Модел. и анализ информ. систем. Т. **20**, № **3** (2013) 99–107

УДК 512.722

Семейства гладких рациональных кривых малой степени на многообразиях Фано степени 5 основной серии

Омелькова М. С.

Костромской государственный университет им. Н.А.Некрасова
156961, Россия, Кострома, ул. 1 Мая, д. 14

e-mail: masha_omelkova@mail.ru

получена 20 ноября 2012

Ключевые слова: многообразия Фано, конструкция Серра, схемы Гильберта кривых

В настоящей статье изучаются семейства гладких рациональных кривых степени 2, 3 и 4 на гладком трехмерном многообразии Фано X, являющемся линейным сечением грассманиана $G(1,4)$ прямых пространства $\mathbb{P}^4$, вложенного в пространство $\mathbb{P}^9$ по Плюкеру. Мы доказываем, что эти семейства являются неприводимыми многообразиями. Доказательство неприводимости семейств рациональных кривых степени d основано на исследовании вырождения рациональной кривой степени d в кривую, распадающуюся на неприводимую рациональную кривую степени $d-1$ и прямую, пересекающиеся трансверсально в одной точке. Доказывается, что схема Гильберта кривых степени d на X неособа в точке, соответствующей такой приводимой кривой. Затем вычисления в рамках теории деформации показывают, что такая кривая варьируется в гладкую рациональную кривую степени d. Тем самым, множество приводимых кривых степени d вышеуказанного типа лежит в замыкании единственной компоненты схемы Гильберта гладких рациональных кривых степени d на X. Из этого факта и неприводимости схемы Гильберта гладких рациональных кривых степени d на грассманиане $G(1,4)$ выводится неприводимость схемы Гильберта гладких рациональных кривых степени d на общем многообразии Фано X.

1. Введение

В настоящей статье изучаются семейства гладких рациональных кривых малой степени на гладком трехмерном многообразии Фано X, являющимся линейным сечением грассманиана $G(1,4)$ прямых пространства $\mathbb{P}^4$, вложенного в пространство $\mathbb{P}^9$ по Плюккеру:

$$X = G(1,4) \cap \mathbb{P}^6, \qquad \mathbb{P}^6 \subset \mathbb{P}^9. \tag{1}$$

Мы доказываем, что эти семейства являются неприводимыми многообразиями. Они будут использованы в следующей работе автора для описания компонент многообразий модулей стабильных векторных расслоений ранга 2 с малыми классами Черна на X посредством конструкции Серра. Основной результат статьи составляет следующая теорема.

Теорема 1. *Семейства коник, рациональных кубик и рациональных квартик на общем многообразии Фано X являются неприводимыми.*

2. Неприводимость семейств коник на X

Пусть $R_k(X)$ — база семейства гладких рациональных кривых степени k на X для $k \geq 1$. По определению,

$$R_k(X) \subset \mathrm{Hilb}^{kn+1}(X), \tag{2}$$

где $Hilb^{kn+1}(X)$ — схема Гильберта подсхем в X с многочленом Гильберта $kn+1$. Через $\bar{R}_k(X)$ будем обозначать замыкание $R_k(X)$ в $\mathrm{Hilb}^{kn+1}(X)$. Нетрудно видеть, что $R_1(X) = \bar{R}_1(X)$, где $\mathcal{F} := R_1(X)$ — база семейства прямых на X, называемая поверхностью Фано тела X. Как известно из [1, Утв. 6.6], $\mathcal{F} \simeq \mathbb{P}^2$. Введем следующее определение. Положим $R_{1,1}(X) := \{C \in \bar{R}_2(X) \mid C = l_a \cup l_b,\ l_a \pitchfork l_b = pt,\ l_a, l_b \in R_1(X)\}$, где значком $\pitchfork$ обозначим трансверсальное пересечение прямых l_a, l_b. Обозначим через $R_k(G)$ базу семейства гладких рациональных кривых степени k на $G = G(1,4)$ для $k \geq 1$. Имееет место следующее предложение [2, Theorem 2.1].

