

# Modeling of a Hidden Attractor in the Chua System Based on an Analog Circuit with Operational Amplifiers

A. N. Pchelintsev<sup>1</sup>DOI: [10.18255/1818-1015-2025-4-316-328](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2025-4-316-328)<sup>1</sup>Tambov State Technical University, Tambov, Russia

MSC2020: 34D45

Research article

Full text in Russian

Received July 8, 2025

Revised October 9, 2025

Accepted October 10, 2025

In the article, the author considers an analog circuit (analog computer) in which the dynamics of voltage changes is described by the Chua system. The initial states (setting the initial voltages) are found which bring the circuit to the limit mode of operation (a hidden attractor): a stable limit cycle with a frequency of  $\approx 0.5$  Hz. In this case, the received signals have a shape close to a harmonic signal. The developed oscillation generator circuit contains seven operational amplifiers, does not have a memristor which significantly reduces the cost of assembly, inductors which eliminates the problems of their manufacture, and gyrators. The values of the resistance and capacitance ratings corresponding to the considered system parameters are determined. One of the inverters of the circuit based on the operational amplifier models the nonlinearity of the stop type, present in the Chua system, periodically entering saturation states. After assembling the device, the output signals of the circuit corresponding to the phase coordinates of the Chua system are recorded in the text file in time steps using a digital oscilloscope. The parameters of the mathematical model in the computer program developed by the author are identified, the adequacy of the model is checked by the coefficient of determination and the Fisher criterion. Also, by numerically investigating the Poisson stability of the found mode in the Chua system, the period and frequency of the obtained cycle are determined, and a comparison is made with the frequency given by the digital oscilloscope.

**Keywords:** modeling; Chua system; analog circuit; limit cycle; operational amplifier

## INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Pchelintsev, Alexander N.  
(corresponding author)

ORCID iD: [0000-0003-4136-1227](https://orcid.org/0000-0003-4136-1227). E-mail: [pchelintsev.an@yandex.ru](mailto:pchelintsev.an@yandex.ru)  
PhD, Associate Professor

**For citation:** A. N. Pchelintsev, "Modeling of a hidden attractor in the Chua system based on an analog circuit with operational amplifiers", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 32, no. 4, pp. 316–328, 2025. DOI: [10.18255/1818-1015-2025-4-316-328](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2025-4-316-328).

## Моделирование скрытого аттрактора в системе Чуа на основе аналоговой схемы с операционными усилителями

А. Н. Пчелинцев<sup>1</sup>

DOI: [10.18255/1818-1015-2025-4-316-328](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2025-4-316-328)

<sup>1</sup>Тамбовский государственный технический университет, Тамбов, Россия

УДК 519.622.2

Научная статья

Полный текст на русском языке

Получена 8 июля 2025 г.

После доработки 9 октября 2025 г.

Принята к публикации 10 октября 2025 г.

В статье рассматривается аналоговая схема (аналоговый компьютер), в которой динамика изменения напряжений описывается системой Чуа. Найдены начальные состояния (установка начальных напряжений), которые выводят схему на предельный режим работы – скрытый аттрактор – устойчивый предельный цикл с частотой  $\approx 0.5$  Гц. При этом получаемые сигналы имеют форму, близкую к гармоническому сигналу. Разработанная схема-генератор колебаний содержит семь операционных усилителей, не имеет мемристора, что дает значительное удешевление стоимости сборки; не имеет катушек индуктивности, что устраняет проблемы их изготовления, и гираторов. Определены значения номиналов сопротивлений и емкостей, соответствующих рассматриваемым параметрам системы. Один из инверторов схемы на базе операционного усилителя моделирует нелинейность типа упора, присутствующую в системе Чуа, периодически входя в состояния насыщения. После сборки устройства выходные сигналы схемы, соответствующие фазовым координатам системы Чуа, записаны в текстовый файл через шаг по времени с помощью цифрового осциллографа. Уточнены (идентифицированы) параметры математической модели в разработанной автором компьютерной программе, проверена адекватность модели по коэффициенту детерминации и критерию Фишера. Также численно исследуя устойчивость по Пуассону найденного режима в системе Чуа, определен период и частота полученного цикла, проведено сравнение с частотой, которую дает цифровой осциллограф.

**Ключевые слова:** моделирование; динамическая система Чуа; аналоговая схема; предельный цикл; операционный усилитель

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Пчелинцев, Александр Николаевич  
(автор для корреспонденции)

ORCID iD: [0000-0003-4136-1227](https://orcid.org/0000-0003-4136-1227). E-mail: [pchelintsev.an@yandex.ru](mailto:pchelintsev.an@yandex.ru)  
Канд. физ.-мат. наук, доцент

**Для цитирования:** А. Н. Пчелинцев, “Modeling of a hidden attractor in the Chua system based on an analog circuit with operational amplifiers”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 32, no. 4, pp. 316–328, 2025. DOI: [10.18255/1818-1015-2025-4-316-328](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2025-4-316-328).

## Введение

Рассмотрим кусочно-гладкую динамическую систему Чуа [1], которую запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(x_2 - \mu x_1) - \alpha d \xi(x_1, 1), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -\beta x_2 + \sigma x_3, \end{cases} \quad (1)$$

где функция

$$\xi(x_1, b) = \frac{1}{2}(|x_1 - b| - |x_1 + b|), \quad (2)$$

$\alpha, \mu = m_1 + 1, \beta, \sigma, d = m_1 - m_0, m_0$  и  $m_1$  — параметры системы.

