j = 1, 2. \quad (18)$$

Решение такого вида является устойчивым, если

$$\rho_j^2 > \frac{1}{3}, \quad j = 1, 2, \quad (19)$$

$$2 - 3(\rho_1^2 + \rho_2^2) + \gamma < 0, \quad (20)$$

$$(1 - 3\rho_1^2)(1 - 3\rho_2^2) + \gamma - 3 \left[\rho_1^2 \gamma + \frac{\gamma \alpha}{2\pi} (\rho_2^2 - \rho_1^2) \right] > 0. \quad (21)$$

Доказательство. Система уравнений (18) получается при подстановке функции (17) в уравнение (16).

Рассмотрим вопрос об устойчивости решений вида (17). Пусть

$$\xi(\tau, x) = \begin{cases} \rho_1 + \eta_1(\tau, x), & x \in [0, \alpha), \\ \rho_2 + \eta_2(\tau, x), & x \in [\alpha, 2\pi). \end{cases}$$

Аналогично предыдущему случаю построим линейную систему дифференциальных уравнений.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta_{10}}{\partial \tau} &= (1 - 3\rho_1^2)\eta_{10}, \quad \frac{\partial \eta_{20}}{\partial \tau} = (1 - 3\rho_2^2)\eta_{20}, \\ \int_0^\alpha \frac{\partial \eta_{11}}{\partial \tau} dx &= \left(1 - 3\rho_1^2 + \frac{\gamma \alpha}{2\pi}\right) \int_0^\alpha \eta_{11}(\tau, x) dx + \frac{\gamma \alpha}{2\pi} \int_\alpha^{2\pi} \eta_{21}(\tau, x) dx, \\ \int_0^\alpha \frac{\partial \eta_{21}}{\partial \tau} dx &= \frac{\gamma(2\pi - \alpha)}{2\pi} \int_0^\alpha \eta_{11}(\tau, x) dx + \left(1 - 3\rho_2^2 + \frac{\gamma(2\pi - \alpha)}{2\pi}\right) \int_\alpha^{2\pi} \eta_{21}(\tau, x) dx.\end{aligned}$$

Решения первых двух уравнений стремятся к нулю, если выполнено условие (19). Третье и четвертое уравнение образуют линейную систему двух дифференциальных уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 - 3\rho_1^2 + \frac{\gamma\alpha}{2\pi} & \frac{\gamma\alpha}{2\pi} \\ \frac{\gamma(2\pi-\alpha)}{2\pi} & 1 - 3\rho_2^2 + \frac{\gamma(2\pi-\alpha)}{2\pi} \end{pmatrix}.$$

Решение этой системы стремятся к нулю, если оба собственных значения указанной матрицы имеют отрицательную вещественную часть, что, согласно критерию Рауса–Гурвица, будет выполнено в случае, когда след матрицы отрицателен, а определитель положителен. Вычисляя след и определитель, получаем условия (20) и (21) соответственно. $\square$

3.4. Алгоритм построения кусочно-постоянных решений

Для построения решений вида (17) введем параметр c такой, что уравнение

$$\rho - \rho^3 = c$$

имеет хотя бы два вещественных корня ρ_1 и ρ_2 . Тогда из системы (18) получаем

$$\frac{\gamma}{2\pi} [\rho_1\alpha + (2\pi - \alpha)\rho_2] = -c,$$

из чего получаем формулу для вычисления α как функции от c

$$\alpha = \frac{2\pi}{\rho_2 - \rho_1} \left[\frac{c}{\gamma} + \rho_2 \right]. \quad (22)$$

На рисунке 1 показаны графики зависимости α от c . На более жирной кривой находятся те значения α , при которых решение вида (17) является асимптотически устойчивым.

Отметим, что зависимость α от c является симметричной относительно начала координат. Чтобы убедиться в этом, достаточно поменять знаки ρ_1 и ρ_2 на противоположные.

Вычисления показали, что увеличение параметра γ приводит к сужению интервала значений параметра c , на котором решения вида (17) устойчивы и расширению интервалов неустойчивости (см. рис. 1, на котором слева изображена кривая $\alpha(c)$ при $\gamma = -0.5$, а справа — при $\gamma = 1.5$).