Предложение 1. $R_n(G)$ *— неприводимое многообразие размерности* $5n + 3$.

Теперь докажем следующий результат.

Предложение 2. $R_{1,1}(X)$ *неприводимо.*

Доказательство. Обозначим $\Sigma_{1,1} = \{(l_a, l_b) \in R_1(X)^{\times 2} | l_a \pitchfork l_b = pt\}$ и рассмотрим проекцию $\tau : \Sigma_{1,1} \to \bar{R}_2(X) : (l_a, l_b) \mapsto l_a \cup l_b$. По определению имеем $\tau(\Sigma_{1,1}) = R_{1,1}(X)$. Тем самым, неприводимость $R_{1,1}(X)$ следует из неприводимости $\Sigma_{1,1}$. Поэтому достаточно доказать неприводимость $\Sigma_{1,1}$. Для этого рассмотрим естественные проекции:

$$R_1(X) \xleftarrow{p_1} \Sigma_{1,1} \xrightarrow{p_2} R_1(X). \tag{3}$$

Для любого $l \in R_1$ имеем

$$p_1^{-1}(l) = \{(l, l') |\ l \pitchfork l'\text{-точка}\}. \tag{4}$$

Согласно [1, Утв. 6.6], $p_1^{-1}(l)$ — гладкая неприводимая рациональная кривая. А так как $R_1(X)$ — неприводимая поверхность и слой $p_1^{-1}(l)$ неприводим, то отсюда следует, что $\Sigma_{1,1}$ неприводимо. Следовательно, $R_{1,1}(X)$ неприводимо. □

Ниже в статье под общей точкой многообразия мы понимаем произвольную замкнутую точку этого многообразия, принадлежащую некоторому плотному открытому подмножеству в нем.

Предложение 3. $R_{1,1}(X) \subset \bar{R}_2(X)$. *При этом* $\bar{R}_2(X)$ *неособо в общей точке* $C = l_1 \cup l_2$ *многообразия* $R_{1,1}(X)$.

Доказательство. Возьмем произвольную конику $C \in R_{1,1}(X)$. По определению C распадается на две прямые l_1 и l_2 такие, что $C = l_1 \cup l_2$.

Согласно [1, Утв. 6.6] для любой прямой $l \subset X$ имеем либо
(i) $N_{l/X} \simeq 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ (общий случай), либо
(ii) $N_{l/X} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ (специальный случай).
Имеет место точная тройка пучков:

$$0 \to N'_{l_1/X} \to N_{l_1 \cup l_2/X} \to N'_{l_2/X} \to 0, \tag{5}$$

где $N_{l_1 \cup l_2/X}$ — нормальный пучок коники $l_1 \cup l_2$ в X, а нормальные пучки $N'_{l_1/X}$, $N'_{l_2/X}$ удовлетворяют точным тройкам:

$$0 \to N'_{l_1/X} \to N_{l_1/X} \to \mathbf{k}_x \to 0, \quad 0 \to N_{l_2/X} \to N'_{l_2/X} \to \mathbf{k}_x \to 0, \tag{6}$$

где $x = l_1 \cap l_2$, а $N_{l_1/X}, N_{l_2/X}$ — нормальные пучки прямых l_1, l_2 в X. Так как проекция $pr_1 : \Sigma_{1,1} \to R_1(X)$ сюръективна и поверхность Фано $R_1(X)$ неприводима, то можно считать, что для общей коники $C = l_1 \cup l_2 \in R_{1,1}(X)$ прямая l_1 удовлетворяет условию (i) выше. Тогда первая тройка из (6) дает:

$$N'_{l_1/X} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1). \tag{7}$$

Аналогично вторая тройка в (6) в обоих случаях (i) и (ii) дает:

$$N'_{l_2/X} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a),\ 0 \le a \le 1. \tag{8}$$

Из троек (5), (7) и (8) следует, что

$$h^0(N_{C/X}) = 4,\ H^0(N_{C/X}) = T_{[C]}Hilb^{2n+1}(X), \tag{9}$$

где $T_{[C]}Hilb^{2n+1}(X)$ — касательное по Зарисскому пространство в точке $[C]$ к $Hilb^{2n+1}(X)$, как к схеме Гильберта. Отсюда по теории деформации [3, Theorema 1.1] следует, что $Hilb^{2n+1}(X)$ неособо в точке $[C]$ и $\dim Hilb^{2n+1}(X) = 4$.