Обычно систему (1) исследуют при значении параметров

$$\alpha = 8.4, \beta = 12, \sigma = 0.005, m_0 = -1.2, m_1 = -0.05. \quad (3)$$

В работах научной школы Г.А. Леонова и Н.В. Кузнецова (см., например, [1, 2]) установлено для (3) существование в системе Чуа *скрытых аттракторов*, т. е. притягивающих множеств, не связанных с положениями равновесия системы, к которым стремятся траектории системы при  $t \rightarrow \infty$  из некоторой их окрестности. Один из таких аттракторов — устойчивый предельный цикл, для которого указано приближение (начальные условия взяты из статьи [1]):

$$x_1(0) = 11.7546, x_2(0) = 9.7044, x_3(0) = -16.7367. \quad (4)$$

Для локализации скрытых аттракторов системы (1) в работах [1, 2] используется метод описывающей функции. Структура их бассейнов притяжения подробно описана в статье [3].

В статье [4] исследован режим (4): доказана нелокальная продолжаемость решений, вычислены оценки значений характеристических показателей Ляпунова модифицированным алгоритмом Бенеттина—Вольфа для кусочно-гладкой системы (1)

$$\tilde{\lambda}_1 \approx 0, \tilde{\lambda}_2 \approx -0.042, \tilde{\lambda}_3 \approx -8.43,$$

исследована начальная точка

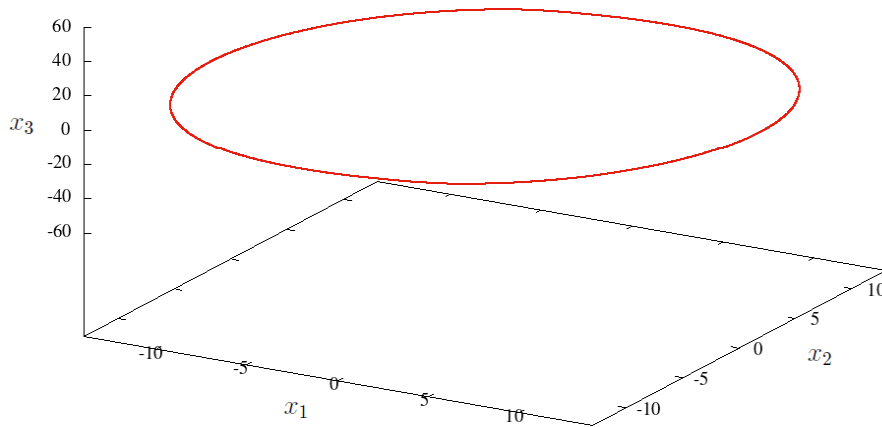
$$x_1(0) \approx 10.9948, x_2(0) \approx 9.6198, x_3(0) \approx -11.8171, \quad (5)$$

полученная на траектории, соответствующей точке (4), через большой промежуток времени и более близкая к аттрактору, на устойчивость по Пуассону. Оказалось, что средние времена возврата в окрестности начальной точки примерно равны между собой и равны периоду  $T_p \approx 1.942$  рассматриваемого периодического решения. Также приведен вид данного цикла (рис. 1).

Как видно из рис. 1, форма данного цикла близка к эллиптической форме. Следовательно, закон изменения его фазовых координат во времени близок к гармоническому закону.

Заметим, что координаты (5) приведены с точностью до 4-го знака, а период — до 3-го. Такая точность необходима, поскольку, как показали многочисленные вычислительные эксперименты, исследуемое периодическое решение достаточно медленно притягивает близкие решения, и чтобы получить один правильный знак после точки у каждой координаты в момент времени  $t = T_p$  (имеется в виду совпадение соответствующих координат в начальный момент времени и через период для точного периодического решения системы), необходимо принять данную точность.

В работе [5] впервые рассматривается аналоговое моделирование скрытых колебаний в системе (1). При этом нелинейный элемент мемристор заменен операционными усилителями, что упрощает сборку схемы. Также в цепи присутствует катушка индуктивности как базовая часть цепи Чуа.



**Fig. 1.** A limit cycle corresponding to the initial point (5)

**Рис. 1.** Предельный цикл, соответствующий начальной точке (5)

Целью данной статьи является разработка устройства-генератора (или, по-другому, аналогового компьютера) для моделирования скрытого аттрактора в системе Чуа — предельного цикла, показанного на рис. 1, т. к. описываемые им гармонические сигналы наиболее востребованы на практике, в отличие от хаотических сигналов, а также проверка адекватности математической модели на основе снятых с помощью цифрового осциллографа выходных сигналов схемы. Рассматриваемый генератор может быть использован в устройствах электромагнитного излучения низкой интенсивности, способного вызывать реакцию биосистем, которую невозможно добиться излучением относительно высокой (тепловой) мощности [6].

## 1. Необходимые расчеты и разработка схемного решения

Система (1) представлена в безразмерной форме. Для перехода к построению генератора положим, что фазовые координаты измеряются в вольтах, а время  $t$  — в секундах. Тогда коэффициенты в системе (1) будут иметь соответствующую размерность.

Автором статьи с помощью высокоточных вычислений в программе [7] на базе численного метода, описанного в статье [4], удалось вычислить для режима (5) значение положительного числа

$$M \approx 33, \quad (6)$$

которым ограничены фазовые координаты

$$|x_1(t)| \leq M, \quad |x_2(t)| \leq M, \quad |x_3(t)| \leq M$$

на отрезке времени  $[0, 100T_p]$ .