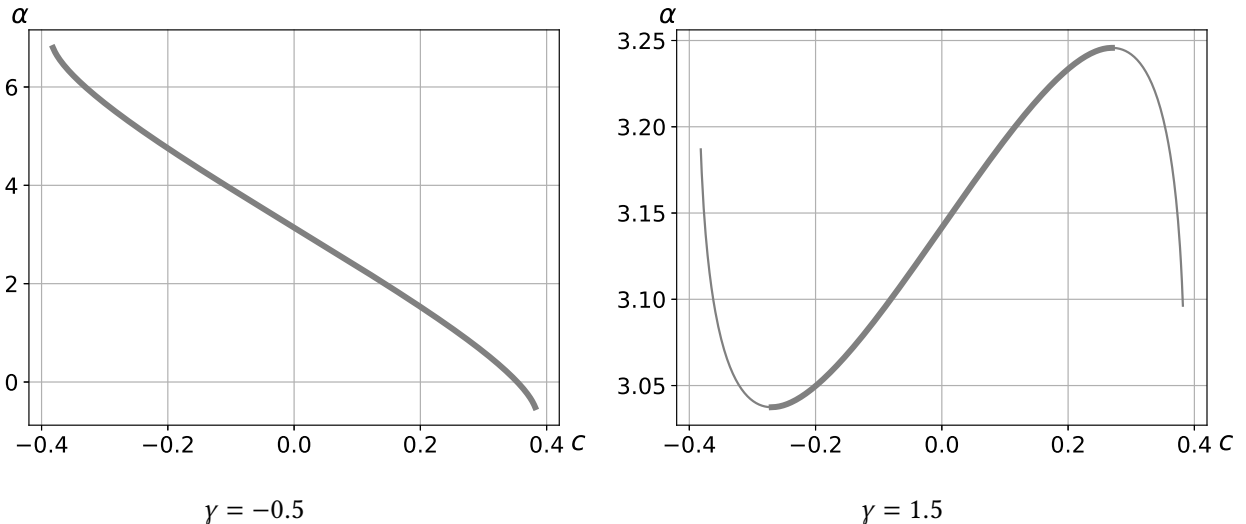


Fig. 1. The dependence of α on c when $\gamma = -0.5$ and $\gamma = 1.5$

Рис. 1. Зависимость α от c при $\gamma = -0.5$ и $\gamma = 1.5$

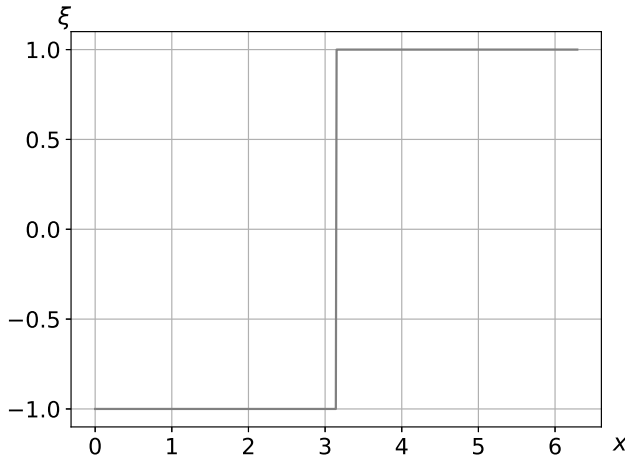

 $\gamma = -0.5$

Fig. 2. Piecewise constant solution of the boundary value problem (16) for $\gamma = -0.5$ and $\gamma = 1.5$

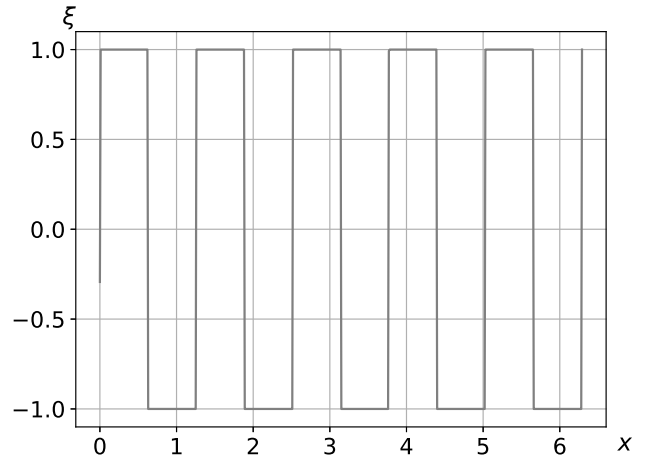

 $\gamma = 1.5$

Рис. 2. Кусочно-постоянное решение краевой задачи (16) при $\gamma = -0.5$ и $\gamma = 1.5$

На рисунке 2 представлены полученные численно графики распределения по пространственной переменной устойчивых кусочно-постоянных решений, к которым сходятся решения краевой задачи (16). Графики построены при тех же значениях параметра γ , что и выше. На левом графике двухступенчатое кусочно-постоянное решение устойчиво, а на правом — неустойчиво и решение задачи (16) сходится к кусочно-постоянному режиму с большим числом ступенек.

Для построенных в разделах 2, 3 устойчивых кусочно-постоянных решений выполнено следующее утверждение о соответствии (см. [21, 22]).

Теорема 5. Пусть краевая задача (10) (соответственно (15)) имеет асимптотически устойчивое кусочно-постоянное решение, тогда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ краевая задача (1), (2) имеет устойчивое решение с асимптотикой (9) (соответственно (14)).

4. Случай пары чисто мнимых собственных чисел

В этом разделе предполагаем, что выполнены условия случая 2, когда матрица A_0 имеет пару чисто мнимых собственных значений. Решение краевой задачи (1), (2) ищем в виде следующего асимптотического ряда:

$$\begin{aligned} u(t, x, \varepsilon) = & \varepsilon^{1/2} (a\xi(\tau, x) \exp(i\omega t) + \bar{a}\bar{\xi}(\tau, x) \exp(-i\omega t)) + \varepsilon (u_{20}|\xi(\tau, x)|^2 + \\ & + u_{21}\xi^2(\tau, x) \exp(2i\omega t) + \bar{u}_{21}\bar{\xi}^2(\tau, x) \exp(-2i\omega t)) + \dots \end{aligned} \quad (23)$$

Подставляя (23) в (1) и приравнивая коэффициенты при степенях $\sqrt{\varepsilon}$, на третьем шаге алгоритма получаем КНФ вида

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \lambda \xi + \sigma \xi |\xi|^2 + \gamma M(\xi), \quad \xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x), \quad (24)$$

где λ и σ те же, что и в (8) и, как и ранее, $\gamma = (Da, b)$.