Возьмем произвольную конику $C \in R_{1,1}(X)$ и рассмотрим общую деформацию C' кривой C, как точки в $Hilb^{2n+1}(X)$. Возможны два случая
1) C' распадается, тогда $C' \in R_{1,1}(X)$,
2) C' — гладкая неприводимая коника, то есть $C' \in R_2(X)$.

Так как в неособой точке $[C]$ $\dim Hilb^{2n+1}(X) = 4$, а $\dim R_{1,1}(X) = 3$, то случай 1) невозможен для общей деформации C' коники $[C] \in Hilb^{2n+1}(X)$. А следовательно, $R_{1,1}(X) \subset \bar{R}_2(X)$ и $\bar{R}_2(X)$ — есть компонента схемы $Hilb^{2n+1}(X)$, содержащая точку $[C]$. □

Пусть $G(6,9)$ — грассманиан шестимерных подпространств в $\mathbb{P}^9$. Обозначим $G(6,9)^* := \{\mathbb{P}^6 \in G(6,9) |\ X := G(1,4) \cap \mathbb{P}^6$ — гладкое неприводимое трехмерное многообразие$\}$. По теореме Бертини $G(6,9)^*$ плотное открытое подмножество в $G(6,9)$. Так как $< X >= \mathbb{P}^6 \in G(6,9)^*$, где $X = \mathbb{P}^6 \cap G(1,4)$, то вместо обозначения $\mathbb{P}^6 \in G(6,9)^*$ можно без ущерба для строгости писать $X \in G(6,9)^*$.

Предложение 4. *Для общего $X \in G(6,9)^*$ семейство $\bar{R}_2(X)$ неприводимо.*

Доказательство. Пусть $\Gamma := \{(C,X) \in R_2(G) \times G(6,9)^* |\ C \subset X\}$. Обозначим через q_1 проекцию Γ на $R_2(G)$, а через q_2 проекцию Γ на $G(6,9)^*$. Согласно предложению 1, $R_2(G)$ — неприводимое многообразие размерности 13.

Нетрудно видеть, что множество шестимерных подпространств в $\mathbb{P}^9$, проходящих через конику C, есть грассманиан $G(3,6)$, естественным образом лежащий в грассманиане $G(6,9)$. Возьмем произвольную конику $C \in R_2(G)$. Тогда слой $q_1^{-1}(C)$ равен $G(3,6)^* := G(6,9)^* \cap G(3,6)$. По теореме Бертини $G(3,6)^*$ — открытое плотное подмножество в $G(3,6)$, а значит, $G(3,6)^*$ неприводимо. Следовательно, Γ неприводимо ввиду неприводимости $R_2(G)$.

Обозначим через $\bar{\Gamma}$ замыкание Γ в $\bar{R}_2(G) \times G(6,9)^*$, а $\bar{q_2}(X) : \bar{\Gamma} \to G(6,9)^*$ — проекция. Тогда для произвольного $X \in G(6,9)^*$ слой $\bar{q_2}^{-1}(X)$ есть $\bar{R}_2 := \bar{R}_2(X)$. Заметим, что в силу предложения 3 $R_{1,1}(X)$ лежит в $\bar{R}_2(X)$ и $\bar{R}_2(X)$ неособо в общей точке $R_{1,1}(X)$.

