

Algorithm for Studying the Dynamics of a Spatially Distributed Logistic Equation With Delay and Taking Into Account Migration

D. S. Kashchenko¹, D. O. Loginov¹, A. O. Tolbey¹

DOI: [10.18255/1818-1015-2025-3-242-251](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2025-3-242-251)

¹P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

MSC2020: 39A11, 34K18

Research article

Full text in Russian

Received June 30, 2025

Revised July 21, 2025

Accepted August 20, 2025

The logistic equation with delay and diffusion, which is important in mathematical ecology, is considered. It is assumed that the boundary conditions at one end of the interval $[0,1]$ contain a parameter. The question of local – in the neighborhood of the equilibrium state – dynamics of the corresponding boundary value problem for all values of the boundary condition parameters is investigated. Critical cases in the problem of stability of the equilibrium state are identified and normal forms – scalar complex ordinary differential equations of the first order – are constructed. Their nonlocal dynamics determine the behavior of solutions of the original problem in a small neighborhood of the equilibrium state.

Keywords: logistic equation; normal form; lag; dynamics; algorithm

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Kashchenko, Dmitry S.	ORCID iD: 0009-0006-1946-6806 . E-mail: d.kashchenko@uniyar.ac.ru PhD, Mathematician, Department of Computer Networks
Loginov, Dmitry O.	ORCID iD: 0000-0001-9500-8280 . E-mail: dimonl@inbox.ru Associate Professor, Department of Mathematical Modeling
Tolbey, Anna O. (corresponding author)	ORCID iD: 0000-0001-5668-3929 . E-mail: a.tolbey@uniyar.ac.ru PhD, Associate Professor, Department of Computer Networks

Funding: This work was carried out within the framework of a development programme for the Regional Scientific and Educational Mathematical Center of the Yaroslavl State University with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement on provision of subsidy from the federal budget No. 075-02-2025-1636).

For citation: D. S. Kashchenko, D. O. Loginov, and A. O. Tolbey, “Algorithm for studying the dynamics of a spatially distributed logistic equation with delay and taking into account migration”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 32, no. 3, pp. 242–251, 2025. DOI: [10.18255/1818-1015-2025-3-242-251](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2025-3-242-251).

Алгоритм исследования динамики пространственно-распределенного логистического уравнения с запаздыванием и учетом миграции

Д. С. Кащенко¹, Д. О. Логинов¹, А. О. Толбей¹

DOI: [10.18255/1818-1015-2025-3-242-251](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2025-3-242-251)

¹Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

УДК 519.7

Научная статья

Полный текст на русском языке

Получена 30 июня 2025 г.

После доработки 21 июля 2025 г.

Принята к публикации 20 августа 2025 г.

Рассматривается важное в математической экологии логистическое уравнение с запаздыванием и диффузией. Предполагается, что граничные условия на одном из концов отрезка $[0,1]$ содержат параметр. Исследован вопрос о локальной — в окрестности состояния равновесия — динамике соответствующей краевой задачи при всех значениях параметров граничных условий. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия и построены нормальные формы — скалярные комплексные обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Их нелокальная динамика определяет поведение решений исходной задачи в малой окрестности состояния равновесия.

Ключевые слова: логистическое уравнение; нормальная форма; запаздывание; динамика; алгоритм

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Кащенко, Дмитрий Сергеевич	ORCID iD: 0009-0006-1946-6806 . E-mail: d.kashchenko@uniyar.ac.ru Канд. физ.-мат. наук, математик, кафедра компьютерных сетей
Логинов, Дмитрий Олегович	ORCID iD: 0000-0001-9500-8280 . E-mail: dimonl@inbox.ru Доцент, кафедра математического моделирования
Толбей, Анна Олеговна (автор для корреспонденции)	ORCID iD: 0000-0001-5668-3929 . E-mail: a.tolbey@uniyar.ac.ru Канд. физ.-мат. наук, доцент, кафедра компьютерных сетей

Финансирование: Работа выполнена в рамках программы развития Регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение о предоставлении субсидии из федерального бюджета № 075-02-2025-1636).

