Модел. и анализ информ. систем. Т. **20**, № **3** (2013) 77–85

УДК 514.17+517.51

Об одной задаче для симплекса и куба в $\mathbb{R}^n$

Невский М. В. [1]

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: mnevsk@uniyar.ac.ru

получена 14 марта 2013

Ключевые слова: n-мерный симплекс, n-мерный куб, осевой диаметр, гомотетия, интерполяция, проектор

Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\alpha(S)$ минимальное $\sigma > 0$ такое, что единичный куб $Q_n := [0,1]^n$ принадлежит трансляту σS. В случае $\alpha(S) \neq 1$ транслят $\alpha(S)S$, содержащий Q_n, есть образ S при гомотетии с центром в некоторой точке $x \in \mathbb{R}^n$. В статье получена следующая формула для вычисления x. Обозначим через $x^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, n+1)$ вершины S. Пусть $\mathbf{A}$ — матрица порядка $n+1$, строки которой содержат координаты $x^{(j)}$; последний столбец $\mathbf{A}$ состоит из 1. Предположим, что $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$. Тогда координаты x суть числа

$$x_k = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n} |l_{ij}|\right) x_k^{(j)} - 1}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| - 2} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

В силу условия $\alpha(S) \neq 1$ знаменатель, стоящий в правой части этого равенства, отличен от нуля. Приводятся также оценки для норм проекторов при линейной интерполяции непрерывных функций, заданных на Q_n.

1. Введение

Пусть C — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, т. е. компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью. Через $C_{x,\sigma}$ обозначим образ C при гомотетии с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ и коэффициентом σ. Положим $\sigma C := C_{m,\sigma}$, где m — центр тяжести C. Как обычно, $-C := (-1)C$. Под *транслятом* понимается результат параллельного переноса. Обозначим через $d_i(C)$ максимальную длину отрезка, содержащегося в C и параллельного i-й координатной оси. Величину $d_i(C)$ будем называть *i-м осевым диаметром C*. Понятие осевого диаметра было введено Скоттом [8], [9].

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ, договор № 11.G34.31.0053.

Пусть Q_n — стандартный n-мерный единичный куб $[0,1]^n$. Через $\alpha(C)$ обозначим минимальное $\sigma > 0$, для которого Q_n принадлежит трансляту σC. Ниже $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ есть совокупность многочленов от n переменных степени ≤ 1.

Всюду далее S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Обозначим вершины S через $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}\right)$, $j = 1, \dots, n+1$. Матрица

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}$$

является невырожденной. Положим $\Delta := \det(\mathbf{A})$, тогда $\mathrm{vol}(S) = |\Delta|/n!$. Обозначим через $\Delta_j(x)$ определитель, который получается из Δ заменой j-й строки на строку $(x_1, \dots, x_n, 1)$. Введём в рассмотрение многочлены из $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$, определяемые равенством $\lambda_j(x) := \Delta_j(x)/\Delta$. Пусть

$$\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}. \tag{1.1}$$

Так как $\lambda_j\left(x^{(k)}\right) = \delta_j^k$ (здесь δ_j^k — символ Кронекера), то коэффициенты λ_j удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{1j} \\ l_{2j} \\ \vdots \\ l_{n+1,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(в правой части 1 стоит только в j-й строке). Умножая это равенство слева на $\mathbf{A}^{-1}$, получаем, что *коэффициенты λ_j составляют j-й столбец $\mathbf{A}^{-1}$, т. е. $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$.*

Любой многочлен $p \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ может быть записан в виде

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n+1} p\left(x^{(j)}\right)\lambda_j(x). \tag{1.2}$$

Применяя (1.2) последовательно к $p(x) = 1$, x_1, $\dots$, x_n, получим для $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) = 1, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x)x^{(j)} = x. \tag{1.3}$$