Докажем, что через $R_{1,1}(X)$ не может проходить более одной компоненты $\bar{R}_2(X)$. Действительно, допустим противное. Пусть есть две различные компоненты A и B множества $\bar{R}_2(X)$, содержащие $R_{1,1}(X)$. Тогда размерность касательного пространства в точке $C \in R_{1,1}$ объединения $A \cup B$ больше размерности каждой из компонент A и B, а значит $T_{[C]} A \cup B > \dim \bar{R}_2(X)$. Тем самым, любая точка $C \in R_{1,1}(X)$ — особая на $\bar{R}_2(X)$, вопреки предложению 3. Отсюда следует, что существует единственная неприводимая компонента $\bar{R}_2^+(X)$ многообразия $\bar{R}_2(X)$, содержащая $R_{1,1}(X)$.

Допустим, что для общего $X \in G(6,9)^*$ семейство $\bar{R}_2(X)$ приводимо, т.е. $\bar{R}_2^+(X)$ — не единственная компонента $\bar{R}_2(X)$. Обозначим через $\bar{R}_2'(X)$ объединение всех неприводимых компонент $\bar{R}_2(X)$, отличных от $\bar{R}_2^+(X)$, и пусть $\bar{\Gamma}_+ := \bigcup_{X \in G(6,9)^*} \bar{R}_2^+(X)$ и $\bar{\Gamma}' := \bigcup_{X \in G(6,9)^*} \bar{R}_2'(X)$. Тогда $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_+ \cup \bar{\Gamma}'$ есть разложение $\bar{\Gamma}$ на две компоненты (где $\bar{\Gamma}'$ не обязательно неприводима), вопреки неприводимости $\bar{\Gamma}$. Следовательно, $\bar{R}_2(X)$ неприводимо. □

3. Неприводимость семейств рациональных кубик на X

Определение 1. *Цепью прямых в X назовем кривую $C = \bigcup\limits_{1 \le i \le r} l_i$ в X, где $l_1, ..., l_r$ — прямые, удовлетворяющие условиям: $A_i = l_i \cap l_{i+1}$, $1 \le i \le r-1$, — различные точки, и других пересечений прямых l_i нет.*

Пусть $R_{1,1,1}(X) := \{C \in \bar{R}_3(X) \mid C = l_a \cup l_b \cup l_c$ – цепь прямых, $l_a, l_b, l_c \in R_1(X)\}$

Предложение 5. *$R_{1,1,1}$ неприводимо.*

Доказательство. Обозначим $\Sigma_{1,1,1} = \{(C,l) \in R_{1,1}(X) \times R_1(X) |\ C \cap l = \{x\}$ — неособая точка на $C\}$. Рассмотрим отображение $\tau : \Sigma_{1,1,1} \to \bar{R}_3(X) : (C,l) \mapsto C \cup l$. Нетрудно видеть, что $\tau(\Sigma_{1,1,1}) = R_{1,1,1}(X)$ – накрытие степени 2. Докажем неприводимость $\Sigma_{1,1,1}$, из которой будет следовать неприводимость $R_{1,1,1}(X)$.

Рассмотрим отображение $\theta : \Sigma_{1,1,1} \to \Sigma_{1,1} : (l_1 \cup l_2, l) \mapsto (l_1, l_2)$, где l_2 — та из двух прямых в паре l_1, l_2, которую пересекает прямая l. Слоем отображения θ является $\theta^{-1}(l_1, l_2) = \{(l_1 \cup l_2, l) | l \cap l_2 = \{pt\}\}$ — неприводимая кривая согласно [1, Доказательство утв. 6.6]. Следовательно, слой $\theta^{-1}(l_1, l_2)$ неприводим, а неприводимость $\Sigma_{1,1}$

получена в доказательстве предложения 2. А это означает, что $\Sigma_{1,1,1}$ неприводимо, а значит, и $R_{1,1,1}(X)$ – неприводимое многообразие. □

Предложение 6. $R_{1,1,1}(X) \subset \bar{R}_3(X)$. *При этом* $\bar{R}_3(X)$ *неособо в общей точке* $C = l_1 \cup l_2 \cup l_3$ *многообразия* $R_{1,1,1}(X)$.

