MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS, VOL. 32, NO. 3, 2025
journal homepage: www.mais-journal.ru

COMPUTING METHODOLOGIES AND APPLICATIONS

Computational Aspects of S-differentiability of Functions of Several Variables

A. N. Morozov[1]

DOI: 10.18255/1818-1015-2025-3-230-241

[1]P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

MSC2020: 41A35, 41A45, 65D25
Research article
Full text in Russian

Received June 11, 2025
Revised July 8, 2025
Accepted July 16, 2025

The study of various processes leads to the need to clarify (expand) the boundaries of the applicability of computational structures and modeling tools. The purpose of this article is to develop the Taylor expansion for functions of several variables based on the concept of S-differentiability. A function f from $L_1[Q_0]$, where Q_0 is an m-dimensional cube, is called S-differentiable at an interior point x_0 of this cube, if there exists an algebraic if there exists an analgebraic polynomial $P(x)$ of degree not greater than first for which it is uniform over all vectors v of the unit sphere $\mathbb{R}^m$ the integral of t within 0 and h from the expression $f(x_0 + t \cdot v) - P(t \cdot v)$ is $o(h^2)$ for $h \to 0+$. It is shown that with this definition, differentiation of a composite function with a linear interior component is valid, and the vector-gradient principle holds. The following result is proved. Let the function f have continuous partial derivatives up to order n inclusive in some neighborhood of the interior point $x_0 \in Q_0$ that are S-differentiable at the point x_0, then the Taylor expansion the function f with accuracy $o(\|x - x_0\|^{n+1})$ holds in this neighborhood.

Keywords: S-derivative; Taylor expansion; difference expressions; gradient vector

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Morozov, Anatoly N. (corresponding author)	ORCID iD: 0000-0001-9940-159X. E-mail: moroz@uniyar.ac.ru PhD, Associate Professor

Funding: Yaroslavl State University (project VIP-016).

For citation: A. N. Morozov, "Computational aspects of S-differentiability of functions of several variables", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 32, no. 3, pp. 230–241, 2025. DOI: 10.18255/1818-1015-2025-3-230-241.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ, ТОМ 32, № 3, 2025
сайт журнала: www.mais-journal.ru

COMPUTING METHODOLOGIES AND APPLICATIONS

Вычислительные аспекты S-дифференцируемости функций нескольких переменных

А. Н. Морозов[1]

DOI: 10.18255/1818-1015-2025-3-230-241

[1]Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

УДК 519.65
Научная статья
Полный текст на русском языке

Получена 11 июня 2025 г.
После доработки 8 июля 2025 г.
Принята к публикации 16 июля 2025 г.

Исследование различных процессов приводит к необходимости уточнения (расширения) границ применимости вычислительных конструкций и инструментов моделирования. Целью данной статьи является развитие разложения Тейлора для функций нескольких переменных на основе понятия S-дифференцируемости. Функцию f из $L_1[Q_0]$, где Q_0 — m-мерный куб, назовём S-дифференцируемой во внутренней точке x_0 этого куба, если существует алгебраический многочлен $P(x)$ степени не выше первой, для которого равномерно по всем векторам v единичной сферы $\mathbb{R}^m$ интеграл по t с пределами 0 и h от выражения $f(x_0 + t \cdot v) - P(t \cdot v)$ есть $o(h^2)$ при $h \to 0+$. Показано, что при таком определении справедливо дифференцирование сложной функции с линейной внутренней компонентой, имеет место принцип вектора-градиента. Доказан следующий результат. Пусть функция f имеет в некоторой окрестности внутренней точки $x_0 \in Q_0$ непрерывные частные производные до порядка n включительно, которые S-дифференцируемы в точке x_0, тогда в этой окрестности справедливо разложение Тейлора функции f с точностью $o(\|x - x_0\|^{n+1})$.

Ключевые слова: S-производная; разложение Тейлора; разностные выражения; вектор-градиент

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Морозов, Анатолий Николаевич (автор для корреспонденции) | ORCID iD: 0000-0001-9940-159X. E-mail: moroz@uniyar.ac.ru
Канд. физ.-мат. наук, доцент

Финансирование: ЯрГУ (проект VIP-016).

Для цитирования: A. N. Morozov, “Computational aspects of S-differentiability of functions of several variables”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 32, no. 3, pp. 230–241, 2025. DOI: 10.18255/1818-1015-2025-3-230-241.

Введение и основные обозначения

Разложение Тейлора является фундаментальным математическим построением, широко применяемым в различных областях. В современной математике это не только важнейший способ представления и аппроксимации функций [1], но и идейная основа для работы с другими объектами [2], которые в свою очередь «дают ключ» к решению многих актуальных теоретических и практических задач. Также данное построение позволяет открывать в математике свойства новых конструкций [3, 4]. Многочисленны применения разложения Тейлора в инженерии [5, 6], а в последние годы — в машинном обучении [7—9]. Математическое развитие метода Тейлора позволит расширить возможности его применения.