В ходе многочисленных вычислительных экспериментов удалось установить, что одной из начальных точек для выхода на регулярный режим на рис. 1 является точка (начальные условия)

$$x_1(0) = 16, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0. \quad (7)$$

На сегодняшний день аналоговые вычисления для решения дифференциальных уравнений необходимы при создании генераторов колебаний, применяемых, например, в металлодетекторах [8], для имплементации долговременной памяти на основе мемристорного эмулятора [9] и др. Элементной базой для такой техники являются вакуумные лампы, полупроводниковые элементы такие, как диоды, транзисторы, операционные усилители, аналоговые умножители [10], прямые

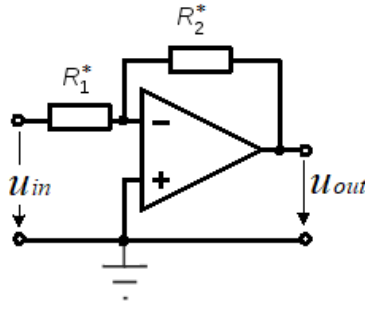


Fig. 2. Inverter connection circuit

Рис. 2. Схема включения инвертора

и обратные тригонометрические функции [11, 12]. Также отметим, что на сегодня некоторые генераторы могут быть реализованы уже в кристалле, например, на базе 180-нм технологического процесса изготовления чипов интегральных схем [13].

Сборку устройства будем осуществлять на базе полупроводниковых операционных усилителей с источником двухполярного питания  $\pm E_{supply}$ , поскольку фазовые координаты в системе (1) во времени меняют знак, а сами фазовые координаты  $x_1, x_2, x_3$  (а далее новые координаты  $y_1, y_2, y_3$ ) отвечают за выходные напряжения трех операционных усилителей в схеме, взятые между узлом схемы и средней (иногда называют нулевой) точкой источника питания.

Исходя из (6), на сегодняшний день достаточно трудно найти операционный усилитель, в котором

$$E_{supply} > M.$$

Поэтому введем замену:

$$y_1(t) = \frac{x_1(t)}{A}, \quad y_2(t) = \frac{x_2(t)}{A}, \quad y_3(t) = \frac{x_3(t)}{A}, \quad (8)$$

где  $A = A_{set} = 5$  — масштабный коэффициент. Тогда из системы (1) получим систему

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha(y_2 - \mu y_1) - \alpha d \xi(y_1, 0.2), \\ \dot{y}_2 = y_1 - y_2 + y_3, \\ \dot{y}_3 = -\beta y_2 + \sigma y_3. \end{cases} \quad (9)$$

При этом начальное условие (7) преобразуется как

$$y_1(0) = 3.2, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = 0. \quad (10)$$

Тогда первое условие соответствует ЭДС двух последовательных соединенных элементов питания АА или ААА, не использованных ранее в устройствах.

От системы (9) перейдем к системе интегральных уравнений с учетом начального условия (10):

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1(0) - \int_0^t [\alpha \mu y_1(\tau) - \alpha y_2(\tau) + \alpha d \xi(y_1(\tau), 0.2)] d\tau, \\ y_2(t) = - \int_0^t [y_2(\tau) - y_1(\tau) - y_3(\tau)] d\tau, \\ y_3(t) = - \int_0^t [\beta y_2(\tau) - \sigma y_3(\tau)] d\tau. \end{cases} \quad (11)$$

Сначала рассмотрим моделирование нелинейности — функции  $\xi(y_1, 0.2)$ .

На рис. 2 показана схема включения инвертора на базе операционного усилителя. Выходное напряжение  $u_{out}$  инвертора связано с входным напряжением  $u_{in}$  соотношением

$$u_{out}(u_{in}) = -\frac{R_2^*}{R_1^*} u_{in},$$

когда

$$-E_{sat1} \leq u_{out} \leq E_{sat2},$$

где  $E_{sat1}$  и  $E_{sat2}$  — состояния насыщения операционного усилителя. В остальных случаях операционный усилитель дает на выходе одно из состояний насыщения. При этом имеет смысл, когда

$$-E_{sat1} \leq u_{in} \leq E_{sat2}.$$

Для современных операционных усилителей можно принять (рис. 2.11 [14])

$$E_{sat1} \approx E_{sat2} = E_{sat}.$$

Тогда выходное напряжение инвертора можно записать как кусочно-заданную функцию в форме

$$u_{out}(u_{in}) = \frac{1}{2} \frac{R_2^*}{R_1^*} (|u_{in} - E_b| - |u_{in} + E_b|), \quad (12)$$

которая проверяется непосредственным раскрытием модулей, где

$$E_b = \frac{R_1^*}{R_2^*} E_{sat}.$$

Примем  $R_1^* < R_2^*$ . Тогда  $E_b < E_{sat}$ , что обеспечит работу операционного усилителя в необходимом режиме.