Для цитирования: D. S. Kashchenko, D. O. Loginov, and A. O. Tolbey, “Algorithm for studying the dynamics of a spatially distributed logistic equation with delay and taking into account migration”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 32, no. 3, pp. 242–251, 2025. DOI: [10.18255/1818-1015-2025-3-242-251](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2025-3-242-251).

Постановка задачи

Логистическое уравнение с запаздыванием

$$\dot{v} = r[1 - v(t - 1)]v \quad (1)$$

хорошо изучено и описывает, например, динамику изменения численности биологической популяции. Все параметры в (1) положительны и рассматриваются только неотрицательные решения, т. е. $v(t) \geq 0$. Параметр r называют мальтузианским коэффициентом. Изучению уравнения (1) посвящена значительная литература (см., например, [1–7]).

Замена

$$v = u + 1$$

в (1) приводит к другой форме записи логистического уравнения с запаздыванием

$$\dot{u} = -ru(t - 1)[u + 1]. \quad (2)$$

В данной работе рассматривается логистическое уравнение с запаздыванием и диффузией

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ru(x, t - 1)(1 + u), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3)$$

и с краевыми условиями

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \gamma u|_{x=1}. \quad (4)$$

Краевая задача (3), (4) является одной из базовых моделей математической экологии [6]. Коэффициенты d и r в (3) положительны. Краевая задача (3), (4) имеет четкий биологический смысл. Она описывает, например, изменение численности популяции в случае, когда через границы возможна миграция. Эта миграция определяется коэффициентом γ .

В качестве фазового пространства краевой задачи (3), (4) фиксируем пространство $M = C_{[-1,0]} \times W_2^2[0, 1]$, т. е. начальные функции определены при $s \in [-1, 0]$, $x \in [0, 1]$ и при каждом $x \in [0, 1]$ они принадлежат $C_{[-1,0]}$, а при каждом $s \in [-1, 0]$ принадлежат $W_2^2[0, 1]$. Отметим, что специфика уравнений с запаздыванием состоит в том, что каждое решение (3), (4) с начальным условием из M можно записать в виде $u(t + s, x)$, и при каждом фиксированном $t > 0$ выполнено включение $u(t + s, x) \in M$.

При $\gamma = 0$ результаты приведены в [7]. Напомним, что при условии $0 < r < \pi/2$ нулевое решение (3), (4) экспоненциально устойчиво и при $r > \pi/2$ — неустойчиво. Воспользуемся известными результатами об инвариантных интегральных многообразиях [8–10] (наиболее подробно они приведены в [10]). Они допускают распространение на рассматриваемый класс уравнений. Из них следует, что при условии $r = \pi/2 + \varepsilon r_1$, где $0 < \varepsilon \ll 1$, в фазовом пространстве $C_{[-1,0]} \times W_2^2(0, 1)$ существует двумерное устойчивое локальное инвариантное интегральное многообразие [9, 11], на котором (3), (4) можно записать в виде

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \alpha_0 \xi + \beta_0 \xi |\xi|^2 + O(\varepsilon), \quad \text{где } \tau = \varepsilon(t + s), \alpha_0 = \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - i\right) r_1,$$

$$\beta_0 = -\frac{\pi}{2} [3\pi - 2 + i(\pi + 6)] \left(10 \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)\right)^{-1}$$

и

$$u(x, t) = \varepsilon^{1/2} \left[\xi(\varepsilon t) \exp\left(i \frac{\pi}{2} t\right) + \bar{\xi}(\varepsilon t) \exp\left(-i \frac{\pi}{2} t\right) \right] + O(\varepsilon).$$

Отсюда и из неравенства $\operatorname{Re} \beta_0 < 0$ следует, что при $r_1 < 0$ и при достаточно малых ε все решения (3), (4) из некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нуля стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, а при $r_1 > 0$ в такой окрестности существует устойчивый цикл.