Пусть $L_p[Q_0]$ — пространство действительных измеримых функций, интегрируемых в степени p $(1 \leqslant p < \infty)$ по Лебегу на кубе

$$Q_0 = [a_1; b_1] \times \cdots \times [a_m; b_m], \text{где } b_i - a_i = b_j - a_j, i, j \in \{1, \ldots, m\},$$

в $\mathbb{R}^m$ с обычной евклидовой нормой:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \|x\| = (x_1^2 + x_1^2 + \ldots + x_m^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Для $m = 1$ пишем $L_p[a; b]$.

В общем случае считаем

$$\|f\|_{L_p[Q_0]} = \Bigl(\int\limits_{Q_0} |f(x)|^p dx \Bigr)^{\frac{1}{p}}.$$

$V(Q_0)$ обозначает объём куба Q_0 так же, как и для других множеств из $\mathbb{R}^m$, на которых рассматриваются функции.

Заметное место в статье будет занимать конструкция $\Theta[f]$ — функция, принадлежащая классу эквивалентости функции f, которая может быть определена ниже описанным способом (см. статью [10], параграф 2).

Пусть τ_n — разбиение полузамкнутого куба $\breve{Q}_0 = [a_1; b_1) \times \cdots \times [a_m; b_m)$ на n^m равных полузамкнутых кубов: каждый полуинтервал $[a_j; b_j)$, $j = 1, \ldots, m$ разбивается на n одинаковых полуинтервалов. Куб $\breve{Q}_0$ снова замкнём, а добавленные при этом точки распределим по соответствующим кубам из разбиения τ_n. Для полученного разбиения замкнутого куба оставим то же обозначение. По заданной функции $f \in L_1[Q_0]$ и разбиению τ_n построим кусочно-постоянную функцию, задаваемую формулой

$$\Theta_n[f](u) = \frac{1}{V(Q)} \int\limits_{Q} f(x) dx \text{ при } u \in Q,$$

на каждом кубе $Q \in \tau_n$. Последовательность $\{\Theta_n[f]\}$ сходится при $n \to \infty$ к f п. в. (почти всюду), а также согласно теореме 1 из [10] сходится и в среднем. На основе последовательностей $\{\Theta_n[\cdot]\}$ в рамках пространства $L_1[Q_0]$ получаем оператор Θ:

$$\Theta[f] \overset{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} \Theta_n[f].$$

Отметим простейшие свойства данного оператора [10]:

1) если

$$\lim_{r \to 0+} \frac{1}{V\bigl(D(x_0; r)\bigr)} \int\limits_{D(x_0; r)} \bigl|f(x) - c\bigr| dx = 0,$$

то $\Theta[f](x_0) = c$, где $D(x_0; r)$ здесь и далее — пересечение замкнутого шара с центром в точке x_0 радиуса r с кубом Q_0.

2) $\|\Theta\| = 1, \Theta\big[\Theta[f]\big](x) \equiv \Theta[f](x)$.

При $m = 1$ пункт 1) справедлив и в формулировке:

$$\text{«если } \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = c, \text{ то } \Theta[f](x_0) = c\text{».}$$

Кроме того, согласно теореме 2 статьи [10] при условии $f \in L_\infty[Q_0]$ функция $\Theta[f]$, доопределённая, если требуется, на множестве меры ноль, — обозначим результат доопределения $\overline{\Theta[f]}$ — принадлежит $B[Q_0]$, где $L_\infty[Q_0]$ — пространство измеримых существенно ограниченных на кубе функций, а $B[Q_0]$ — пространство измеримых ограниченных на кубе функций; и выполняется равенство

$$\left\|\overline{\Theta[f]}\right\|_{B[Q_0]} = \left\|f\right\|_{L_\infty[Q_0]}.$$

Таким образом, полагаем

$$\left\|f\right\|_{L_\infty[Q_0]} \stackrel{\text{def}}{=} \left\|\overline{\Theta[f]}\right\|_{B[Q_0]} = \sup_{x\in Q_0} \left|\overline{\Theta[f]}(x)\right|.$$

Для остальных рассматриваемых значений p под функцией f подразумевается $\Theta[f]$.

Поскольку для $f \in C[Q_0]$, где $C[Q_0]$ — пространство непрерывных на Q_0 функций, выполняется $\Theta[f] \equiv f$ (ровно для таких f последовательность $\Theta_n[f]$ сходится равномерно), и согласно свойству 1) оператор автоматически пересчитывает нужным образом значение функции из $L_1[Q_0]$ в каждой точке, в которой существует указанный выше предел, то Θ можно назвать оператором непрерывности (L-непрерывности).