Для КНФ выполнено следующее основное утверждение.

Теорема 6. Пусть краевая задача (24) имеет асимптотически устойчивое состояние равновесия или орбитально асимптотически устойчивый цикл, тогда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ ему соответствует устойчивое решение краевой задачи (1), (2) с асимптотикой (23).

На доказательстве данного утверждения не останавливаемся, отсылая читателей к исследованиям [21, 22], в которых доказываются теоремы о соответствии, аналогичные данной.

Предположим, что $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $\operatorname{Re} \sigma < 0$. С помощью нормировок можно сделать так, что $\operatorname{Re} \lambda = 1$, $\operatorname{Re} \sigma = -1$, то есть $\lambda = 1 + i\lambda_0$, $\sigma = -1 + i\sigma_0$, коэффициент при $M(\xi)$ после замен обозначим снова $\gamma = \gamma_0 + i\gamma_1$.

4.1. Однородные по пространственной переменной решения

Нетрудно убедиться, что краевая задача (24) имеет пространственно однородный цикл вида

$$\xi(\tau, x) = \sqrt{1 + \gamma_0} \exp(i((\lambda_0 + \sigma_0(1 + \gamma_0) + \gamma_1)\tau + c)), \quad (25)$$

где c — произвольная действительная константа.

Рассмотрим вопрос об устойчивости этого решения. Положим

$$\xi(\tau, x) = \sqrt{1 + \gamma_0} \exp(i((\lambda_0 + \sigma_0(1 + \gamma_0) + \gamma_1)\tau + c))(1 + \eta(\tau, x)),$$

и подставим это представление в уравнение (24). Для переменной $\eta(\tau, x)$ выделим линейную часть

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = (-1 - 2\gamma_0 + i\sigma_0(1 + \gamma_0) - i\gamma_1)\eta + (-1 + i\sigma_0)(1 + \gamma_0)\bar{\eta} + \frac{\gamma_0 + i\gamma_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(\tau, x) dx, \quad (26)$$

вместе с которой будем рассматривать комплексно сопряженное к нему уравнение для $\bar{\eta}(\tau, x)$. Представим теперь $\eta(\tau, x)$ в виде суммы двух функций

$$\eta(\tau, x) = \eta_0(\tau, x) + \eta_1(\tau, x)$$

так, что $\int_0^{2\pi} \eta_0(\tau, x) dx = 0$. Тогда уравнение (26) превращается в систему из двух уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} &= (-1 - 2\gamma_0 + i\sigma_0(1 + \gamma_0) - i\gamma_1)\eta_0 + (-1 + i\sigma_0)(1 + \gamma_0)\bar{\eta}_0, \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} &= (-1 - 2\gamma_0 + i\sigma_0(1 + \gamma_0) - i\gamma_1)\eta_1 + (-1 + i\sigma_0)(1 + \gamma_0)\bar{\eta}_1 + \frac{\gamma_0 + i\gamma_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta_1(\tau, x) dx, \end{aligned}$$

которую также будем рассматривать совместно с системой сопряженных уравнений для $\bar{\eta}_0$, $\bar{\eta}_1$. Интегрируя уравнения для η_1 и $\bar{\eta}_1$, получаем итоговую линейную систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} &= (-1 - 2\gamma_0 + i\sigma_0(1 + \gamma_0) - i\gamma_1)\eta_0 + (-1 + i\sigma_0)(1 + \gamma_0)\bar{\eta}_0, \\ \frac{\partial \bar{\eta}_0}{\partial \tau} &= (-1 - i\sigma_0)(1 + \gamma_0)\eta_0 + (-1 - 2\gamma_0 - i\sigma_0(1 + \gamma_0) + i\gamma_1)\bar{\eta}_0, \\ \int_0^{2\pi} \frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} dx &= (-1 - \gamma_0 + i\sigma_0(1 + \gamma_0)) \int_0^{2\pi} \eta_1 dx + (-1 + i\sigma_0)(1 + \gamma_0) \int_0^{2\pi} \bar{\eta}_1 dx, \\ \int_0^{2\pi} \frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial \tau} dx &= (-1 - i\sigma_0)(1 + \gamma_0) \int_0^{2\pi} \eta_1 dx + (-1 - \gamma_0 - i\sigma_0(1 + \gamma_0)) \int_0^{2\pi} \bar{\eta}_1 dx. \end{aligned}$$

Она распадается на две независимые двумерные части. Решения первых двух уравнений стремятся к нулю, если собственные числа матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 - 2\gamma_0 + i(\sigma_0(1 + \gamma_0) - \gamma_1) & (-1 + i\sigma_0)(1 + \gamma_0) \\ (-1 - i\sigma_0)(1 + \gamma_0) & -1 - 2\gamma_0 - i(\sigma_0(1 + \gamma_0) - \gamma_1) \end{pmatrix}$$