Соотношения (1.3) означают, что числа $\lambda_1(x)$, $\dots$, $\lambda_{n+1}(x)$ являются *барицентрическими координатами x относительно симплекса S.*

В предыдущих работах автору удалось доказать ряд формул для геометрических характеристик симплекса. В [2] показано, что для i-го осевого диаметра S верно равенство

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|\,. \tag{1.4}$$

В S существует ровно один отрезок длины $d_i(S)$, параллельный оси x_i. Центр этого отрезка есть точка

$$m^{(i)} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{|l_{ij}|}{\sum_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|}\, x^{(j)}. \tag{1.5}$$

В [7] установлено, что

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)}. \tag{1.6}$$

Из (1.4) и (1.6) следует равенство

$$\alpha(S) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \tag{1.7}$$

Некоторое обобщение (1.6) получено в [5].

Настоящая статья продолжает данный цикл работ автора. В ней рассматривается задача о вычислении для симплекса S такой точки $x \in \mathbb{R}^n$, для которой с минимальным возможным для этого симплекса коэффициентом $\sigma > 0$ справедливо включение $Q_n \subset S_{x,\sigma}$. Задача имеет решение, и причём единственное, в случае $\alpha(S) \neq 1$; при этом минимальное σ как раз и равно $\alpha(S)$. В статье приводятся формулы, в которых центр x минимальной положительной гомотетии вычисляется через вершины S и числа l_{ij} — коэффициенты многочленов λ_j (см. (1.1)).

В заключительной части работы приводятся оценки для норм проекторов при линейной интерполяции непрерывных функций, заданных на Q_n. Эти оценки касаются ситуации $d_1(S) = \ldots = d_n(S) = 1$, где S — симплекс с вершинами в узлах интерполяции.

2. Вычисление центра гомотетии

Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Из определения $\alpha(S)$ легко следует, что некоторый транслят симплекса $\alpha(S)S$ описан вокруг Q_n, т. е. каждая $(n-1)$-мерная грань этого транслята содержит вершину Q_n. Поэтому $\alpha(S) = 1$ тогда и только тогда, когда существует транслят S, описанный вокруг Q_n.

Теорема 2.1. *Если $\sigma = \sum_{i=1}^n 1/d_i(S) \neq 1$, то существует единственная точка $x = (x_1, \ldots, x_n)$ такая, что $Q_n \subset S_{x,\sigma}$. Имеют место равенства*

$$x_k = \frac{1}{2(\sigma - 1)} \left[\sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n} |l_{ij}| \right) x_k^{(j)} - 1 \right], \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Если $0 < \sigma < \sum_{i=1}^n 1/d_i(S)$, то для любой $x \in \mathbb{R}^n$ верно $Q_n \not\subset S_{x,\sigma}$.

Доказательство. Предположим, что $\sigma = \sum_{i=1}^n 1/d_i(S) \neq 1$. В силу (1.6) это число совпадает с $\alpha(S)$. Так как симплекс σS отличен от S, то транслят σS, содержащий Q_n, является результатом гомотетии S с центром в некоторой точке и коэффициентом σ. Иначе говоря, существует точка x, для которой $Q_n \subset S_{x,\sigma}$. Единственность

x следует из того, что симплекс $S_{x,\sigma}$ (т. е. транслят $\alpha(S)S$, содержащий Q_n) описан вокруг Q_n. Вычислим x в явном виде.

Пусть $m^{(i)}$ есть центр единственного отрезка длины $d_i(S)$, принадлежащего S и параллельного i-й координатной оси. Точка $m^{(i)}$ вычисляется с помощью (1.5). Обозначим через Q транслят куба $(1/\sigma)Q_n$, центр которого совпадает с точкой

$$m := \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i(S)}m^{(i)}. \tag{2.2}$$

В [3] было доказано, что $Q \subset S$. Применяя (2.2), (1.5) и (1.4), получим

$$m = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i(S)}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{d_i(S)}{2}|l_{ij}|x^{(j)} = \frac{1}{2\sigma}\sum_{j=1}^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}|l_{ij}|\right)x^{(j)}. \tag{2.3}$$