Численное исследование различных процессов приводит к необходимости уточнения (расширения) границ применимости вычислительных конструкций и инструментов моделирования. Для динамических систем данный вопрос может быть связан с обобщением понятия производной, сохраняющим актуальными применяемые конструкции. Эффективность такого подхода была продемонстрирована впервые в работе Кальдерона—Зигмунда [11], где были даны приложения обобщённого локального понятия дифференцируемости к изучению локальных свойств решений дифференциальных уравнений. Построение авторов соответствует следующему определению.

Определение 1 ([11]). Функция $f \in L_p[Q_0]$, $1 \leqslant p < \infty$, называется (k, p)-дифференцируемой во внутренней точке $x_0 \in Q_0$ (далее обозначаем $x_0 \in \overset{\circ}{Q}_0$), если существует алгебраический многочлен $P(x - x_0)$ степени не больше k, для которого выполняется

$$\left(\frac{1}{V\big(D(x_0;r)\big)} \int\limits_{D(x_0;r)} \left|f(x) - P(x - x_0)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = o(r^k) \text{ при } r \to 0+,$$

в случае $p \to \infty$ берётся обычное условие:

$$\left\|f(x) - P(x - x_0)\right\|_{L_\infty[D(x_0;r)]} = o(r^k) \text{ при } r \to 0+.$$

Такой многочлен может быть только единственный. Главная идея данного подхода заключается в том, что существование алгебраического многочлена, приближающего локально заданную функцию с высокой точностью по некоторой метрике, гарантирует возможность качественного локального исследования систем и конструкций с этой функцией. Вопрос, как проверить существование нужного многочлена (найти его коэффициенты), остался открытым, кроме тех случаев, когда применимо разложение Тейлора.

В статьях автора [10, 12] показано, что в одномерном случае для $p = 1$ обсуждаемое определение обобщённой дифференцируемости остаётся содержательным, если рассматривать комплекс из двух интегралов по разные стороны от точки x_0, в которых под знаком интеграла берётся просто разность функции и приближающего её многочлена; также построены формулы для вычисления коэффициентов такого многочлена (следовательно, и коэффициентов многочлена, удовлетворяющих определению 1 в одномерном случае). А при использовании многочленов 1-ой степени получается новый, интегральный вариант дифференцирования функций, имеющий многие черты классического подхода.

Определение 2 ([12]). Функцию $f \in L_1[a;b]$ назовём S-дифференцируемой в точке $x_0 \in (a;b)$ (обозначим это как $f \in S[x_0]$), если существует алгебраический многочлен P степени не больше 1, для которого выполняется

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} (f-P)(x)dx = o(h) \text{ при } h \to 0.$$

Односторонняя S-дифференцируемость определяется стандартным образом; в частности, применительно к точке a требуется выполнение указанного условия при $h \to 0+$, а к точке b — при $h \to 0-$.

Единственность многочлена из определения 2 — его также удобно рассматривать в виде $P(x) = c + q\cdot(x-x_0)$ — вытекает из следующего утверждения.

Предложение 1 ([12]). Если $f \in L_1[a;b]$, $a < x_0 < b$ и

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(x) - c - q\cdot(x-x_0)\big)dx = o(h) \text{ при } h \to 0,$$

то

$$c = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx, \text{т.е. } c = \Theta[f](x_0); \tag{1}$$

$$q = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h(f,x_0)}{h}, \tag{2}$$

где

$$\Delta_h(f,x_0) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{h}\int_{x_0+h}^{x_0+2h} f(x)dx - \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx.$$

Отметим такой факт. Пусть $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, тогда выполнение условия предложения 1 для f равносильно существованию разложения

$$F(x) = F(x_0) + c\cdot(x-x_0) + \frac{q}{2}\cdot(x-x_0)^2 + o\big((x-x_0)^2\big).$$

(Существование предела из (1), очевидно, равносильно дифференцируемости F в точке x_0.) Обозначим как обычно ($k \in \mathbb{N}$):

$$\Delta_h^k(f,x) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\cdot\binom{k}{j}\cdot f(x+jh).$$

Из вышеприведённой формулы для F получаем соотношения:

$$c = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h(F,x_0)}{h} = F'(x_0),$$

$$q = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+2h) - 2F(x_0+h) + F(x_0)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h^2(F, x_0)}{h^2},$$

что также сразу вытекает из формул (1) и (2) предложения 1.