Важную роль при изучении вопросов локального поведения решений (3), (4) играют свойства решений линеаризованной на нулевом состоянии равновесия краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ru(x, t-1), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \gamma x \Big|_{x=1}. \quad (5)$$

Характеристическое уравнение для этой краевой задачи получаем путем подстановки решений Эйлера

$$u(t, x) = w(x) \exp(\lambda t).$$

В результате для $w(x)$ получаем краевую задачу

$$w'' = \mu w, \quad w' \Big|_{x=0} = 0, \quad w' \Big|_{x=1} = \gamma w \Big|_{x=1}, \quad (6)$$

где

$$\mu = d^{-1}(\lambda + r \exp(-\lambda)). \quad (7)$$

Имеют место аналогии теорем А. М. Ляпунова об устойчивости по первому приближению. В случае, когда для каждого собственного значения μ краевой задачи (6) все корни уравнения (7) имеют отрицательные вещественные части, нулевое решение исходной краевой задачи (3), (4) асимптотически устойчиво и все решения из некоторой окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Этот случай интереса не представляет. Если же найдется корень (7) с положительной вещественной частью, то нулевое решение в (3), (4) неустойчиво и в малой окрестности нуля не может быть устойчивых решений. В этом случае поставленная задача перестает быть локальной и здесь не рассматривается.

Рассмотрен критический случай, когда характеристическое уравнение не имеет корней с положительной вещественной частью, но имеется корень с нулевой или близкой к нулю вещественной частью.

В разделе 1 выделен критический случай и исследованы корни соответствующего характеристического уравнения. В разделе 2 с помощью аппарата инвариантных многообразий и нормальных форм исследуется решение нелинейной краевой задачи (3), (4).

1. Линейный анализ в случае миграции на одном конце ареала

Рассмотрим линеаризованную краевую задачу (5), (6). Характеристическое уравнение для этой краевой задачи имеет вид

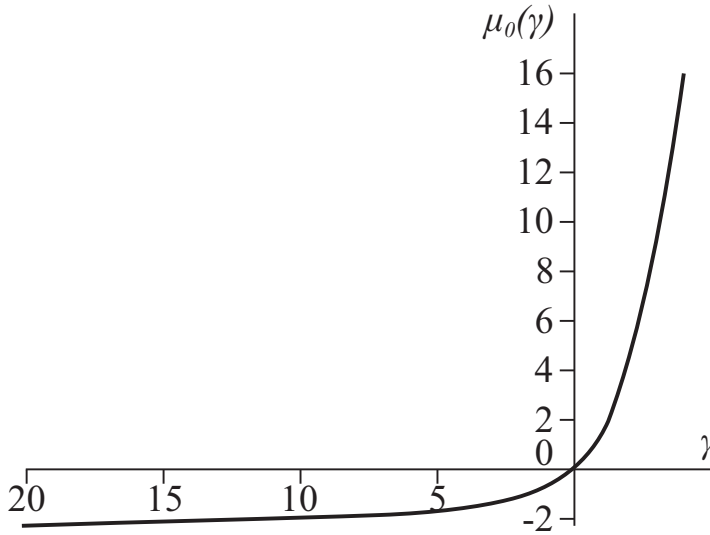
$$w'' = \mu w, \quad w' \Big|_{x=0} = 0, \quad w' \Big|_{x=1} = \gamma w \Big|_{x=1}. \quad (8)$$

Все собственные значения (8) относительно μ вещественные и их можно занумеровать в порядке убывания. Обозначим их через $\mu_0(\gamma) > \mu_1(\gamma) > \dots$. Основную роль в дальнейшем играет собственное значение $\mu_0(\gamma)$. Это следует из того, что корень относительно λ уравнения (7) с наибольшей вещественной частью определяется по наибольшему из собственных значений $\mu_j(\gamma)$, т. е. из уравнения

$$\mu_0(\gamma) = d^{-1}(\lambda + r \exp(-\lambda)). \quad (9)$$

График зависимости $\mu_0(\gamma)$ при $d = 1$ приведен на рис. 1.

Непосредственно из явных формул для $\mu_0(\gamma)$ следует, что имеют место асимптотические равенства:

Fig. 1. Graph of $\mu(\gamma)$ for $d = 1$ Рис. 1. График $\mu(\gamma)$ при $d = 1$

1. $\mu_0(\gamma) = O(\gamma^2)$ при $\gamma \rightarrow \infty$.
2. $\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \mu_0(\gamma) = -\pi^2/4$.