Так как минимальный положительный гомотетический образ S, содержащий Q_n, есть транслят σS, то Q представляет собой единственный максимальный гомотетический образ Q_n, принадлежащий S. (Различные способы иллюстрации этого факта даются в [5].) Транслят σS, содержащий Q_n, совпадает с $S_{x,\sigma}$. Из соображений подобия имеем $Q_n = Q_{x,\sigma}$. Поэтому при гомотетии с центром в x и коэффициентом σ центр m куба Q переходит в центр $c = \left(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)$ куба Q_n. Значит, при любом $k = 1,\ldots,n$ выполняется соотношение

$$\frac{1}{2} - x_k = \sigma(m_k - x_k).$$

Из этого равенства и (2.3) следует, что

$$x_k = \frac{1}{2(\sigma-1)}\left[\sum_{j=1}^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}|l_{ij}|\right)x_k^{(j)} - 1\right].$$

Первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь $0 < \sigma < \sum_{i=1}^{n} 1/d_i(S)$. В силу (1.6) $0 < \sigma < \alpha(S)$. Из определения $\alpha(S)$ следует, что никакой транслят σS не содержит Q_n. Поэтому для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется $Q_n \not\subset S_{x,\sigma}$.

Теорема доказана. $\square$

Приведём формулы для вычисления x, в которых используются только вершины S и числа l_{ij}.

Теорема 2.2. *Для невырожденного симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$ условие $\alpha(S) \neq 1$ эквивалентно*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1}|l_{ij}| \neq 2. \tag{2.4}$$

Пусть выполнено (2.4) и $\sigma := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1}|l_{ij}|$. Тогда единственная точка x, для которой верно включение $Q_n \subset S_{x,\sigma}$, может быть вычислена по равенствам

$$x_k = \frac{\sum_{j=1}^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}|l_{ij}|\right)x_k^{(j)} - 1}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1}|l_{ij}| - 2}, \quad k = 1,\ldots,n. \tag{2.5}$$

Доказательство. Эквивалентность условий $\alpha(S) \neq 1$ и (2.4) вытекает из равенства (1.7). Справедливость второй части теоремы следует из (1.6), (1.7) и предыдущего утверждения. $\square$

3. Случай $S \subset Q_n$, $d_1(S) = \ldots = d_n(S) = 1$

В этом пункте мы рассмотрим ситуацию, когда симплекс S содержится в Q_n. Если $S \subset Q_n$, то, очевидно, $d_i(S) \leq 1$, поэтому

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} \geq n. \tag{3.1}$$

Равенство в (3.1) имеет место тогда и только тогда, когда каждый осевой диаметр $d_i(S)$ равен 1. Итак, если $S \subset Q_n$, то $\alpha(S) = n$ эквивалентно $d_1(S) = \ldots = d_n(S) = 1$. Сформулируем для этой ситуации специальный вариант теоремы 2.1.

Теорема 3.1. *Пусть $S \subset Q_n$ и $d_1(S) = \ldots = d_n(S) = 1$. Существует единственная точка $x \in S$ такая, что $Q_n \subset S_{x,n}$. При $n > 1$ имеют место равенства*

$$x_k = \frac{1}{2(n-1)} \left[\sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n} |l_{ij}| \right) x_k^{(j)} - 1 \right], \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Если $0 < \sigma < n$, то для любой $x \in \mathbb{R}^n$ верно $Q_n \not\subset S_{x,n}$.