Для коэффициента q будем применять специальное обозначение:

$$f^{<1>}(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h(f, x_0)}{h}.$$

Ясно, что из существования $f'(x_0)$ следует существование $f^{<1>}(x_0)$ и их равенство. Следующие примеры показывают, что между этими характеристиками есть существенная разница.

Пример 1 ([12]). Пусть для определённости f — чётная функция, задаваемая при $0 \leqslant x \leqslant 1/2$ формулой

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x),$$

где

$$f_j(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in I_j = \left[\frac{1}{2^j} - \frac{1}{2^{3j}}; \frac{1}{2^j}\right], \\ 0, \text{ если } x \notin I_j, \end{cases}$$

тогда $f \in S[0]$, $f^{<1>}(0) = 0$.

Пример 2 ([12]). Функция $f(x) = x \cdot \sin(\frac{1}{x})$ (как элемент пространства $L_1[-b; b]$) является S-дифференцируемой в нуле (на $[-b; b]$), $f^{<1>}(0) = 0$.

Отметим также, что данная функция не охватывается определением дифференцируемости Кальдерона—Зигмунда (определением $(1,1)$-дифференцируемости и, значит, (k,p)-дифференцируемости при всех $k \in \mathbb{N}$ и всех $p \geqslant 1$), и имеет место формула

$$\Theta[f](x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Обратное соотношение между S-дифференцируемостью и обычной может быть охарактеризовано следующим утверждением. Пусть ($k \in \mathbb{N}$)

$$W_1^k[a; b] = \Big\{f : f^{(k-1)} \text{ абсолютно непрерывна на } [a; b]\Big\};$$

$$C^k[a; b] = \Big\{f : f^{(k)} \text{ непрерывна на } [a; b]\Big\}.$$

Для единой формулировки считаем, что $W_1^0[a; b] = L_1[a; b]$.

Теорема 1 ([12]). *Если $f \in W_1^{n-1}[a; b], n \in \mathbb{N}$, такова, что функция $f^{(n-1)}$ является равномерно S-дифференцируемой на $[a; b]$, то $f \in C^n[a; b]$.*

В вычислительном плане понятие S-дифференцируемости позволяет развить метод разложения Тейлора.

Теорема 2 ([12]). *Пусть $f \in W_1^{n-1}[a; b], n \geqslant 2$, и функция $f^{(n-1)} \in S[x_0], x_0 \in [a; b]$, тогда существуют*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h^k(f, x_0)}{h^k} = f^{<k>}(x_0), k = 1, \ldots, n,$$

$$f^{<k>}(x_0) = \begin{cases} f^{(k)}(x_0), & k = 0, \ldots, n-2, \\ \Theta[f^{(n-1)}](x_0), & k = n-1, \\ (f^{(n-1)})^{<1>}(x_0), & k = n. \end{cases}$$

и справедливо разложение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{<k>}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + o\big((x - x_0)^n\big) \text{ при } x \to x_0.$$

В точках a и b подразумеваются односторонние разложения и пределы.

Замечание. Определение S-дифференцируемости функции $f \in L_1[a;b]$ в точке $x_0 \in (a;b)$ иногда удобно записывать в виде

$$\frac{1}{h} \int_0^h f(x_0 + t) - \big(c + q \cdot t\big) dt = o(h) \text{ при } h \to 0.$$

1. Об S-дифференцируемости и разложении Тейлора функций нескольких переменных

Обычная дифференцируемость функции f в точке $x_0 \in \mathring{Q}_0$ (по Фреше относительно пространства $B[Q_0]$) эквивалентна равномерной дифференцируемости по всем направлениям v, исходящим из этой точки (равномерной дифференцируемости по Гато в точке x_0), см. точнее в определении ниже. Аналогичное соотношение возьмём за определение S-дифференцируемости функции нескольких переменных.

Определение 3. Функцию $f \in L_1[Q_0]$ назовём S-дифференцируемой в точке $x_0 \in \mathring{Q}_0$ ($f \in S[x_0]$), если существует алгебраический многочлен

$$P(x) = P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = c + q_1 \cdot x_1 + q_2 \cdot x_2 + \cdots + q_m \cdot x_m,$$

для которого равномерно по всем векторам v единичной сферы $\mathbb{R}^m$ выполняется

$$\frac{1}{h} \int\limits_0^h f(x_0 + t \cdot v) - P(t \cdot v) dt = o(h) \text{ при } h \to 0+. \tag{3}$$

Единственность приближающего функцию многочлена получим аналогично рассуждению предложения 1.