имеют отрицательные вещественные части. Характеристическое уравнение этой матрицы имеет вид

$$\mu^2 + (2 + 4\gamma_0)\mu + \gamma_0(2 + 3\gamma_0) + \gamma_1(\gamma_1 - 2\sigma_0(1 + \gamma_0)) = 0,$$

и его решения имеют отрицательную вещественную часть, если коэффициенты при μ и μ^0 положительны. Таким образом, условием стремления к нулю решений первой пары уравнений линейаризованной системы является выполнение неравенств

$$\gamma_0 > -\frac{1}{2}, \quad \sigma_0\gamma_1 < \frac{\gamma_0(2 + 3\gamma_0) + \gamma_1^2}{2(1 + \gamma_0)}. \quad (27)$$

В свою очередь, поведение решений третьего и четвертого уравнений определяются собственными числами матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 - \gamma_0 + i\sigma_0(1 + \gamma_0) & (-1 + i\sigma_0)(1 + \gamma_0) \\ (-1 - i\sigma_0)(1 + \gamma_0) & -1 - \gamma_0 - i\sigma_0(1 + \gamma_0) \end{pmatrix},$$

характеристическое уравнение которой имеет вид

$$\mu^2 + 2(1 + \gamma_0)\mu = 0.$$

Это уравнение имеет одно нулевое и одно отрицательное вещественное решения.

Заметим, что наличие нулевого собственного числа не является критическим в задаче об устойчивости, поскольку оно соответствует единичному мультипликатору матрицы монодромии линейной системы в окрестности периодического решения. Отрицательные собственные числа, в свою очередь, соответствуют мультипликаторам, модули которых меньше единицы. Приведенные рассуждения позволяют сформулировать теорему об устойчивости пространственно однородного цикла (25).

Теорема 7. Пусть $\gamma_0 > -1$, тогда краевая задача (24) имеет пространственно однородный цикл (25), который орбитально асимптотически устойчив при выполнении неравенств (27) и неустойчив при нарушении любого из них.

Отметим, что при вещественном γ , то есть при $\gamma_1 = 0$ условие устойчивости однородного цикла существенно упрощается и неравенства (27) превращаются в условие $\gamma_0 > 0$.

В следующем разделе рассмотрим кусочно-постоянные по пространственной переменной решения, которые могут оказаться устойчивыми в случае, если цикл (25) неустойчив или не существует.

4.2. Кусочно-постоянные по пространственной переменной решения

Будем искать кусочно-постоянное решение краевой задачи (24) в виде

$$\xi(t, x) = \rho(x)e^{i\omega\tau}, \quad (28)$$

где

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1 e^{i\varphi_1}, & x \in [0, \alpha), \\ \rho_2 e^{i\varphi_2}, & x \in [\alpha, 2\pi). \end{cases}$$

С помощью нормировок и переобозначений можно сделать так, что $\varphi_1 = 0$. Будем считать в этом случае $\varphi_2 = \varphi$.

Подставляя $\xi(\tau, x)$ в уравнение (24) и выделяя вещественную и мнимую части, получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \rho_1 - \rho_1^3 &= -\frac{\gamma_0}{2\pi} [\alpha \rho_1 + (2\pi - \alpha) \rho_2 \cos \varphi] + \frac{\gamma_1}{2\pi} (2\pi - \alpha) \rho_2 \sin \varphi, \\ -\omega \rho_1 + \lambda_0 \rho_1 + \sigma_0 \rho_1^3 &= -\frac{\gamma_0}{2\pi} (2\pi - \alpha) \rho_2 \sin \varphi - \frac{\gamma_1}{2\pi} [\alpha \rho_1 + (2\pi - \alpha) \rho_2 \cos \varphi], \\ \rho_2 - \rho_2^3 &= -\frac{\gamma_0}{2\pi} [\alpha \rho_1 \cos \varphi + (2\pi - \alpha) \rho_2] - \frac{\gamma_1}{2\pi} \alpha \rho_1 \sin \varphi, \\ -\omega \rho_2 + \lambda_0 \rho_2 + \sigma_0 \rho_2^3 &= \frac{\gamma_0}{2\pi} \alpha \rho_1 \sin \varphi - \frac{\gamma_1}{2\pi} [\alpha \rho_1 \cos \varphi + (2\pi - \alpha) \rho_2]. \end{aligned} \quad (29)$$

Выразим ρ_1^3 и ρ_2^3 из первого и третьего уравнения системы (29) и подставим во второе и четвертое уравнения. Получим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \left(-\omega + \lambda_0 + \sigma_0 + \frac{\alpha}{2\pi} (\sigma_0 \gamma_0 + \gamma_1) \right) \rho_1 + \frac{2\pi - \alpha}{2\pi} (\gamma_0 (\sigma_0 \cos \varphi + \sin \varphi) + \gamma_1 (\cos \varphi - \sigma_0 \sin \varphi)) \rho_2 &= 0, \\ \frac{\alpha}{2\pi} (\gamma_0 (\sigma_0 \cos \varphi - \sin \varphi) + \gamma_1 (\sigma_0 \sin \varphi + \cos \varphi)) \rho_1 + \left(-\omega + \lambda_0 + \sigma_0 + \frac{2\pi - \alpha}{2\pi} (\sigma_0 \gamma_0 + \gamma_1) \right) \rho_2 &= 0 \end{aligned}$$