Рассмотрим вопрос о корнях уравнения (9) относительно комплексного значения λ . Пусть σ_0 – корень уравнения $\operatorname{tg} \sigma = -4\sigma(d\pi^2)^{-1}$, лежащий в интервале $\sigma \in (\pi/2, \pi)$. Положим

$$r^* = \sigma_0^2 + \frac{1}{16}(d\pi^2)^2.$$

Лемма 1. При условии $r > r^*$ и при любом γ уравнение (9) имеет корень с положительной вещественной частью. Если же $0 < r < r^*$, то существует и единственно такое $\gamma = \gamma(r)$, что при $\gamma < \gamma(r)$ все корни уравнения (9) имеют отрицательные вещественные части, а при $\gamma > \gamma(r)$ у (9) есть корень с положительной вещественной частью.

Доказательство этой леммы основано на нескольких простых утверждениях. Во-первых, вещественная часть корней уравнения (9) относительно λ является монотонно возрастающей функцией параметра r и монотонно убывающей параметра $|\gamma|$. Во-вторых, в пределе при $\gamma \rightarrow -\infty$ приходим к краевой задаче (10), а приведенная выше величина r^* является наименьшим положительным значением параметра r , при котором уравнение (относительно λ)

$$d^{-1}(\lambda + r \exp(-\lambda)) = \mu_0(-\infty) = -\frac{\pi^2}{4}$$

имеет корни на мнимой оси, а все остальные его корни имеют отрицательные вещественные части.

Отметим, что предельное значение $\mu_0 = -\pi^2/4$ является собственным значением краевой задачи

$$w'' = \mu w, \quad w'|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=1} = 0. \quad (10)$$

Таким образом, равенство $\gamma = \gamma(r)$ выделяет критический случай в задаче об устойчивости решений (5). При $0 < r < r^*$ и $\gamma < \gamma(r)$ нулевое состояние равновесия в (3), (4) экспоненциально устойчиво, а при $r > r^*$ или при $r < r^*$ и $\gamma > \gamma(r)$ – неустойчиво. График $\gamma(r)$ при $d = 1$ представлен на рис. 2.

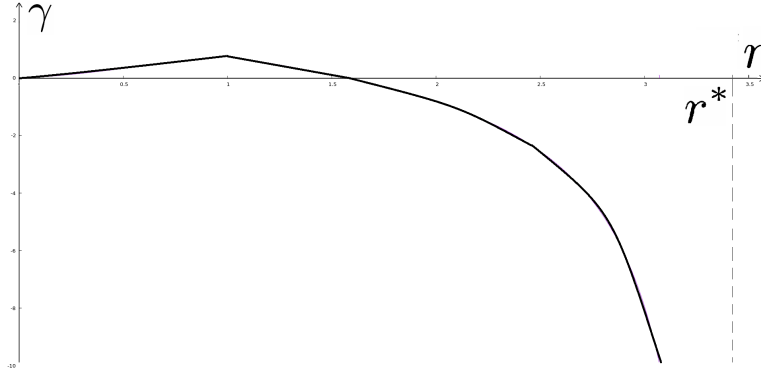

 Fig. 2. Graph of $\gamma(r)$ for $d = 1, r^* \approx 3.43$

 Рис. 2. График $\gamma(r)$ при $d = 1, r^* \approx 3.43$

Рассмотрим вопрос об асимптотике корней уравнения (7) с наибольшей вещественной частью при возмущении величины $\gamma(r)$.

Фиксируем произвольно γ_1 и положим

$$\gamma = \gamma(r) + \varepsilon\gamma_1, \text{ где } 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (11)$$

При $\varepsilon = 0$ и при $0 < r < 1$ квазиполином (9) имеет простой нулевой корень, а при $1 < r < r^*$ — пару чисто мнимых корней $\pm i\sigma$ ($\sigma > 0$), а все остальные корни (9) имеют отрицательные вещественные части.