Предложение 2. Для функции f, точки x_0 и многочлена P из определения 3 имеют место соотношения:

i) равномерно по v, $\|v\| = 1$, существуют

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(x_0 + t \cdot v) dt = c;$$

ii) существуют

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_h\big(f(x_0 + t \cdot e_j), 0\big)}{h} = q_j, j = 1, \ldots, m,$$

где e_j — единичный вектор по оси Ox_j, и

$$\Delta_h\big(f(x_0 + t \cdot v), 0\big) = \frac{1}{h} \int_h^{2h} f(x_0 + t \cdot v) dt - \frac{1}{h} \int_0^h f(x_0 + t \cdot v) dt.$$

Доказательство. Пусть $q = (q_1, \dots, q_m)$ — набор коэффициентов при переменных многочлена P.

Равномерное по v выполнение условия (3) совпадает с тем, что равномерно по v, $\|v\| = 1$, выполняется

$$o(h) = \frac{1}{h}\int_0^h f(x_0 + t \cdot v)dt - c - \frac{h}{2} \cdot \langle q, v\rangle,$$

где $\langle q, v\rangle$ — скалярное произведение векторов q и v. Из неравенства Коши—Буняковского вытекает, что равномерно по рассматриваемым v имеет место

$$\frac{1}{h}\int_0^h f(x_0 + t \cdot v)dt = c + O(h),$$

откуда следует пункт i.

Далее, из условия (3) получаем существование функций

$$F_j(r) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^r f(x_0 + t \cdot e_j)dt,\ j = 1, \dots, m, r \geqslant 0,$$

для которых справедливы разложения:

$$F_j(r) = c \cdot r + \frac{q_j}{2} \cdot r^2 + o\big(r^2\big) \text{ при } r \to 0+.$$

Учитывая, что

$$\Delta_h\big(f(x_0 + t \cdot e_j), 0\big) = \frac{1}{h} \cdot \big(F_j(2h) - 2 \cdot F_j(h) + F_j(0)\big) = \frac{\Delta_h^2\big(F_j, 0\big)}{h},$$

получаем

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h\big(f(x_0 + t \cdot e_j), 0\big)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{q_j \cdot h^2 + \Delta_h^2\big(\gamma, 0\big)}{h^2} = q_j,\ j = 1, \dots, m,$$

где $\gamma(r) = o\big(r^2\big)$ при $r \to 0+$, $\gamma(0) = 0$. □

Пример 3. В качестве примера S-дифференцируемой функции m переменных, не дифференцируемой в обычном смысле, можно взять

$$f(x) = (\alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_m x_m^2) \cdot \sin\frac{1}{\alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_m x_m^2},\ \alpha_j \in \mathbb{R}_+,\ j = 1, \dots, m$$

($x_0 = 0$). Указанные свойства сразу вытекают из примера 2.

В дальнейшем нам потребуются простейшие утверждения о S-дифференцируемости сложной функции. Сначала рассмотрим случай одной переменной.

Предложение 3. Если функция $f \in L_1[a; b] \cap S[x_0]$, $x_0 \in (a; b)$, а функция $\varphi(r) = \lambda \cdot r + \eta$, где $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$, такова, что $\varphi(r_0) = x_0$, то функция $f\big(\varphi(r)\big) \in S[r_0]$ и

$$\Big(f\big(\varphi(r)\big)\Big)^{<1>}_{\big|r=r_0} = f^{<1>}\big(\varphi(r_0)\big) \cdot \lambda.$$

Доказательство. Пусть

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) - \big(c + q \cdot (x - x_0)\big)dx = o(h^2) \text{ при } h \to 0,\ \varphi(r) = \lambda \cdot r + \eta.$$

Если $\lambda \neq 0$, то справедлива формула замены переменной (подстановки) в интеграле Лебега. Взяв $r_0 = \varphi^{-1}(x_0)$ и $l \cdot \lambda = h$, имеем

$$o(h^2) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) - \big(c + q\cdot(x-x_0)\big)dx = \lambda \cdot \int_{r_0}^{r_0+l} f\big(\varphi(r)\big) - \big(c + q\cdot\big(\varphi(r) - \varphi(r_0)\big)\big)dr =$$

$$= \lambda \cdot \int_{r_0}^{r_0+l} f\big(\varphi(r)\big) - \big(c + q\cdot\lambda\cdot(r-r_0)\big)dr = o(l^2).$$

В случае $\lambda = 0$, учитывая что из $f \in S[x_0]$ следует $f(x_0) = \Theta[f](x_0) = c$ и $\varphi(r) \equiv \eta = x_0$, получаем $f\big(\varphi(r)\big) \equiv c$. □

Введём обозначения:

1) пусть $\|v\| = 1$, тогда при условии существования предела

$$f_v^{<1>}(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h\big(f(x_0 + t\cdot v), 0\big)}{h} \text{ — } S\text{-производная по направлению } v \text{ функции } f,$$