относительно ρ_1 и ρ_2 . Эта система имеет ненулевое решение только, если ω является собственным числом матрицы

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 + \sigma_0 + \frac{\alpha}{2\pi} (\sigma_0 \gamma_0 + \gamma_1) & \frac{2\pi - \alpha}{2\pi} (\gamma_0 (\sigma_0 \cos \varphi + \sin \varphi) + \gamma_1 (\cos \varphi - \sigma_0 \sin \varphi)) \\ \frac{\alpha}{2\pi} (\gamma_0 (\sigma_0 \cos \varphi - \sin \varphi) + \gamma_1 (\sigma_0 \sin \varphi + \cos \varphi)) & \lambda_0 + \sigma_0 + \frac{2\pi - \alpha}{2\pi} (\sigma_0 \gamma_0 + \gamma_1) \end{pmatrix}.$$

В этом случае рассматриваемая система имеет семейство решений вида $\rho_1 = c \rho_2$, где

$$c = -\frac{2\pi - \alpha}{2\pi} \frac{\gamma_0 (\sigma_0 \cos \varphi + \sin \varphi) + \gamma_1 (\cos \varphi - \sigma_0 \sin \varphi)}{-\omega + \lambda_0 + \sigma_0 + \sigma_0 + \frac{\alpha}{2\pi} (\sigma_0 \gamma_0 + \gamma_1)}.$$

Подставляя $\rho_1 = c \rho_2$ в третье уравнение системы (29), определим ρ_2 :

$$\rho_2 = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi} (\gamma_0 \cos \varphi + \gamma_1 \sin \varphi) c + 1 + \frac{\gamma_0 (2\pi - \alpha)}{2\pi}}.$$

Наконец, подставив все полученные выражения в первое уравнение системы (29), можно при заданном значении φ определить величину α , а вслед за ней ρ_1 , ρ_2 и ω .

На рисунке 3 представлены значения α , ρ_1 , ρ_2 , ω при изменении φ от 0 до 2π . Параметры задачи зафиксированы следующим образом: $\lambda_0 = 1$, $\sigma_0 = 1$; величина γ выбрана вещественной, то есть $\gamma_1 = 0$, а вещественная часть этого параметра взята такой, что однородный цикл задачи неустойчив ($\gamma_0 = -1$). Следует отметить, что изменение этих параметров в довольно широких пределах показало близость общего вида графиков 3. Анализ представленных зависимостей показывает, что имеются промежутки значений φ , при которых решение системы (29) не существует.

Вместе с тем, исследование устойчивости решений вида (28) на промежутках изменения φ , на которых такие решения существуют, оказалось технически достаточно сложной задачей, поэтому в рамках данной работы остановимся только на результатах численного эксперимента.

На рисунках 4, 5 показаны графики зависимости вещественных частей решений $\xi(\tau, x)$ от x в начальный момент времени ($\text{Re}(\xi(0, x))$) и построенные численно в момент времени $\tau = 100$ ($\text{Re}(\xi(100, x))$). При этом в качестве начальных условий $\xi(0, x)$ для краевой задачи (24) брались