Теперь рассмотрим более подробно случай $0 < r < r^*$. Тогда при $0 < r < 1$ и при условии (11) у (9) есть корень

$$\lambda_0(\varepsilon) = \varepsilon\lambda_1 + O(\varepsilon^2),$$

где

$$\lambda_1 = \frac{2rd^{-1}\gamma_1(\exp(2\sqrt{rd^{-1}}) + 1)(1 - \sqrt{rd^{-1}})}{(r - 1)[(\exp(2\sqrt{rd^{-1}}) - 1)\gamma_0\sqrt{rd^{-1}} + (rd^{-1} - \gamma_0)\exp(2\sqrt{rd^{-1}}) - rd^{-1} - \gamma_0]}.$$

Если $1 < r < r^*$ и выполнено условие (11), то пара комплексно сопряженных корней $\lambda_{\pm}(\varepsilon)$ ($\lambda_{-}(\varepsilon) = \lambda_{+}(\varepsilon)$) имеет асимптотику

$$\lambda_{+}(\varepsilon) = i\sigma + \varepsilon\lambda_1 + O(\varepsilon^2),$$

где

$$\lambda_1 = \frac{2\mu_0\gamma_1(\exp(2\sqrt{\mu_0}) + 1)(1 - \sqrt{\mu_0})}{(r\exp(-i\sigma) - 1)[(\exp(2\sqrt{\mu_0}) - 1)\gamma_0\sqrt{\mu_0} + (\mu_0 - \gamma_0)\exp(2\sqrt{\mu_0}) - \mu_0 - \gamma_0]},$$

$\mu_0 = \mu_0(\gamma)$. Отметим, что для собственного значения $\lambda_0(\varepsilon)$ краевой задачи Дирихле (10) при $0 < r < 1$ для λ_1 выполнено равенство

$$\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \lambda_1(\gamma) = \frac{r(d^2 - 1)}{d^2(r + 1)},$$

а при $1 < r < r^*$ имеем соотношение

$$\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \lambda_1(\gamma) = -\frac{d\pi^2}{4d^2(1 + r^*\exp(-i\sigma_0))}.$$

Приведенные выше выражения для $\lambda_1(\gamma)$ позволяют ответить на вопрос об устойчивости нулевого состояния равновесия для (3), (4). При $\text{Re}\lambda_1(\gamma) < 0$ имеем асимптотическую устойчивость, а при $\text{Re}\lambda_1(\gamma) > 0$ — неустойчивость этого состояния равновесия.

2. Нелинейный анализ при условии, когда миграция происходит только на одном конце ареала

Предположим, что выполнено условие (11). Исследуем поведение решений в некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия краевой задачи (3), (4). Соответствующие результаты приведем в виде теорем 1 и 2.

Ниже полагаем $\tau = \varepsilon t$ и через $\varphi_0(x)$ обозначим собственную функцию оператора (8), отвечающую собственному значению $\mu_0(\gamma)$: $\varphi_0(x) = \text{ch}(\mu_0^{1/2}(\gamma)x)$.

Решения нелинейной краевой задачи (3), (4) в случае, когда $0 < r < 1$, ищем в виде формального ряда

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon \xi(\tau) \varphi_0(x) + \varepsilon^2 u_2(\tau, x) + \dots, \quad (12)$$

а в случае, когда $1 < r < r^*$ — в виде

$$u(x, t, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} (\xi(\tau) \varphi_0(x) \exp(i\sigma\tau) + \bar{\xi}(\tau) \varphi_0(x) \exp(-i\sigma\tau)) + \quad (13)$$

$$+ \varepsilon u_2(t, \tau, x) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, \tau, x) + \dots \quad (14)$$

Отметим, что зависимость от аргумента t периодическая с периодом $2\pi/\sigma$. Незвестные амплитуды $\xi(\tau)$ в этих формулах подлежат определению.