Перепишем соотношение (12) как

$$u_{out}(u_{in}) = \frac{E_{sat}}{0.2} \frac{1}{2} \left( \left| \frac{0.2R_2^*}{R_1^* E_{sat}} u_{in} - 0.2 \right| - \left| \frac{0.2R_2^*}{R_1^* E_{sat}} u_{in} + 0.2 \right| \right).$$

Сначала будем считать операционные усилители в схеме идеальными, т. е.

$$E_{sat} = E_{supply}.$$

Пусть  $E_{supply} = 10$  В. Тогда величины сопротивлений примем равными

$$R_1^* = 1 \text{ кОм}, \quad R_2^* = 50 \text{ кОм}.$$

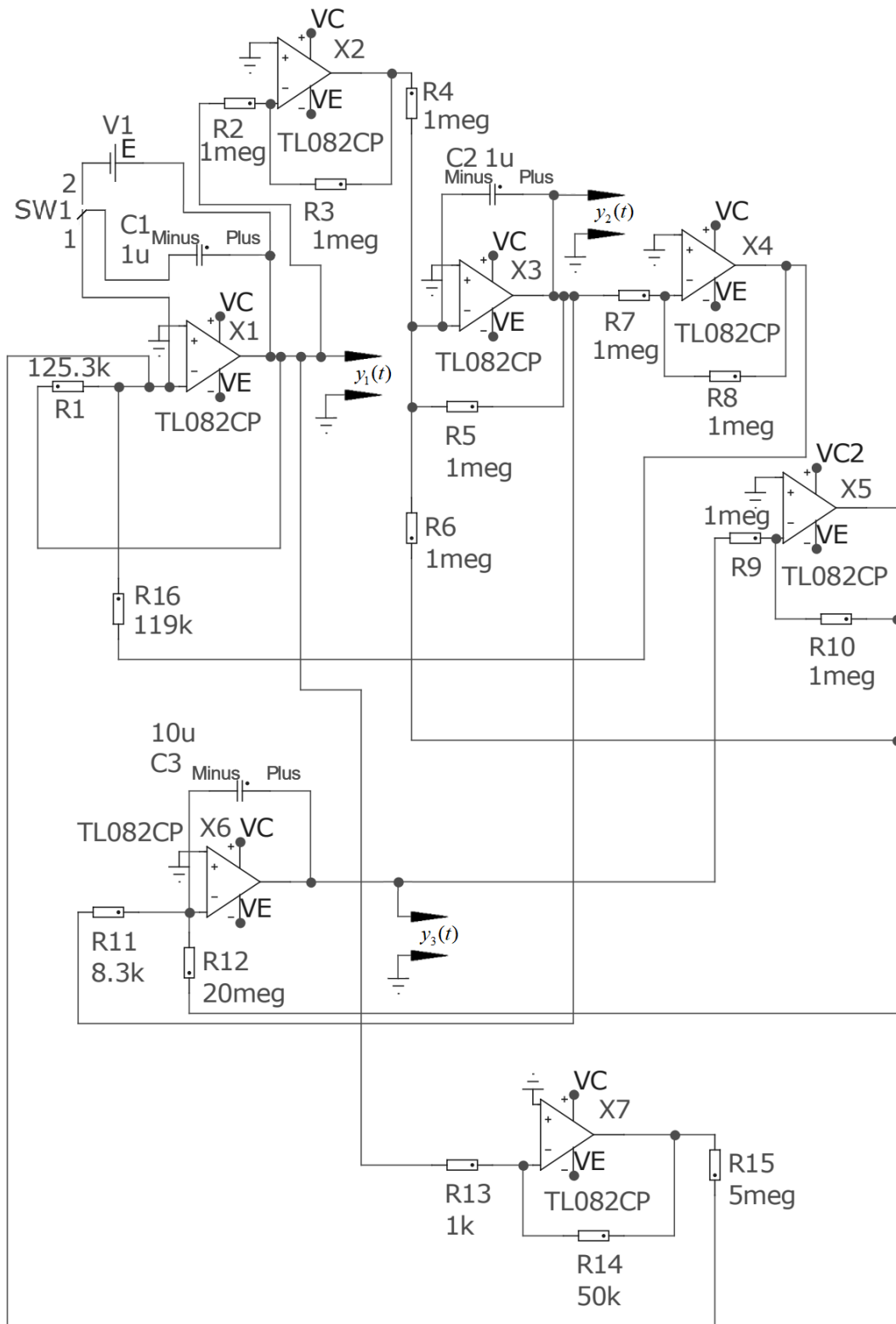
Получим

$$u_{out}(u_{in}) = 50\xi(u_{in}, 0.2).$$

Таким образом, мы имеем инвертор, переходящий в состояния насыщения при  $|u_{in}| \geq E_b$  (формула (12)), который и моделирует нелинейность типа упора [15].

Таким образом, по системе (11) и рис. 2 мы построим схему, представленную на рис. 3 в программе схемотехнического моделирования Micro-Cap 11. В данной схеме  $V_C=10$  В и  $V_E=-10$  В указывают на потенциалы источника двухполярного питания относительно средней точки источника для операционных усилителей. Отметим, что положительный вход таких усилителей также соединен со средней точкой. Все используемые микросхемы усилителей в схеме — TL082CP.

Заметим, что в уравнениях системы (11) под интегралами знаки «минус» соответствуют инверторам, а сами интегралы — интеграторам (операционные усилители X1, X3 и X6).



**Fig. 3.** Generator circuit — analog computer for solving the system (11)

**Рис. 3.** Схема генератора — аналогового компьютера для решения системы (11)

Перепишем эту систему в соответствии с приведенной схемой:

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1(0) - \frac{1}{C_1} \int_0^t \left[ \frac{y_1(\tau)}{R_1} + \frac{-\frac{R_8}{R_7} y_2(\tau)}{R_{16}} + \frac{50\xi(y_1(\tau), 0.2)}{R_{15}} \right] d\tau, \\ y_2(t) = -\frac{1}{C_2} \int_0^t \left[ \frac{y_2(\tau)}{R_5} + \frac{-\frac{R_3}{R_2} y_1(\tau)}{R_4} + \frac{-\frac{R_{10}}{R_9} y_3(\tau)}{R_6} \right] d\tau, \\ y_3(t) = -\frac{1}{C_3} \int_0^t \left[ \frac{y_2(\tau)}{R_{11}} + \frac{-\frac{R_{10}}{R_9} y_3(\tau)}{R_{12}} \right] d\tau. \end{cases} \quad (13)$$

Отметим, что

$$R_{13} = R_1^*, \quad R_{14} = R_2^*;$$

операционный усилитель X7, функционирующий в режиме инвертора, моделирует нелинейность типа упора.