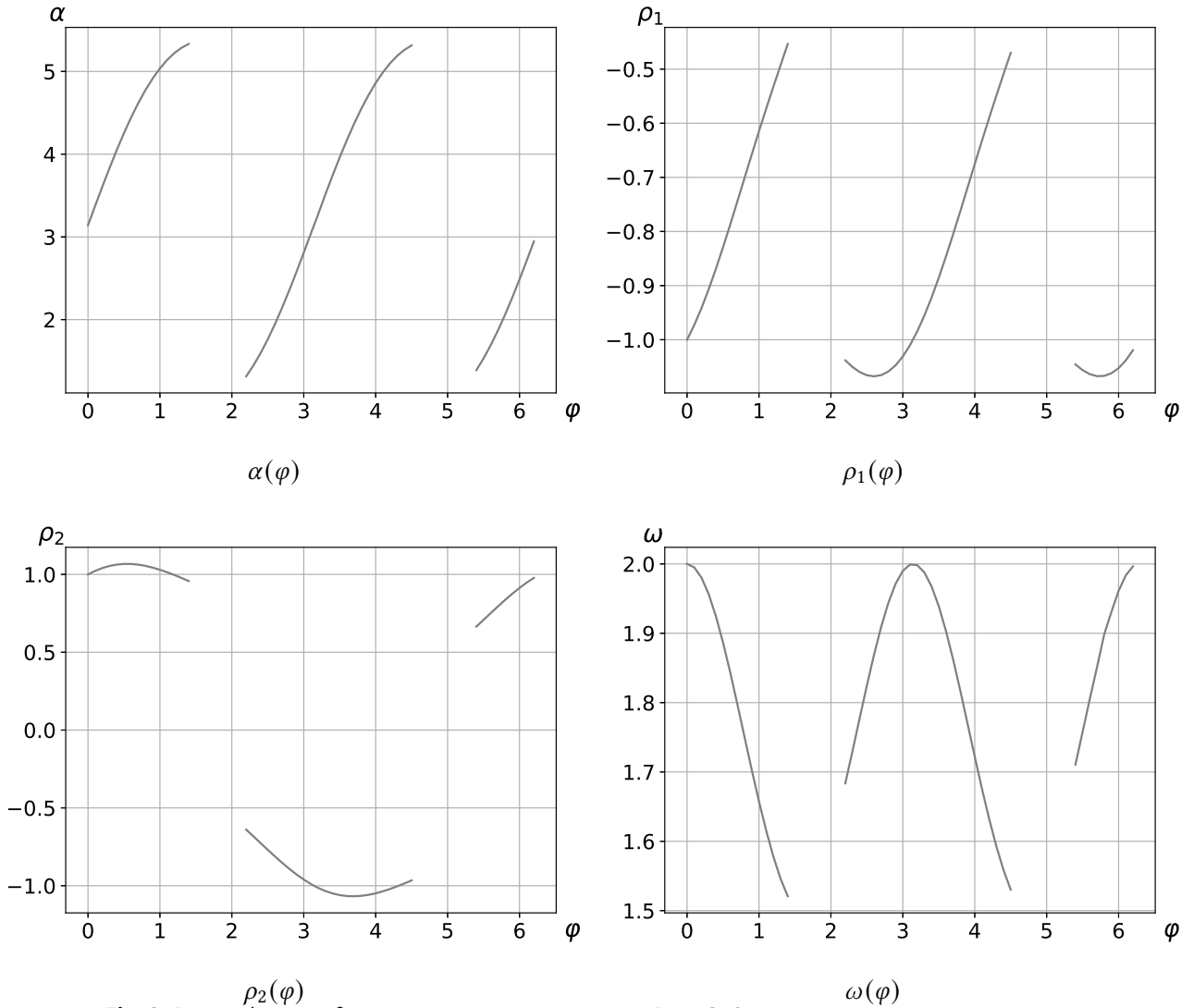

 Fig. 3. Dependences of α , ρ_1 , ρ_2 , ω on φ

 Рис. 3. Зависимости величин α , ρ_1 , ρ_2 , ω от φ

функции (28) с параметрами, вычисленными по изложенной схеме и с добавкой достаточно малого возмущения.

Начальной функцией решения, изображенного на рисунке 4, является функция (28) при $\varphi = 0$. В этом случае $\rho_1 = -1$, $\rho_2 = 1$, $\omega = 2$, а разрыв находится в точке $\alpha = \pi$. Нетрудно видеть, что функция $\text{Re}(\xi(\tau, x))$ имеет при всех τ одну точку разрыва, совпадающую с точкой разрыва начального условия, что говорит об устойчивости такого решения.

Начальная функция для примера, изображенного на рисунке 5, вычислена для $\varphi = 1$. В этом случае разрыв находится в точке $\alpha \approx 5.03$. Расчеты показали, что решение, соответствующее этому условию, неустойчиво, и приближается к кусочно-постоянному решению с другими точками разрыва, причем их количество существенно увеличилось.

Функция, к которой сходится решение, приведенное на рисунке 5, тем не менее, является периодической по τ . Для того, чтобы численно проиллюстрировать это, зафиксируем две точки x_1 и x_2 из отрезка $[0, 2\pi]$ и построим по решению $\xi(\tau, x)$ параметрическую по τ кривую $(\text{Re}(\xi(\tau, x_1)), \text{Re}(\xi(\tau, x_2)))$. На рисунке 6 представлена такая кривая при $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.6$. Нетрудно видеть, что она

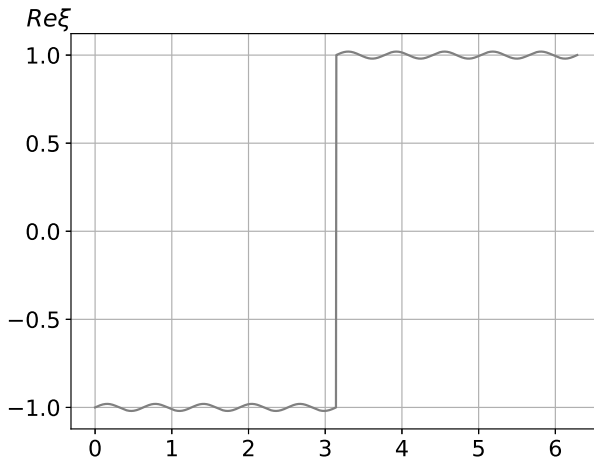


Fig. 4. Spatial distribution of the function $\text{Re}(\xi(t, x))$ at $\varphi = 0$

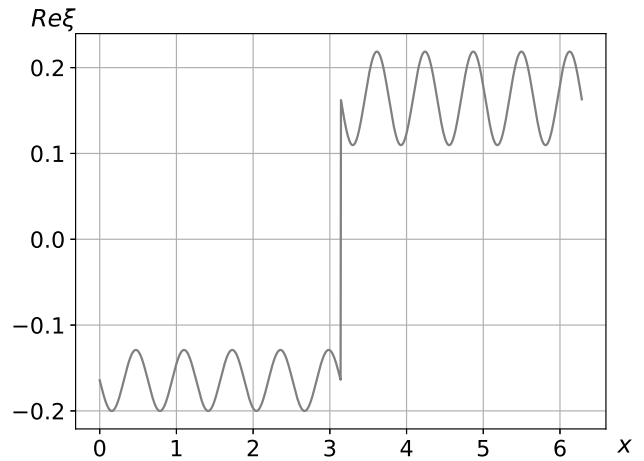


Рис. 4. Пространственное распределение функции $\text{Re}(\xi(t, x))$ при $\varphi = 0$