Доказательство. В случае $n = 1$ имеем $S = [0, 1]$, поэтому x есть центр отрезка $[0, 1]$. Для $n > 1$ утверждение следует из теоремы 2.1. Дополнительное свойство $x \in S$ получается из включений $S \subset Q_n \subset S_{x,n}$, откуда $S \subset S_{n,x}$. $\square$

Условие $d_1(S) = \ldots = d_n(S) = 1$ выполняется, если S имеет максимальный возможный объём из всех симплексов, принадлежащих Q_n. Действительно, если $S \subset Q_n$ — симплекс максимального объёма, то $Q_n \subset -nS$. (Допустим, что последнее включение не имеет места. Тогда некоторая вершина S может быть перемещена в Q_n таким образом, что объём симплекса увеличится. Но это невозможно.) Так как Q_n является центрально-симметричным телом ($-Q_n = Q_n$), то из включения $Q_n \subset -nS$ вытекает, что Q_n содержится в трансляте nS. Отсюда имеем $\alpha(S) \leq n$. Так как одновременно выполняется и противоположное неравенство (3.1), то $\alpha(S) = n$ и все $d_i(S) = 1$. Указанное свойство отмечалось в [2], [7].

Разумеется, свойствами $d_i(S) = 1$ и $\alpha(S) = n$ обладают не только симплексы $S \subset Q_n$ максимального объёма. Например, симплекс S^* с вершинами $x^{(1)} = e_1, \ldots, x^{(n)} = e_n$, $x^{(n+1)} = 0$, имеет максимальный объём в Q_n только при $n = 1$ и $n = 2$. Очевидно, $d_i(S^*) = 1$. Заметим, что вычисления по формуле (3.2) дают $x = 0$, так что $Q_n \subset S^*_{0,n}$. Последнее включение легко усмотреть и непосредственно, так как $S^*_{0,n} = \mathrm{conv}(ne_1, \ldots, ne_n, 0)$. Здесь и далее $e_1, \ldots, e_n$ — канонический базис $\mathbb{R}^n$.

В качестве другого примера рассмотрим при $n \geq 2$ симплекс S^{**} с вершинами

$$x^{(j)} = \sum_{i \neq j} e_i, \quad 1 \leq j \leq n; \quad x^{(n+1)} = 0.$$

В этом случае

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} -(n-2) & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & -(n-2) & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -(n-2) & \dots & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -(n-2) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \end{pmatrix}.$$

При $n \geq 3$ симплекс S^{**} обладает следующим свойством [6; лемма 3.3]: замена любой вершины S^{**} на любую точку Q_n уменьшает объём симплекса. При $n = 2, 3, 4$ (и только в этих ситуациях) объём S^{**} является максимально возможным для симплекса, содержащегося в Q_n. В то же время при любом $n \geq 2$ из (1.4) следуют равенства $d_i(S^{**}) = 1$, $i = 1, \dots, n$. Они эквивалентны тому, что сумма модулей элементов каждой из верхних n строк $\mathbf{A}^{-1}$ равна 2. Вычисления по формуле (3.2) дают значение

$$x = \left(\frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}\right).$$

С таким центром гомотетии x верно $Q_n \subset S^{**}_{x,n}$. Заметим, что в двумерной ситуации $x = 0$. Если же $n = 3$, то x совпадает с центром куба. В последнем случае S^{**} является правильным тетраэдром, вписанным в Q_3.

4. Оценки $\|P\|$ в случае $S \subset Q_n$, $d_1(S) = \ldots = d_n(S) = 1$

Круг вопросов, связанных с изучением геометрических свойств множеств, появился в работах автора в связи с исследованием полиномиальной интерполяции функций n переменных. Соотношения между геометрическими характеристиками применялись при выводе оценок для норм интерполяционных проекторов. По поводу этой тематики см., например, [2], [4], [7]. В настоящем пункте приводятся оценки проекторов при линейной интерполяции на Q_n. Мы ограничимся случаем, когда симплекс S с вершинами в узлах интерполяции обладает свойством $d_1(S) = \ldots = d_n(S) = 1$.