Доказательство. Возьмем произвольную кубику $C \in R_{1,1,1}(X)$. По определению $C = l_1 \cup l_2 \cup l_3$ — цепь из трех прямых, и пусть $x = l_1 \cap l_2$.

Согласно [1, Утв. 6.6] для любой прямой $l \subset X$ имеем либо
(i) $N_{l/X} \simeq 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ (общий случай), либо
(ii) $N_{l/X} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ (специальный случай).
Имеет место точная тройка:

$$0 \to N'_{l_1/X} \to N_{C/X} \to N'_{l_2 \cup l_3/X} \to 0, \tag{10}$$

где $N_{C/X}$ — нормальный пучок кубики C в X, а $N'_{l_1/X}$, $N'_{l_2 \cup l_3/X}$ удовлетворяют точным тройкам:

$$0 \to N'_{l_1/X} \to N_{l_1/X} \to \mathbf{k}_x \to 0, \quad 0 \to N_{l_2 \cup l_3/X} \to N'_{l_2 \cup l_3/X} \to \mathbf{k}_x \to 0. \tag{11}$$

По аналогии с (9) имеем $h^0(N_{l_2 \cup l_3/X}) = 4$, $h^1(N_{l_2 \cup l_3/X}) = 0$. Отсюда и из второй тройки в (11) имеем $h^0(N'_{l_2 \cup l_3/X}) = 5$, $h^1(N'_{l_2 \cup l_3/X}) = 0$. Первая тройка из (11) в обоих случаях (i) и (ii) дает $h^0(N_{l_1}/X) = 2$, а следовательно, $h^0(N'_{l_1}/X) = 1$. Тогда из тройки (10) получим:

$$h^0(N_{C/X}) = \dim T_{[C]} Hilb^{3n+1}(X),\ h^1(N_{C/X}) = 0. \tag{12}$$

Отсюда по теории деформации следует, что $Hilb^{3n+1}(X)$ неособо в точке $[C]$ и $\dim_{[C]} Hilb^{3n+1}(X) = 6$.

Возьмем произвольную кубику $C \in R_{1,1,1}(X)$ и рассмотрим общую деформацию C' кривой C, как точки в $Hilb^{3n+1}(X)$. Возможны три случая
1) C' распадается на цепь прямых, тогда $C' \in R_{1,1,1}(X)$,
2) $C' \in R_{2,1}(X) := \{C \in Hilb^{3n+1}(X) | C$ распадается на конику и прямую, пересекающиеся в точке$\}$.
3) C' — гладкая неприводимая кубика, то есть $C' \in R_3(X)$.

Так как в неособой точке $[C]$ $\dim Hilb^{3n+1}(X) = 6$, а $\dim R_{1,1,1}(X) = 4$ и $\dim R_{2,1}(X) = 5$, то случаи 1) и 2) невозможены для общей деформации C' коники $[C] \in Hilb^{2n+1}(X)$. Следовательно, $R_{1,1,1}(X) \subset \bar{R}_3(X)$ и $\bar{R}_3(X)$ есть компонента схемы $Hilb^{3n+1}(X)$, содержащая точку $[C]$. □

Предложение 7. *Для общего* $X \in G(6,9)^*$ *семейство* $\bar{R}_3(X)$ *неприводимо.*

Доказательство. Пусть $\Gamma = \{(C, X) \in R_3(G) \times G(6,9)^* | C \subset X\}$. Обозначим через q_1 проекцию Γ на первый множитель, а через q_2 — на второй. Согласно предложению 1, $R_3(G)$ – неприводимое многообразие размерности 18.