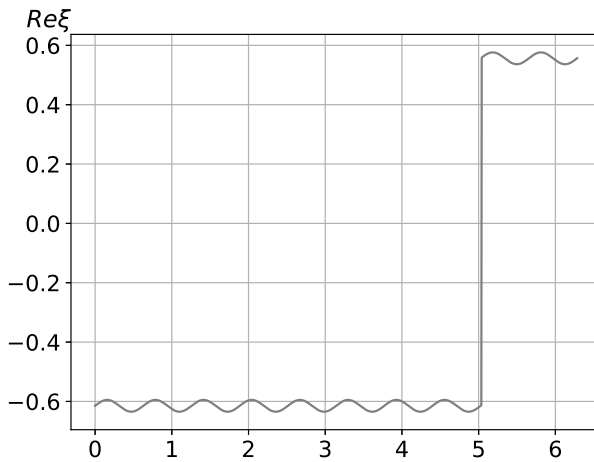


Fig. 5. Spatial distribution of the function $\text{Re}(\xi(t, x))$ for $\varphi = 1$

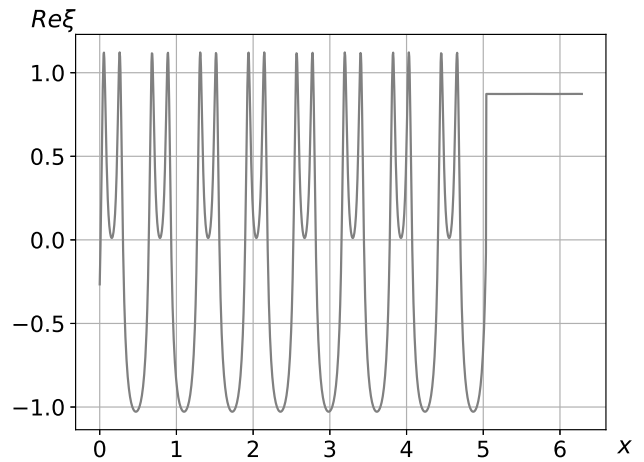


Рис. 5. Пространственное распределение функции $\text{Re}(\xi(t, x))$ при $\varphi = 1$

асимптотически приближается к замкнутой кривой. Это позволяет утверждать, что в пределах точности вычислений решение $\xi(\tau, x)$ близко к периодической по переменной τ функции.

5. Заключение

Подводя итог работы, отметим основные результаты. Интегро-дифференциальная система уравнений с периодическими краевыми условиями была исследована в простейших критических случаях, когда в задаче об устойчивости нулевого решения реализуется в одной ситуации нулевое, а в другой — пара чисто мнимых собственных чисел. В каждом из этих случаев удается построить квазинормальную форму, представляющую собой одно интегро-дифференциальное уравнение (вещественное или комплексное). Для полученных уравнений найдены условия существования континуальных семейств кусочно-постоянных двухступенчатых решений. Отдельной задачей оказалось исследование устойчивости этих решений. Отметим, что в случае, когда эти решения неустойчивы

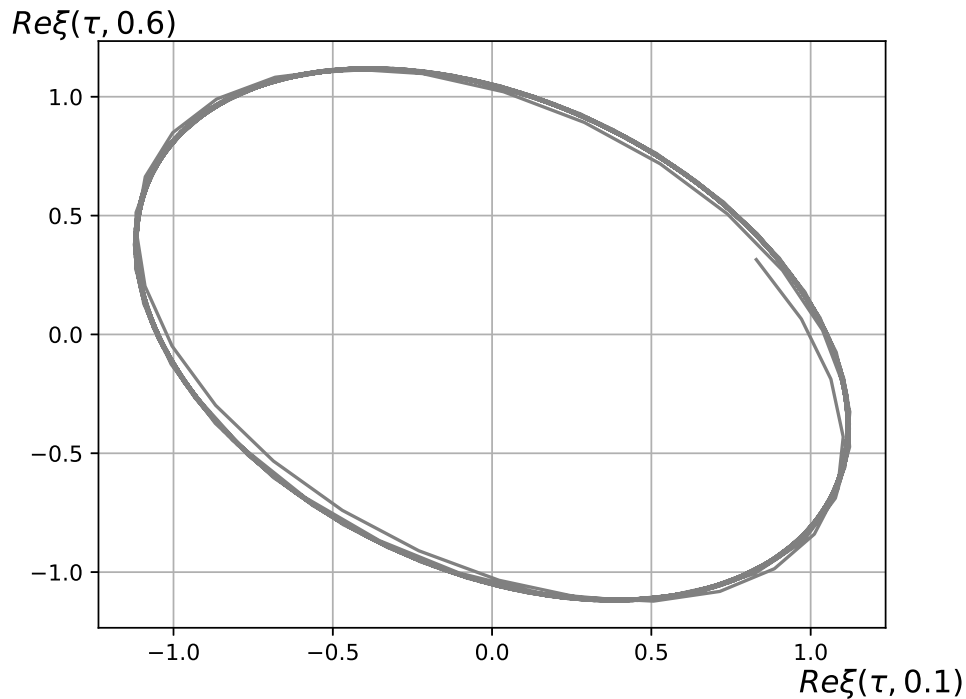


Fig. 6. Projection onto the plane of a parametrically defined curve $(\operatorname{Re}(\xi(\tau, 0, 1)), \operatorname{Re}(\xi(\tau, 0.6)))$

Рис. 6. Проекция на плоскость параметрически заданной кривой $(\operatorname{Re}(\xi(\tau, 0, 1)), \operatorname{Re}(\xi(\tau, 0.6)))$

удается найти периодические решения с числом точек разрыва по пространственной переменной больше двух.