Обозначим через $C(Q_n)$ пространство непрерывных функций $f : Q_n \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|f\|_{C(Q_n)} := \max_{x \in Q_n} |f(x)|.$$

Пусть $S \subset Q_n$. Интерполяционный проектор $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, узлы которого $x^{(j)}$ совпадают с вершинами S, определяется равенствами $Pf\left(x^{(j)}\right) = f_j := f\left(x^{(j)}\right)$,

$j = 1, \ldots, n+1$. Через $\|P\|$ обозначим норму P как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$. Имеет место равенство

$$\|P\| = \max_{x \in Q_n} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|.$$

Введём следующие обозначения:

$$\theta_n := \min\{\|P\| : S \subset Q_n\},$$

$$\mu_n := \min\{\|P\| : S \subset Q_n, d_1(S) = \ldots = d_n(S) = 1\},$$

$$\nu_n := \max\{\|P\| : S \subset Q_n, d_1(S) = \ldots = d_n(S) = 1\}.$$

Запись $A \asymp B$ означает, что для некотрых $c_1, c_2 \geq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $c_1 B(n) \leq A(n) \leq c_2 B(n)$.

Теорема 3.2. *Справедливы соотношения:*

$$\mu_1 = \nu_1 = 1, \quad \mu_2 = \frac{5}{2}, \quad \nu_2 = 3; \tag{4.3}$$

$$\mu_n \leq \min\left(\frac{n+1}{2}, \frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{n+2} + 1\right), \quad n \neq 2; \tag{4.4}$$

$$\mu_n \asymp \sqrt{n}, \quad \mu_n \asymp \theta_n; \tag{4.5}$$

$$\nu_n \geq 2n - 1. \tag{4.6}$$

Доказательство. Для $n = 1$ условие $d_1(S) = 1$ эквивалентно $S = Q_1 = [0,1]$. Соответствующий проектор имеет норму 1, поэтому $\mu_1 = \nu_1 = 1$. В двумерной ситуации для S с условием $d_1(S) = d_2(S) = 1$ минимальное значение $\|P\|$ равно $\frac{5}{2}$; оно достигается на симплексе с вершинами $(0,0)$ $(1,0)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Максимальное значение $\|P\|$ равно 3; оно соответствует S с вершинами $(0,0)$ $(1,0)$, $(0,1)$. Поэтому справедливы равенства (4.3).

Пусть $n \in$ N. Рассмотрим симплекс S^{**} из предыдущего пункта. Как было показано, для него все $d_i(S^{**}) = 1$. Если $n \neq 2$, то норма соответствующего интерполяционного проектора P^{**} удовлетворяет неравенству

$$\|P^{**}\| \leq \frac{n+1}{2},$$

см. [4; теорема 3.2.3]. Поэтому для $n \neq 2$ верно $\mu_n \leq (n+1)/2$. Пусть теперь S имеет максимальный объём в Q_n. В [1; теорема 3.1] доказано, что для соответствующего проектора P

$$\|P\| \leq \frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{n+2} + 1. \tag{4.7}$$

Так как все осевые диаметры S равны 1, то и μ_n не превосходит правой части (4.7). Таким образом, выполняется (4.4).

Неравенство (4.7) означает, что $\mu_n \leq \mathrm{const} \cdot \sqrt{n}$. Очевидно, $\theta_n \leq \mu_n$. Как показано в [1; следствие 4.5], $\theta_n \asymp \sqrt{n}$. Следовательно, справедливы соотношения (4.5).

Наконец, заметим, что норма интерполяционного проектора P^*, соответствующего симплексу $S^* = \mathrm{conv}(e_1, \ldots, e_n, 0)$ (см. п. 3), равна $2n-1$. Так как $d_i(S^*) = 1$, то $\nu_n \geq \|P^*\|$. Отсюда следует (4.6).