Положим, что для остальных инверторов (операционные усилители X2, X4 и X5) все сопротивления равны

$$R_2 = R_3 = R_7 = R_8 = R_9 = R_{10} = 1 \text{ МОм}.$$

Величины емкостей выберем из стандартных номиналов равными

$$C_1 = C_2 = 1 \text{ мкФ}, \quad C_3 = 10 \text{ мкФ}.$$

Соответствующие конденсаторы будут неполярными электролитическими, поскольку знаки напряжений на них меняются со временем. Тогда величины остальных сопротивлений определяются из равенства параметров систем (11) и (13):

$$\frac{1}{R_1 C_1} = \alpha \mu, \quad \frac{1}{R_{16} C_1} = \alpha, \quad \frac{50}{R_{15} C_1} = \alpha d, \quad \frac{1}{R_5 C_2} = 1, \quad \frac{1}{R_4 C_2} = 1, \quad \frac{1}{R_6 C_2} = 1, \quad \frac{1}{R_{11} C_3} = \beta, \quad \frac{1}{R_{12} C_3} = \sigma.$$

Следовательно, величины сопротивлений равны

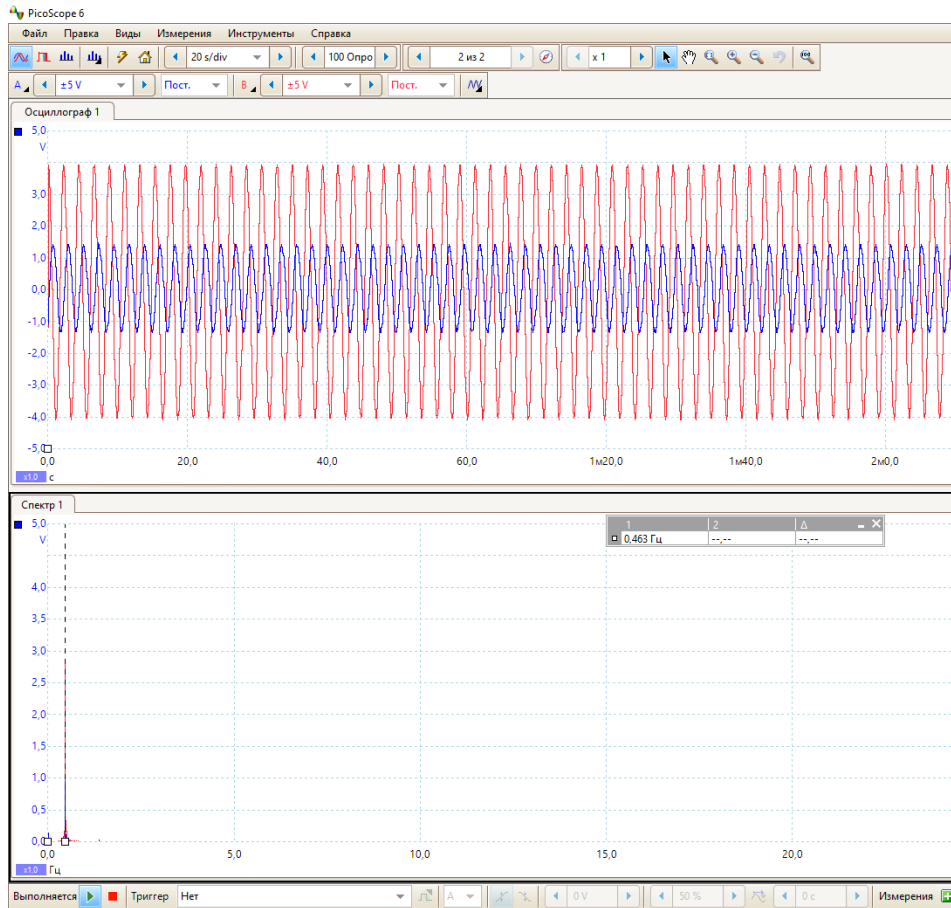
$$R_1 = 125.3 \text{ кОм}, \quad R_{16} = 119 \text{ кОм}, \quad R_4 = R_5 = R_6 = 1 \text{ МОм}, \quad R_{11} = 8.3 \text{ кОм}, \quad R_{12} = 20 \text{ МОм}, \quad R_{15} = 5 \text{ МОм}.$$

Данный выбор номиналов не вызывает избыточного потребления тока — после сборки устройства были измерены токи в цепи положительного и отрицательного питания, а также в нулевой точке (амперметр включался в разрыв цепи). Соответствующие токи изменялись от 4.81 до 4.94 мА, от -4.94 до -4.81 мА и 0 мА, что допустимо для цепей, содержащих операционные усилители.