References

- [1] S. A. Kashchenko, “Dynamics of full-coupled chains of a great number of oscillators with a large delay in couplings”, *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, vol. 31, no. 4, pp. 523–542, 2023, in Russian. DOI: [10.18500/0869-6632-003054](https://doi.org/10.18500/0869-6632-003054).
- [2] D. S. Glyzin, S. D. Glyzin, and A. Y. Kolesov, “Hunt for chimeras in fully coupled networks of nonlinear oscillators”, *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, vol. 30, no. 2, pp. 152–175, 2022, in Russian. DOI: [10.18500/0869-6632-2022-30-2-152-175](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2022-30-2-152-175).
- [3] S. A. Kashchenko, “Quasinormal forms for chains of coupled logistic equations with delay”, *Mathematics*, vol. 10, no. 15, p. 2648, 2022. DOI: [10.3390/math10152648](https://doi.org/10.3390/math10152648).
- [4] S. A. Kashchenko, “Asymptotics of regular and irregular solutions in chains of coupled van der Pol equations”, *Mathematics*, vol. 11, no. 9, p. 2047, 2023. DOI: [10.3390/math11092047](https://doi.org/10.3390/math11092047).
- [5] S. D. Glyzin and A. Y. Kolesov, “Periodic two-cluster synchronization modes in fully coupled networks of nonlinear oscillators”, *Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika*, vol. 212, no. 2, pp. 213–233, 2022, in Russian. DOI: [10.4213/tmf10191](https://doi.org/10.4213/tmf10191).
- [6] P. Hartman, *Ordinary differential equations*. Boston: Birkhäuser Baltimore, 1973.
- [7] J. Dalecki and M. Krein, *Stability of Solutions of Differential Equation in Banach Space*. AMS, Providence, 1974.
- [8] A. D. Myshkis, “Mixed functional differential equations”, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 129, pp. 4111–4226, 2005. DOI: [10.1007/s10958-005-0345-2](https://doi.org/10.1007/s10958-005-0345-2).

- [9] E. V. Grigorieva and S. A. Kashchenko, “Antiphase and in-phase dynamics in laser chain models with delayed bidirectional couplings”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 467, p. 134 223, 2024. DOI: [10.1016/j.physd.2024.134223](https://doi.org/10.1016/j.physd.2024.134223).
- [10] E. V. Grigorieva and S. A. Kashchenko, “Rectangular structures in the model of an optoelectronic oscillator with delay”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 417, p. 132 818, 2021. DOI: [10.1016/j.physd.2020.132818](https://doi.org/10.1016/j.physd.2020.132818).
- [11] J. Medlock and M. Kot, “Spreading disease: Integro-differential equations old and new”, *Mathematical Biosciences*, vol. 184, no. 2, pp. 201–222, 2003. DOI: [10.1016/S0025-5564\(03\)00041-5](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(03)00041-5).
- [12] O. Bonnefon, J. Coville, J. Garnier, and L. Roques, “Inside dynamics of solutions of integro-differential equations”, *Discrete and Continuous Dynamical Systems – B*, vol. 19, no. 10, pp. 3057–3085, 2014. DOI: [10.3934/dcdsb.2014.19.3057](https://doi.org/10.3934/dcdsb.2014.19.3057).
- [13] Y. Jin and X.-Q. Zhao, “Spatial dynamics of a periodic population model with dispersal”, *Nonlinearity*, vol. 22, no. 5, p. 1167, 2009. DOI: [10.1088/0951-7715/22/5/011](https://doi.org/10.1088/0951-7715/22/5/011).
- [14] J. E. Marsden and M. McCracken, *The Hopf bifurcation and its applications. Applied Mathematical Sciences, volume 19*. Springer-Verlag, 1976.
- [15] B. D. Hassard, N. D. Kazarinoff, and Y.-H. Wan, *Theory and applications of Hopf bifurcation*. Cambridge; New York : Cambridge University Press, 1981.
- [16] Y. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory, 3rd ed.* New York: Springer-Verlag, 2004.
- [17] Y. Kuang, *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*. Boston: Academic Press, 1993.
- [18] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Springer, 1981.
- [19] J. Hale, *Theory of functional differential equations*. New-York : Springer-Verlag, 1971.
- [20] J. Wu, *Theory and applications of partial functional-differential equations*. New York: Springer-Verlag, 1996.
- [21] S. A. Kashchenko, “Quasinormal forms for parabolic equations with small diffusion”, *Soviet Mathematics. Doklady*, vol. 37, no. 5, pp. 510–513, 1988, in Russian.
- [22] S. A. Kashchenko, “Normalization in the systems with small diffusion”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 6, no. 6, pp. 1093–1109, 1996. DOI: [10.1142/S021812749600059X](https://doi.org/10.1142/S021812749600059X).