Возьмем произвольную кубику $C \in R_3(G)$. Нетрудно видеть, что множество шестимерных подпространств в $\mathbb{P}^9$, проходящих через кубику C, есть грассманиан $G(2,5)$, естественным образом лежащий в грассманиане $G(6,9)$. Тогда слой $q_1^{-1}(C)$

равен $G(2,5)^* := G(6,9)^* \cap G(2,5)$. Здесь $G(2,5)^*$ — открытое плотное подмножество в $G(2,5)$, а значит, $G(2,5)^*$ неприводимо. Следовательно, Γ неприводимо ввиду неприводимости $R_3(G)$.

Обозначим через $\bar{\Gamma}$ замыкание Γ в $\bar{R}_3(G) \times G(6,9)^*$, и пусть $\bar{q}_2 : \bar{\Gamma} \to G(6,9)^*$ — проекция. Тогда для произвольного $X \in G(6,9)^*$ слой $\bar{q}_2{}^{-1}(X)$ есть $\bar{R}_3(X)$. Заметим, что в силу предложения 6 $R_{1,1,1}(X)$ лежит в $\bar{R}_3(X)$ и $\bar{R}_3(X)$ неособо в произвольной точке из $R_{1,1,1}(X)$.

Заметим,что через неособую точку в $\bar{R}_3(X)$ не может проходить более одной компоненты $\bar{R}_3(X)$. Отсюда и из предложения 6 следует, что существует единственная неприводимая компонента $\bar{R}_3(X)^+$ в $\bar{R}_3(X)$, содержащая $R_{1,1,1}(X)$.

Допустим, что для общего $X \in G(6,9)^*$ семейство $\bar{R}_3(X)$ приводимо, т.е. $\bar{R}_3^+(X)$ — не единственная компонента $\bar{R}_3(X)$. Обозначим через $\bar{R}'_3(X)$ ообъединение всех неприводимых компонент $\bar{R}_3(X)$, отличных от $\bar{R}_3^+(X)$, и пусть $\bar{\Gamma}_+ := \bigcup_{X \in G(6,9)^*} \bar{R}_3^+(X)$ и $\bar{\Gamma}' := \bigcup_{X \in G(6,9)^*} \bar{R}'_3(X)$. Тогда $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_+ \cup \bar{\Gamma}'$ есть разложение $\bar{\Gamma}$ на две компоненты (где $\bar{\Gamma}'$ не обязательно неприводима), вопреки неприводимости $\bar{\Gamma}$. Следовательно, $\bar{R}_3(X)$ неприводимо. □

4. Неприводимость семейств рациональных квартик на X

Обозначим $R_{1,1,1,1}(X) := \{C \in \bar{R}_4(X) \mid C = l_a \cup l_b \cup l_c \cup l_d$ — цепь прямых $l_a, l_b, l_c, l_d \in R_1(X)\}$.

Предложение 8. $R_{1,1,1,1}(X)$ *неприводимо.*

Доказательство. Обозначим $\Sigma_{1,1,1,1} = \{(C,l) \in R_{1,1,1} \times R_1(X) | \ C \cup l$ — цепь прямых$\}$. Рассмотрим отображение $\tau : \Sigma_{1,1,1,1} \to \bar{R}_4(X) : (C,l) \mapsto C \cup l$. Нетрудно видеть, что τ — сюръективное накрытие степени 2 и $\tau(\Sigma_{1,1,1,1}) = R_{1,1,1,1}(X)$. Докажем неприводимость $\Sigma_{1,1,1,1}$, из которой будет следовать неприводимость $R_{1,1,1,1}(X)$. Рассмотрим отображение $\theta : \Sigma_{1,1,1,1} \to \Sigma_{1,1,1} : (l_1 \cup l_2 \cup l_3, l) \mapsto (l_1 \cup l_2, l_3)$, где l_3 — та из трех прямых в тройке (l_1, l_2, l_3), которую пересекает прямая l. Слоем отображения θ согласно [1, Утв. 6.6] является неприводимая рациональная кривая $\theta^{-1}(l_1 \cup l_2, l_3) = \{(l_1 \cup l_2 \cup l_3, l) | l \cap l_3 = \{pt\}\}$. Следовательно, этот слой неприводим. Кроме того, неприводимость $\Sigma_{1,1,1}$ доказана в предложении 5. Отсюда следует, что $\Sigma_{1,1,1,1}$ неприводимо. □

Предложение 9. $R_{1,1,1,1}(X) \subset \bar{R}_4(X)$. *При этом* $\bar{R}_4(X)$ *неособо в общей точке* $C = l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup l_4$ *многообразия* $R_{1,1,1,1}(X)$.