## 2. Проведение натурных экспериментов

Поскольку моделируемые сигналы в схеме имеют сверхнизкую частоту, сборка устройства велась на макетной плате (собирался лабораторный образец). Для простоты и удобства сборки на каждый операционный усилитель на рис. 3 бралась отдельная микросхема. Сопротивления  $R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}, R_{13}$  брались как стандартные номиналы, сопротивление  $R_{12}$  — как последовательное соединение двух резисторов стандартных номиналов по 10 МОм, сопротивление  $R_{14}$  — как последовательное соединение резисторов стандартных номиналов  $2 * 20 \text{ кОм}$  и 10 кОм, сопротивление





**Fig. 4.** The oscillograms of output voltages on the 1st and 3rd channels and determination of frequency by the line spectrum on the AKIP-4107/2 oscilloscope

**Рис. 4.** Осциллограммы выходных напряжений по 1-му и 3-му каналу и определение частоты по линейчатому спектру на осциллографе АКИП-4107/2

$R_{15}$  — как параллельное соединение двух резисторов по 10 МОм, сопротивления  $R_1$ ,  $R_{11}$ ,  $R_{16}$  являются переменными резисторами.

Включение устройства осуществляется следующим образом. Сначала подается питание на все операционные усилители. При этом переключатель SW1 (рис. 3) должен находиться в положении 1, т. е. в основной схеме. Далее кратковременно он переключается в положение 2 для зарядки конденсатора C1 и возвращается в положение 1. После затухания переходного процесса на выходах  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$  устанавливаются режимы, близкие к гармоническим колебаниям. Для подключения к ним низкоомной нагрузки (например, биполярного двухцветного светодиода для иллюстрации переменного тока) после выходов необходимо установить повторители на базе тех же самых операционных усилителей, т. к. повторители обладают почти нулевым выходным сопротивлением и очень большим входным сопротивлением, т. е. для разделения цепей [16].

Заметим, что для реального операционного усилителя

$$E_{sat} < E_{supply}, \quad (14)$$

поскольку состояние насыщения зависит от сопротивления нагрузки операционного усилителя [14]. Натурные эксперименты показали (если ключ SW1 установить в положение 2 после начала генерирования периодических сигналов), что для схемы на рис. 3 разница  $E_{supply} - E_{sat}$  достигает 2 В.

Также стоит отметить отклонение реальных сопротивлений и емкостей в схеме от рассчитанных. Поэтому реальные значения коэффициентов модели (1) отличаются от значений (3).

Из неравенства (14) следует, что величина  $E_b$  может уменьшиться. Следовательно, амплитуды получаемых сигналов будут меньше тех, которые получаются в вычислительном эксперименте.

Многочисленные натурные эксперименты показали, что из-за описанных отклонений область притяжения скрытого аттрактора в системе Чуа смещается, и начальное напряжение на конденсаторе C1 можно взять равным  $E=1.6$  В (рис. 3), т. е. достаточно одного элемента питания АА или ААА.

На рис. 4 приведены осциллограммы выходных напряжений  $y_1$  и  $y_3$ , а также определение частоты предельного цикла в системе Чуа по линейчатому спектру сигнала [17] с помощью цифрового осциллографа АКПП-4107/2 в программе PicoScope 6. Данная программа позволяет записать анализируемый сигнал в текстовый файл с некоторым шагом по времени. Тогда можно произвести идентификацию параметров системы (1) по данным эксперимента, например, для  $y_3(t)$ . В качестве начальных значений ее параметров были взяты значения (3). Осуществляя численно перебор по сетке с заданными шагами, были подобраны такие значения параметров, а также масштабного коэффициента  $A$  (формула (8)), при которых коэффициент детерминации

$$R^2 = \left( 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \left( y_{3,oscill}^{(i)} - y_3(t_i) \right)^2}{\sum_{i=1}^n \left( y_{3,oscill}^{(i)} - \bar{y}_{3,oscill} \right)^2} \right) \cdot 100\% \rightarrow \max,$$

где  $y_{3,oscill}^{(i)}$  — мгновенное значение выходного напряжения по 3-ему каналу, измеренное осциллографом в момент времени  $t_i$  в вольтах;  $y_3(t_i)$  — значение функции  $y_3(t)$  в момент времени  $t_i$ , полученное из решения системы (1) высокоточным численным методом с помощью программы [7] (в статье [4] подробно описаны настройки данного метода);  $n$  — количество измерений, в нашем случае  $n = 13123$ ;

$$\bar{y}_{3,oscill} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{3,oscill}^{(i)}}{n}.$$

Полученные значения коэффициентов системы (1) и масштабного коэффициента:

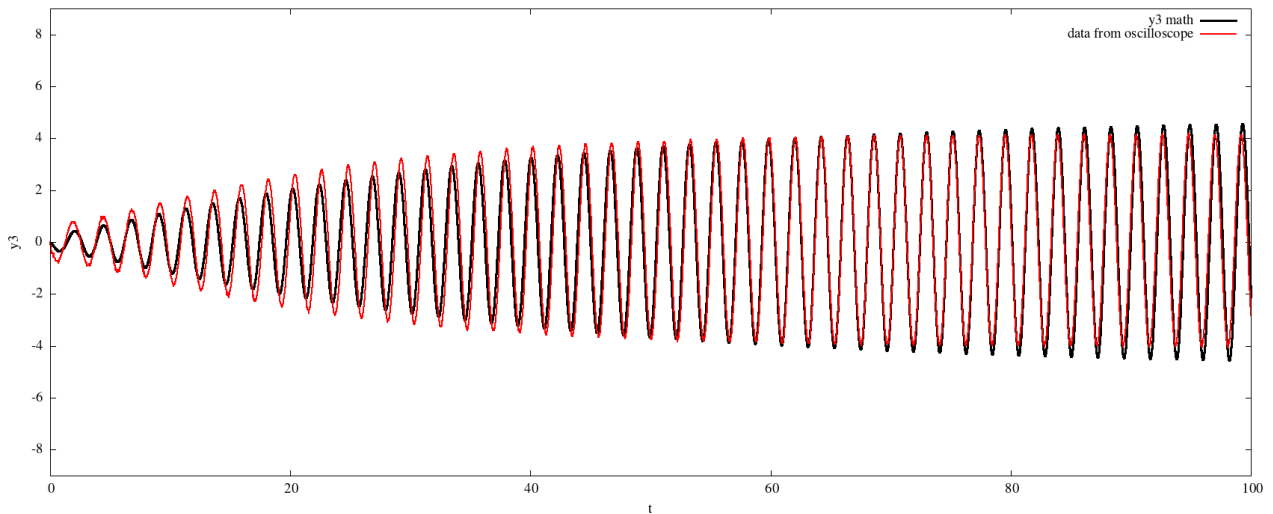
$$\alpha = 10.2, \quad \beta = 9.1, \quad \sigma = 0.007, \quad m_0 = -1.2, \quad m_1 = -0.001, \quad A = 12.2. \quad (15)$$