Подставим выражения (12) и (13) соответственно в (3), (4) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . В случае, когда $0 < r < 1$, собирая коэффициенты при ε^2 , из условия разрешимости уравнения относительно $u_2(\tau, x)$ получим уравнение для нахождения вещественной функции $\xi(\tau)$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = b(r)\xi + c(r)\xi^2, \quad (15)$$

где

$$b(r) = -\frac{\gamma_1 \text{ch}(\sqrt{rd^{-1}})}{1-r},$$

$$c(r) = -\frac{4rd^{-1}(2\sqrt{rd^{-1}}+2)(9\text{sh}(\sqrt{rd^{-1}})+\text{sh}(3\sqrt{rd^{-1}}))}{(1-rd^{-1})(\text{sh}(2\sqrt{rd^{-1}})+2\sqrt{rd^{-1}})}.$$

Если же $1 < r < r^*$, то, собирая коэффициенты при первой степени ε , сначала находим $u_2(t, \tau, x)$. На следующем шаге, приравнявая коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, получаем уравнение для $u_3(t, \tau, x)$. Из условия его разрешимости в указанном классе функций приходим к уравнению для определения комплексной функции $\xi(\tau)$:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \alpha(r)\xi + \beta(r)\xi|\xi|^2, \quad (16)$$

где

$$\alpha(r) = -\frac{\gamma_1 \text{ch}(\sqrt{\mu_0})}{1-r \exp(-i\sigma)},$$

$$\beta(r) = -r \left\{ (1 + \exp(-i\sigma)) \left[\frac{A_1}{2\sqrt{\frac{r}{d}} \left(\frac{r}{d} - 4\mu_0 \right)} \left(\text{sh} \left(\sqrt{\frac{r}{d}} \right) \left(\frac{r}{d} \text{ch}(2\sqrt{\mu_0}) + \frac{r}{d} - 4\mu_0 \right) - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. - 2\sqrt{\mu_0 \frac{r}{d}} \text{ch} \left(\sqrt{\frac{r}{d}} \right) \text{sh}(2\sqrt{\mu_0}) \right) + \frac{A_2}{16} \left(\frac{4\text{sh}(2\sqrt{\mu_0}) + \text{sh}(4\sqrt{\mu_0})}{\sqrt{\mu_0}} + 4 \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{A_3}{4} \left(\frac{\text{sh}(2\sqrt{\mu_0})}{\sqrt{\mu_0}} + 2 \right) \Bigg] + (\exp(i\sigma) + \exp(-2i\sigma)) \left[\frac{B_1}{2\sqrt{\rho}(\rho - 4\mu_0)} \times \right. \\
 & \times (\text{sh}(\sqrt{\rho})(\rho \text{ch}(2\sqrt{\mu_0}) + \rho - 4\mu_0) - 2\sqrt{\mu_0\rho} \text{ch}(\sqrt{\rho}) \text{sh}(2\sqrt{\mu_0})) + \\
 & + \frac{B_2}{16} \left(\frac{4 \text{sh}(2\sqrt{\mu_0}) + \text{sh}(4\sqrt{\mu_0})}{\sqrt{\mu_0}} + 4 \right) + \frac{B_3}{4} \left(\frac{\text{sh}(2\sqrt{\mu_0})}{\sqrt{\mu_0}} + 2 \right) \Bigg] \times \\
 & \times \left(\frac{\text{sh}(2\sqrt{\mu_0})}{4\sqrt{\mu_0}} + \frac{1}{2} \right)^{-1},
 \end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{\gamma(A_2 \text{ch}(2\sqrt{\mu_0}) + A_3) - 2A_2\sqrt{\mu_0} \text{sh}(2\sqrt{\mu_0})}{\sqrt{\frac{r}{d}} \text{sh}(\sqrt{\frac{r}{d}}) - \gamma \text{ch}(\sqrt{\frac{r}{d}})},$$

$$A_2 = \frac{\cos(\sigma)}{4\mu_0 d - r}, \quad A_3 = -\cos(\sigma), \quad \rho = \frac{r \exp(-2i\sigma) + 2i\sigma}{d},$$

$$B_1 = \frac{\gamma(B_2 \text{ch}(2\sqrt{\mu_0}) + B_3) - 2B_2\sqrt{\mu_0} \text{sh}(2\sqrt{\mu_0})}{\sqrt{\rho} \text{sh}(\sqrt{\rho}) - \gamma \text{ch}(\sqrt{\rho})},$$

$$B_2 = \frac{r \exp(-i\sigma)}{2d(4\mu_0 - \rho)}, \quad B_3 = -\frac{r \exp(-i\sigma)}{2d\rho}.$$

Полученные на этом пути результаты сформулируем в виде теорем 1 и 2.