в частности,

$$f_{x_j}^{<1>}(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h\big(f(x_0 + t\cdot e_j), 0\big)}{h}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m; \text{ также считаем } \frac{\partial^{<1>} f}{\partial x_j}(x_0) = f_{x_j}^{<1>}(x_0);$$

2) если существуют $f_{x_j}^{<1>}(x_0)$, $j = 1, \ldots, m$, то

$$f^{<1>}(x_0) \overset{\text{def}}{=} \big(f_{x_1}^{<1>}(x_0), f_{x_2}^{<1>}(x_0), \ldots, f_{x_m}^{<1>}(x_0)\big).$$

Пусть φ_λ — линейная неоднородная векторнозначная функция, действующая из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^m$:

$$\varphi_\lambda(r) = \Big(\varphi_1(r), \varphi_2(r), \ldots, \varphi_m(r)\Big), \text{ где } \varphi_j(r) = \lambda_j \cdot r + \eta_j,\ \lambda_j, \eta_j \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \ldots, m,$$

а $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ — набор коэффициентов-множителей функции φ.

Предложение 4. Если функция $f \in L_1[Q_0] \cap S[x_0]$, $x_0 \in \mathring{Q}_0$, и линейная неоднородная векторнозначная функция $\varphi_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ такова, что $\varphi_\lambda(r_0) = x_0$, то функция $f\big(\varphi_\lambda(r)\big) \in S[r_0]$ и

$$\Big(f\big(\varphi_\lambda(r)\big)\Big)^{<1>}_{\big|r=r_0} = \Big\langle f^{<1>}(x_0), \lambda\Big\rangle.$$

Доказательство. Рассмотрим только случай, когда $\lambda \neq 0$ (см. предложение 3). S-дифференцируемость функции f в точке x_0 по предложению 2 влечёт существование $f^{<1>}(x_0)$. Покажем, что из условия предложения 4 следует соотношение

$$\int_0^l f\big(\varphi_\lambda(r_0 + s)\big) - \Big(c + \big(f_{x_1}^{<1>}(x_0)\cdot\lambda_1 + \cdots + f_{x_m}^{<1>}(x_0)\cdot\lambda_m\big)\cdot s\Big)ds = o(l^2) \text{ при } l \to 0.$$

По определению функции φ_λ и точки r_0 получаем для левой части данного соотношения:

$$\int_0^l f\big(\varphi_\lambda(r_0 + s)\big) - \Big(c + \big(f_{x_1}^{<1>}(x_0)\cdot\lambda_1 + \cdots + f_{x_m}^{<1>}(x_0)\cdot\lambda_m\big)\cdot s\Big)ds =$$

$$= \int_0^l f\big(\varphi_\lambda(r_0) + \lambda\cdot s\big) - \Big(c + \big(f_{x_1}^{<1>}(x_0)\cdot\lambda_1 + \cdots + f_{x_m}^{<1>}(x_0)\cdot\lambda_m\big)\cdot s\Big)ds = \int_0^l f\big(x_0 + \lambda\cdot s\big) - P(\lambda\cdot s)ds,$$

где P — многочлен из условия S-дифференцируемости функции f (см. формулу (3)). Применив подстановку $s = \frac{t}{\|\lambda\|}$, приходим к нужному соотношению. □

Предложение 4 тесно связано (в S-смысле) с содержанием вектора-градиента.

Следствие 1. *Если $f \in L_1[Q_0] \cap S[x_0]$, $x_0 \in \overset{\circ}{Q}_0$, то функционал $f_v^{<1>}(x_0)$ непрерывен на единичной сфере $\mathbb{R}^m$ и достигает своего наибольшего значения, равного $\|f^{<1>}(x_0)\|$, когда вектор v сонаправлен с $f^{<1>}(x_0)$.*

Переход от утверждения предложения 4 к утверждению следствия получается рассмотрением всех функций φ_λ, для которых $r_0 = 0$ и $\|\lambda\| = 1$. Данное утверждение также непосредственно следует из определения понятия $f \in S[x_0]$, $x_0 \in \overset{\circ}{Q}_0$, и определения понятия S-производной по направлению v (см. предложение 2).

Вопрос об актуальности конструкции вектора-градиента для S-дифференцируемой на множестве функции f заслуживает изучения. Отметим, что геометрический смысл (содержание) S-дифференцируемости функции одной переменной в точке в общем случае существенно отличается от геометрического смысла обычной дифференцируемости.