Коэффициент детерминации равен  $R^2 = 89\%$ , что говорит об адекватности модели;  $F$ -критерий Фишера

$$F = \frac{(n-2) \sum_{i=1}^n \left( y_3(t_i) - \bar{y}_{3,oscill} \right)^2}{\sum_{i=1}^n \left( y_{3,oscill}^{(i)} - y_3(t_i) \right)^2} = 65439 > F_{\alpha_F}(1, n-2),$$

где  $F_{\alpha_F}(1, n-2) = 10.84$  — критическое значение  $F$ -критерия, вычисленное при помощи функции `boost::math::quantile()` библиотеки Boost языка C++,  $\alpha_F$  — уровень значимости, принятый равным 0.1%. На рис. 5 представлены два графика изменения величины  $y_3(t)$  — результаты численного моделирования для системы (1) (черная кривая) и данные, снятые осциллографом, на отрезке времени  $[0, 100]$  (красная кривая).

С помощью одной из компьютерных программ комплекса [7] для параметров (15) исследовано полученное предельное решение на устойчивость по Пуассону. Вычисленное значение периода



**Fig. 5.** The graphs of the change in the value  $y_3(t)$  over the time interval  $[0, 100]$  (the model and the experiment)

**Рис. 5.** Графики изменения величины  $y_3(t)$  на отрезке времени  $[0, 100]$  (модель и эксперимент)

(параметры настройки численного метода описаны в статье [4]) равно  $T_p \approx 2.191$  с, что соответствует частоте  $f_p = 1/T_p \approx 0.456$  Гц. Из рис. 4 видно, что частота сигнала равна  $f_{oscill} = 0.463$  Гц ( $\approx 0.5$  Гц). Тогда относительная погрешность определения частоты цикла при идентификации параметров модели равна

$$\delta = \frac{|f_p - f_{oscill}|}{f_{oscill}} \cdot 100\% \approx 1.5\%.$$

В натуральных экспериментах выявлено, что с повышением  $E_{supply}$  от 10 до 15 В (следовательно, с повышением  $E_{sat}$ ) амплитуды колебаний по всем каналам возрастают, что подтверждается формулой (12) и масштабированием для системы (9).

## Заключение

В данной статье рассчитано и разработано устройство, генерирующее скрытые колебания, близкие к гармоническим с частотой  $\approx 0.5$  Гц, и реализующее аналоговые вычисления для динамической системы Чуа. Обычно для построения схем-генераторов типа Чуа используются катушки индуктивности или их замены — гираторы. Предлагаемая схема не содержит таких элементов, что позволяет обойтись без сложного изготовления стабильного схемного решения на базе катушек индуктивности. В рассматриваемой цепи также нет мемристора как такового, что удешевляет стоимость сборки. На сегодняшний день в мире ведутся разработки данных элементов памяти. Некоторые уже опубликованы и используются в цепи Чуа [18] на основе кобальтового феррита, или, например, нанокompозита и др. [19–22].

Проведена проверка адекватности математической модели — вычислены коэффициент детерминации и  $F$ -критерий Фишера, а также сравнены частоты сигналов по математической модели и из эксперимента по данным, полученным с помощью цифрового осциллографа.

Автором статьи ранее была предложена схема моделирования динамики системы Лоренца в работе [23].

Необходимо отметить, что данный генератор сверхнизкой частоты может быть применен в промышленности для повышения всхожести семян сельскохозяйственных культур, снижения микробной обсемененности сырья при подготовке сырья перед тепловой или иной обработкой в процессе производства пищевых продуктов [6].