Теорема 1. Пусть $0 < r < 1$ и выполнено условие (11). Тогда краевая задача (3), (4) имеет в окрестности нуля устойчивое локальное одномерное интегральное многообразие, на котором (3), (4) с точностью до $O(\varepsilon)$ представима в виде ОДУ первого порядка (15).

График $c(r)$ при $d = 1$ представлен на рис. 3.

Теорема 2. Пусть $1 < r < r^*$ и выполнено условие (11). Тогда в окрестности нуля краевая задача (3), (4) имеет двумерное устойчивое инвариантное интегральное многообразие, на котором (3), (4) с точностью до $O(\varepsilon^{3/2})$ представимо в виде скалярного комплексного ОДУ (16).

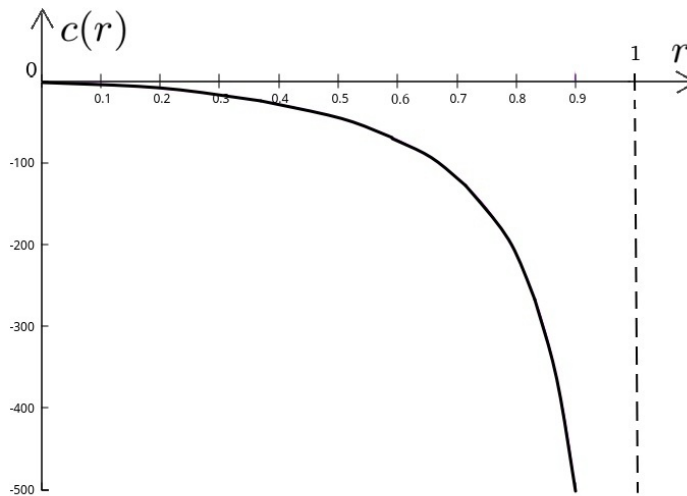


Fig. 3. Graph of $c(r)$ for $d = 1$

Рис. 3. График $c(r)$ при $d = 1$

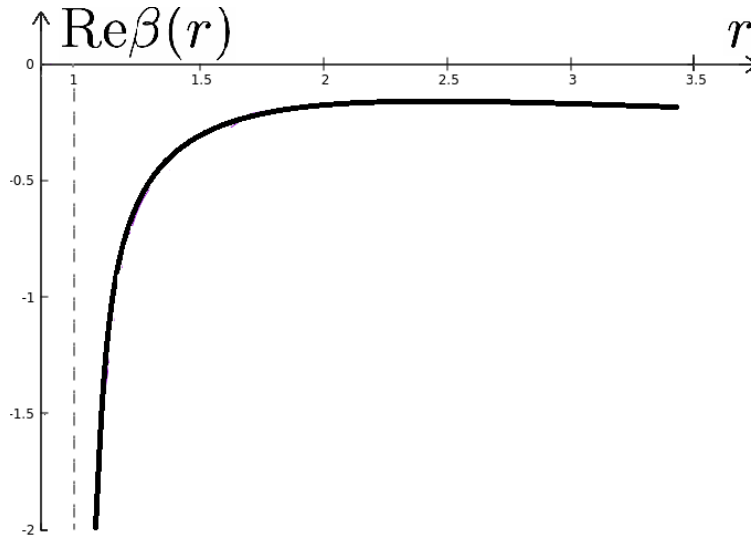
Fig. 4. Graph of $\text{Re}\beta(r)$ for $d = 1$ Рис. 4. График $\text{Re}\beta(r)$ при $d = 1$

График $\text{Re}\beta(r)$ при $d = 1$ представлен на рис. 4.

Сформулируем еще один интересный результат, который основан на вычислении коэффициентов нормальных форм на интегральном многообразии.