Рассмотрим применение S-производных к разложению Тейлора функции нескольких переменных. Для k-го дифференциала функции f, для которой он существует в обычном смысле в точке $x_0 \in \overset{\circ}{Q}_0$, будем применять стандартное обозначение:

$$\left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + dx_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^k f(x_0).$$

Теорема 3. *Пусть функция f имеет в некоторой окрестности $\overset{\circ}{D}(x_0;\delta)$ точки $x_0 \in \overset{\circ}{Q}_0$ непрерывные частные производные до порядка n включительно ($f \in C^n[\overset{\circ}{D}(x_0;\delta)]$), которые S-дифференцируемы в точке x_0, тогда в этой окрестности справедливо разложение*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(\Delta x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \Delta x_m \cdot \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^k f(x_0) +$$

$$+\frac{1}{(n+1)!} \cdot \sum_{j=1}^{m} \Delta x_j \cdot \frac{\partial^{<1>}}{\partial x_j}\left(\left(\Delta x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \Delta x_m \cdot \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^n f(x_0)\right) + o\left(\|x - x_0\|^{n+1}\right)$$

$$\text{при } x \to x_0, \text{ где } (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m) = x - x_0.$$

Доказательство. Возьмём точку $x \in \overset{\circ}{D}(x_0;\delta)$ и рассмотрим функцию

$$H(t) \overset{\text{def}}{=} f\left(x_0 + t \cdot \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\right) \overset{\text{def}}{=} f\left(x_0 + t \cdot \frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}\right), \text{ т. е. } \Delta x{=}(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m), t \in \big[0; \|\Delta x\|\big].$$

По теореме о дифференцировании сложной функции получаем

$$H'(t) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} f\left(x_0 + t \cdot \frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}\right) \cdot \frac{\Delta x_j}{\|\Delta x\|},$$

$$H^{(k)}(t) = \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \Delta x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^k f\left(x_0 + t \cdot \frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}\right) \cdot \left(\frac{1}{\|\Delta x\|}\right)^k, k = 2, \ldots, n.$$

Для функции $H \in C^n\big[0; \|\Delta x\|\big]$ справедливо одностороннее разложение Тейлора в точке 0 с остаточным членом в интегральной форме:

$$H(t) = H(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{H^{(k)}(0)}{k!} \cdot t^k + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1} \cdot H^{(n)}(\tau)d\tau}{(n-1)!}.$$

Преобразуем интеграл в правой части. Из S-дифференцируемости всех частных производных n-го порядка функции f в точке x_0 следует, что $H^{(n)}$ является S-дифференцируемой в точке 0:

$$\int_0^h H^{(n)}(\tau) - \Big(H^{(n)}(0) + \big(H^{(n)}\big)^{<1>}(0)\cdot\tau\Big)d\tau = o(h^2) \text{ при } h \to 0+.$$

Запишем возникающее под знаком интеграла соотношение в виде:

$$H^{(n)}(\tau) = H^{(n)}(0) + \big(H^{(n)}\big)^{<1>}(0)\cdot\tau + o_L\big(\tau^2\big),$$

где $o_L\big(\tau^2\big)$ обозначает функцию, интеграл от которой по отрезку $[0;h]$ даёт $o\big(h^2\big)$.

Это равносильно тому, что

$$H^{(n)}(\tau)d\tau = dH^{(n-1)}(\tau) = d\Big(\int_0^\tau H^{(n)}(r)dr\Big) = d\Big(H^{(n)}(0)\cdot\tau + \big(H^{(n)}\big)^{<1>}(0)\cdot\frac{\tau^2}{2} + o\big(\tau^2\big)\Big).$$

Следовательно,

$$\int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}\cdot H^{(n)}(\tau)d\tau}{(n-1)!} = \frac{H^{(n)}(0)}{(n-1)!}\cdot\int_0^t (t-\tau)^{n-1}d\tau +$$

$$+\frac{\big(H^{(n)}\big)^{<1>}(0)}{(n-1)!}\cdot\int_0^t (t-\tau)^{n-1}\cdot\tau d\tau + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot o_L\big(\tau^2\big)d\tau.$$

Выполнив интегрирование в правой части для первых двух слагаемых, получаем

$$\frac{H^{(n)}(0)}{n!}\cdot t^n + \frac{\big(H^{(n)}\big)^{<1>}(0)}{(n+1)!}\cdot t^{n+1}.$$

Проинтегрируем по частям третье слагаемое:

$$\int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot o_L\big(\tau^2\big)d\tau = \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\gamma_0(\tau)\Big|_0^t + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-2}}{(n-2)!}\cdot\gamma_0(\tau)d\tau, \text{ где } \gamma_0(\tau) = o\big(\tau^2\big).$$

По условию $\gamma_0(0)$=0. Значит, слагаемое перед интегралом равно нулю. Пусть далее

$$\gamma_k(\tau) = \int_0^\tau \gamma_{k-1}(r)dr, k\in\mathbb{N}, \text{ — } k\text{-ый интеграл от } o\big(\tau^2\big).$$