Теорема доказана. □

На настоящий момент точные значения θ_n известны лишь для $n = 1, 2, 3$ и 7. При этом для $n = 1, 3, 7$ экстремальными являются симплексы $S \subset Q_n$ со свойством $d_i(S) = 1$. В двумерной ситуации экстремальные симплексы последним соотношениям не удовлетворяют. По поводу этих результатов см. [4]. Вопрос о том, является ли $n = 2$ единственным значением, для которого минимум $\|P\|$ достигается на симплексе без свойства $d_1(S) = \ldots = d_n(S) = 1$, остаётся открытым.

Список литературы

1. Невский М. В. Минимальные проекторы и максимальные симплексы // Модел. и анализ информ. систем. 2007. Т. 14, № 1. С. 3–10. (Nevskij M. V. Minimal projections and largest simplices // Modeling and Analysis of Information Systems. 2007. V. 14, № 1. P. 3–10 [in Russian]).

2. Невский М. В. Об одном свойстве n-мерного симплекса // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 580–593. (English transl.: Nevskii M. V. On a property of n-dimensional simplices // Math. Notes. 2010. V. 87, № 4. P. 543–555.)

3. Невский М. В. Об осевых диаметрах выпуклого тела // Матем. заметки. 2011. Т. 90, № 2. С. 313–315. (English transl.: Nevskii M. V. On the axial diameters of a convex body // Math. Notes. 2011. V. 90, № 2. P. 295–298.)

4. Невский М. В. Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции / Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. Ярославль: ЯрГУ, 2012. 218 с. (Nevskii M. V. Geometricheskie ocenki v polinomialnoi interpolyacii / P. G. Demidov Yarosl. Gos. Univ. Yaroslavl: YarGU, 2012. 218 s. [in Russian]).

5. Невский М. В. О минимальном положительном гомотетическом образе симплекса, содержащем выпуклое тело // Матем. заметки. 2013. Т. 93, № 3. С. 448–456. (English transl.: Nevskii M. V. On the minimal positive homothetic image of a simplex containing a convex body // Math. Notes. 2013. V. 93, № 3. P. 112–120.)

6. *Hudelson M., Klee V., Larman D.* Largest j-simplices in d-cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem // Linear Algebra Appl. 1996. V. 241–243. P. 519–598.

7. Nevskii M. Properties of axial diameters of a simplex // Discrete Comput. Geom. 2011. V. 46, № 2. P. 301–312.

8. Scott P. R. Lattices and convex sets in space // Quart. J. Math. Oxford (2). 1985. V. 36. P. 359–362.

9. Scott P. R. Properties of axial diameters // Bull. Austral. Math. Soc. 1989. V. 39. P. 329–333.

On Some Problem for a Simplex and a Cube in $\mathbb{R}^n$

Nevskii M.V.

P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: n-dimensional simplex, n-dimensional cube, axial diameter, homothety, interpolation, projection

Let S be a nondegenerate simplex in $\mathbb{R}^n$. Denote by $\alpha(S)$ the minimal $\sigma > 0$ such that the unit cube $Q_n := [0,1]^n$ is contained in a translate of σS. In the case $\alpha(S) \neq 1$ the translate of $\alpha(S)S$ containing Q_n is a homothetic copy of S with the homothety center at some point $x \in \mathbb{R}^n$. We obtain the following computational formula for x. Denote by $x^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, n+1)$ the vertices of S. Let $\mathbf{A}$ be the matrix of order $n+1$ with the rows consisting of the coordinates of $x^{(j)}$; the last column of $\mathbf{A}$ consists of 1's. Suppose that $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$. Then the coordinates of x are the numbers

$$x_k = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n} |l_{ij}|\right) x_k^{(j)} - 1}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| - 2} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Since $\alpha(S) \neq 1$, the denominator from the right-hand part of this equality is not equal to zero. Also we give the estimates for norms of projections dealing with the linear interpolation of continuous functions defined on Q_n.

Сведения об авторе:
Невский Михаил Викторович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
канд. физ.-мат. наук, доцент, декан математического факультета