Положим

$$r = r^* + \varepsilon r_1, \text{ где } 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (17)$$

При этом условии и при больших γ рассмотрим вопрос о поведении решений (3), (4) в окрестности нулевого состояния равновесия. Как и в предыдущих теоремах в окрестности нуля краевой задачи (3), (4) имеется двумерное устойчивое инвариантное интегральное многообразие, на котором краевая задача (3), (4) с точностью до $O(\varepsilon^{3/2}) + O(|\gamma^{-1}|)$ представима в виде скалярного комплексного ОДУ

$$\frac{d\xi}{d\tau} = r_1 \alpha^* \xi + \beta^* \xi |\xi|^2, \quad (18)$$

где

$$\alpha^* = -(0.46 + 0.43i) + O(|\gamma^{-1}|), \quad \beta^* = -(1.07 - 0.15i) + O(|\gamma^{-1}|), \quad \tau = \varepsilon t.$$

и $u(x, t, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} (\xi(\varepsilon t) \varphi_0(x) \exp(i\sigma t) + \bar{\xi}(\varepsilon t) \varphi_0(x) \exp(-i\sigma t)) + O(\varepsilon)$.

Уравнения (15) и (16) являются нормальными формами в случаях $0 < r < 1$ и $1 < r < r^*$ соответственно. Эти нормальные формы определяют локальную динамику (3), (4) в указанных условиях. Таким образом, получаем, что при $\gamma_1 > 0$ и $0 < r < 1$ в (3), (4) устойчиво состояние равновесия $u_0(x, \varepsilon) = \varepsilon b(r) c^{-1}(r) \text{ch}(x\sqrt{\mu_0}) + O(\varepsilon^2)$, а при $1 < r < r^*$ имеется предельный цикл, определяемый из (16).

Заключение

В работе исследован случай, когда граничные условия для логистического уравнения с запаздыванием и диффузией на одном из концов отрезка $[0, 1]$ содержат параметр. Исследован вопрос о локальной — в окрестности состояния равновесия — динамике соответствующей краевой задачи при всех значениях параметра граничных условий. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия и построены нормальные формы — скалярные комплексные обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Их нелокальная динамика определяет поведение решений исходной задачи в малой окрестности состояния равновесия.

References

- [1] E. M. Wright, “A non-linear difference-differential equation”, *The Quarterly Journal of Mathematics*, vol. os-17, no. 1, pp. 245–252, 1946. DOI: [10.1093/qmath/os-17.1.245](https://doi.org/10.1093/qmath/os-17.1.245).
- [2] Y. Kuang, *Differential Equations With Applications in Population Dynamics*. Boston : Academic Press, 1993.
- [3] J. Wu, *Theory and applications of partial functional differential equations*. New York : Springer Verlag, 1996.
- [4] S. A. Kashchenko and D. O. Loginov, “Estimation of the region of global stability of the equilibrium state of the logistic equation with delay”, *Russian Mathematics*, vol. 64, no. 9, pp. 34–49, 2020. DOI: [10.3103/S1066369X20090042](https://doi.org/10.3103/S1066369X20090042).
- [5] S. A. Kashchenko, “Asymptotics of the solutions of the generalized Hutchinson equation”, *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 47, no. 7, pp. 470–494, 2013. DOI: [10.3103/S0146411613070079](https://doi.org/10.3103/S0146411613070079).
- [6] S. A. Gourley, J. W.-H. Sou, and J. H. Wu, “Nonlocality of reaction-diffusion equations induced by delay: Biological modeling and nonlinear dynamics”, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 124, no. 4, pp. 5119–5153, 2004. DOI: [10.1023/B:JOTH.0000047249.39572.6d](https://doi.org/10.1023/B:JOTH.0000047249.39572.6d).
- [7] J. E. Marsden and M. F. McCracken, *The Hopf Bifurcation and Its Applications*. New York : Springer, 1976.
- [8] S. Kakutani and L. Markus, “On the non-linear difference-differential equation $y'(t) = [A - By(t - \tau)]y(t)$ ”, *Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations*, vol. 4, pp. 1–18, 1958.
- [9] J. K. Hale, *Theory of functional differential equations. 2nd edition*. New York : Springer Verlag, 1977.
- [10] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*. Springer, 1981.
- [11] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*. New York : Wiley, 1964.