Каждая функция γ_k в нуле также обращается в ноль. То есть, применяя интегрирование по частям ещё $n-2$ раза, получим

$$\int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot o_L\big(\tau^2\big)d\tau = \gamma_{n-1}(t) \Longrightarrow \Big|\int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot o_L\big(\tau^2\big)d\tau\Big| \le t^{n-1}\cdot\|\gamma_0\|_{B[0;t]}.$$

Пришли к разложению:

$$H(t) = H(0) + \sum_{k=1}^n \frac{H^{(k)}(0)}{k!}\cdot t^k + \frac{\big(H^{(n)}\big)^{<1>}(0)}{(n+1)!}\cdot t^{n+1} + o\big(t^{(n+1)}\big). \tag{4}$$

Отметим, что по предложению 4 имеем в сокращённой записи

$$\big(H^{(n)}\big)^{<1>}(0) = \Big(\frac{1}{\|\Delta x\|}\Big)^{n+1}\cdot\sum_{j=1}^m \Delta x_j\cdot\frac{\partial^{<1>}}{\partial x_j}\bigg(\Big(\Delta x_1\cdot\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_m\cdot\frac{\partial}{\partial x_m}\Big)^n f(x_0)\bigg).$$

Поскольку $f(x_0)=H(0)$, $f(x)=H(\|\Delta x\|)$, то при $t=\|\Delta x\|$ формула (4) даёт разложение из утверждения теоремы:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(\Delta x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \Delta x_m \cdot \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^k f(x_0) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} \cdot \sum_{j=1}^{m} \Delta x_j \cdot \frac{\partial^{<1>}}{\partial x_j} \left(\left(\Delta x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \Delta x_m \cdot \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^n f(x_0) \right) + o\left(\|x - x_0\|^{n+1}\right).$$

По определению S-дифференцируемость частных производных n-го порядка функции f в точке x_0 означает их равномерную S-дифференцируемость по всем направлениям v, выходящим из этой точки, т. е. векторам $\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$.

Следовательно, оценка приближения функции f многочленом Тейлора — $o\left(\|x - x_0\|^{n+1}\right)$ — является равномерной по x из окрестности x_0. □

Полученное соотношение показывает, что обобщение понятия производной, а при обсуждаемом подходе это распространение производной на более обширные классы функций, влечёт распространение схемы Тейлора на соответствующие обобщения классов дифференцируемых функций. Конструкция вектора-градиента, связанная с обобщённым определением производной, может привести к алгоритмам, охватывающим ранее недоступные случаи.

References

[1] V. S. Serov, *Classical Analysis of Real-Valued Functions.* SIAM, 2023.

[2] N. J. Higham, *Functions of Matrices: Theory and Computation.* SIAM, 2008.

[3] L. L. Schumaker, *Spline Functions: Basic Theory.* Wiley, New York, 1981.

[4] L. K. Babadzanjanz, I. Y. Pototskaya, and Y. Y. Pupysheva, "Estimates for Taylor series method to linear total systems of PDEs", *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, vol. 16, no. 2, pp. 112–120, 2020.

[5] J.-H. He, L. Verma, B. Pandit, A. K. Verma, and R. P. Agarwal, "A new Taylor series based numerical method: Simple, reliable, and promising", *Journal of Applied and Computational Mechanics*, vol. 9, no. 4, pp. 1122–1134, 2023.

[6] S. Sujecki, "Extended Taylor series and interpolation of physically meaningful functions", *Optical and Quantum Electronics*, vol. 45, pp. 53–66, 2013.

[7] D. He, "Analysis of applications for Taylor series expansion: Evidence from machine learning, mathematics and engineering", in *Proceedings of the 2023 International Conference on Mathematical Physics and Computational Simulation*, 2023, pp. 216–223.

[8] Y. Tonga, S. Xionga, X. Hea, G. Pana, and B. Zhua, "Symplectic neural networks in Taylor series form for Hamiltonian systems", *Journal of Computational Physics*, vol. 437, p. 110 325, 2021.

[9] W.-H. Xu, C. McComb, and N. G. Gutiérrez, "Taylor series error correction network for super-resolution of discretized partial differential equation solutions", *Journal of Computational Physics*, vol. 521, p. 113 569, 2025.

[10] A. N. Morozov, "On computational constructions in function spaces", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 30, no. 1, pp. 28–38, 2023, in Russian.

[11] A. P. Calderon and A. Zygmund, "Local properties of solution of elliptic partial differential equation", *Studia Mathematica*, vol. 20, no. 2, pp. 171–225, 1961.

[12] A. N. Morozov, "Numerical modeling tools and s-derivatives", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 29, no. 1, pp. 20–29, 2022, in Russian.