## References

- [1] N. V. Kuznetsov, O. A. Kuznetsova, G. A. Leonov, T. N. Mokaev, and N. V. Stankevich, “Hidden attractors localization in Chua circuit via the describing function method”, *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, no. 1, pp. 2651–2656, 2017. DOI: [10.1016/j.ifacol.2017.08.470](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.470).
- [2] G. A. Leonov, N. V. Kuznetsov, and V. I. Vagaitsev, “Localization of hidden Chua’s attractors”, *Physics Letters A*, vol. 375, no. 23, pp. 2230–2233, 2011. DOI: [10.1016/j.physleta.2011.04.037](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.04.037).
- [3] N. V. Stankevich, N. V. Kuznetsov, G. A. Leonov, and C. L. O., “Scenario of the birth of hidden attractors in the Chua circuit”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 27, no. 12, p. 1 730 038, 2017. DOI: [10.1142/S0218127417300385](https://doi.org/10.1142/S0218127417300385).
- [4] A. N. Pchelintsev, “On a highly accurate numerical method for studying of the hidden attractors in the piecewise smooth Chua system”, *Mathematical Notes of NEFU*, vol. 32, pp. 113–134, 2025, in Russian.
- [5] N. Kuznetsov, T. Mokaev, V. Ponomarenko, E. Seleznev, N. Stankevich, and L. Chua, “Hidden attractors in Chua circuit: Mathematical theory meets physical experiments”, *Nonlinear Dynamics*, vol. 111, pp. 5859–5887, 2023. DOI: [10.1007/s11071-022-08078-y](https://doi.org/10.1007/s11071-022-08078-y).
- [6] E. I. Vazhenin, G. I. Kasyanov, and A. V. Grachev, “Prospects for the use of technologies using extremely low frequency electromagnetic fields in the food industry”, *Scientific journal of KubSAU*, vol. 85, no. 1, pp. 140–153, 2013, in Russian.
- [7] A. N. Pchelintsev, *The software package for numerical modeling of the dynamics of the Chua system based on parallel algorithms*, Certificate of State Registration of the Computer Program No. 2024616332. Registered in the Registry of Computer Programs by March 19, 2024. In Russian.
- [8] T. Karimov *et al.*, “Single-coil metal detector based on spiking chaotic oscillator”, *Nonlinear Dynamics*, vol. 107, pp. 1295–1312, 2022. DOI: [10.1007/s11071-021-07062-2](https://doi.org/10.1007/s11071-021-07062-2).
- [9] S. Wu *et al.*, “A fully floating memristor emulator with long-term memory”, *Integration*, vol. 99, p. 102 254, 2024. DOI: [10.1016/j.vlsi.2024.102254](https://doi.org/10.1016/j.vlsi.2024.102254).
- [10] J. V. N. Tegnitsap *et al.*, “A van der Pol-like complementary chaotic oscillator: Design, physical realizations, dynamics, and physiological data augmentation prospect”, *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 191, p. 115 886, 2025. DOI: [10.1016/j.chaos.2024.115886](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2024.115886).
- [11] J. Zhang, N. Cheng, J. Zuo, P. Wang, and X. Wei, “Design, analysis and application of Non-Hamiltonian conservative chaotic system based on memristor”, *Integration*, vol. 100, p. 102 307, 2025. DOI: [10.1016/j.vlsi.2024.102307](https://doi.org/10.1016/j.vlsi.2024.102307).
- [12] A. Devices, *Ad639 datasheet (pdf) — analog devices: Universal trigonometric function converter*. [Online]. Available: <https://www.alldatasheet.com/datasheet-pdf/view/48104/AD/AD639.html>.
- [13] Z. Duan *et al.*, “Implementation of a fully integrated memristive Chua’s chaotic circuit with a voltage-controlled oscillator”, *Integration*, vol. 99, p. 102 258, 2024. DOI: [10.1016/j.vlsi.2024.102258](https://doi.org/10.1016/j.vlsi.2024.102258).
- [14] V. K. Osadchenko and Y. Y. Volkova, *Operational Amplifiers: A Tutorial*. Ural University Publishing House, 2020, in Russian.
- [15] M. A. Krasnoselsky and A. V. Pokrovsky, *The Systems with Hysteresis*. Nauka, 1983, in Russian.
- [16] V. G. Vazhenin, Y. V. Markov, and L. L. Lesnaya, *Analog Devices on Operational Amplifiers*. Ural University Publishing House, 2014, in Russian.
- [17] A. A. Kharkevich, *Spectra and Analysis*. LIBROKOM, 2025, in Russian.

- [18] K. S. Seetala, W. Clower, M. Hartmann, and S. Zivanovic, “Physical implementation of cobalt ferrite memristor in Chua’s circuit for chaotic encryption”, *Microelectronic Engineering*, vol. 290, p. 112 194, 2024. DOI: [10.1016/j.mee.2024.112194](https://doi.org/10.1016/j.mee.2024.112194).
- [19] I. A. Surazhevsky, V. V. Rylkov, and V. A. Demin, “Compact behavioral model of a nanocomposit memristor”, *Journal of Communications Technology and Electronics*, vol. 68, pp. 1365–1370, 2023. DOI: [10.1134/S1064226923100170](https://doi.org/10.1134/S1064226923100170).
- [20] G. S. Teplov and G. E. S., “Multilevel bipolar memristor model considering deviations of switching parameters in the Verilog-A language”, *Russian Microelectronics*, vol. 48, no. 3, pp. 163–175, 2019, in Russian.
- [21] M. H. Maruf and S. I. Ali, “Review and comparative study of I-V characteristics of different memristor models with sinusoidal input”, *International Journal of Electronics*, vol. 107, no. 3, pp. 349–375, 2019. DOI: [10.1080/00207217.2019.1661021](https://doi.org/10.1080/00207217.2019.1661021).
- [22] M. Abdirash and I. Dolzhikova, *Implementation of Chua’s chaotic oscillator with an HP memristor*, 2018. arXiv: [1805.08081](https://arxiv.org/abs/1805.08081) [[cs.ET](#)].
- [23] A. N. Pchelintsev, “Numerical and physical modeling of the dynamics of the Lorenz system”, *Numerical Analysis and Applications*, vol. 7, pp. 159–167, 2014. DOI: [10.1134/S1995423914020098](https://doi.org/10.1134/S1995423914020098).