Доказательство. Возьмем произвольную кубику $C \in R_{1,1,1,1}(X)$. По определению C распадается на четыре прямые l_1, l_2, l_3 и l_4.

Согласно [1, Утв. 6.6] для любой прямой $l \subset X$ имеем либо
(i) $N_{l/X} \simeq 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ (общий случай), либо
(ii) $N_{l/X} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ (специальный случай).
Имеет место точная тройка:

$$0 \to N'_{l_1/X} \to N_{C/X} \to N'_{l_2 \cup l_3 \cup l_4/X} \to 0, \tag{13}$$

где $N_{C/X}$ — нормальный пучок квартики C в X, а $N'_{l_1/X}$, $N'_{l_2\cup l_3\cup l_4/X}$ удовлетворяют точным тройкам:

$$0 \to N'_{l_1/X} \to N_{l_1/X} \to \mathbf{k}_x \to 0, \quad 0 \to N_{l_2\cup l_3\cup l_4/X} \to N'_{l_2\cup l_3\cup l_4/X} \to \mathbf{k}_x \to 0, \ x = l_1 \cap l_2 \tag{14}$$

По аналогии с (12) имеем $h^0(N_{l_2\cup l_3\cup l_4/X}) = 6$, $h^1(N_{l_2\cup l_3\cup l_4/X}) = 0$. Отсюда и из второй тройки в (14) $h^0(N'_{l_2\cup l_3\cup l_4/X}) = 7$, $h^1(N'_{l_2\cup l_3\cup l_4/X}) = 0$. Первая тройка из (14) в обоих случаях (i) и (ii) дает $h^0(N_{l_1}/X) = 2$, следовательно, $h^0(N'_{l_1}/X) = 1$. Тогда из тройки (13) получим:

$$h^0(N_{C/X}) = \dim T_{[C]} Hilb^{4n+1}(X), \ h^1(N_{C/X}) = 0, \tag{15}$$

Отсюда по теории деформации следует, что $Hilb^{4n+1}(X)$ неособо в точке $[C]$. Следовательно, $\dim Hilb^{4n+1}(X) = 8$.

Возьмем произвольную квартику $C \in R_{1,1,1,1}(X)$ и рассмотрим общую деформацию C' кривой C, как точки в $Hilb^{4n+1}(X)$. Возможны шесть случаев
1) C' распадается на цепь прямых, тогда $C' \in R_{1,1,1,1}(X)$,
2) $C' \in R'_{2,1,1}(X) := \{C \in Hilb^{4n+1}(X) | C$ распадается на конику и две прямые, пересекающие конику каждая только в одной точке$\}$.
3) $C' \in R''_{2,1,1}(X) := \{C \in Hilb^{4n+1}(X) | C$ распадается на конику и две прямые, одна из которых пересекает конику в одной точке и пересекает вторую прямую$\}$.
4) $C' \in R_{2,2}(X) := \{C \in Hilb^{4n+1}(X) | C$ распадается на две коники, пересекающиеся в одной точке $\}$.
5) $C' \in R_{3,1}(X) := \{C \in Hilb^{4n+1}(X) | C$ распадается на кубику и прямую, пересекающиеся в одной точке $\}$
6) C' — гладкая неприводимая квартика, то есть $C' \in R_4(X)$.

Так как в неособой точке $[C]$ $\dim Hilb^{4n+1}(X) = 8$, а $\dim R_{1,1,1,1}(X) = 5$ и $\dim R'_{2,1,1}(X) = \dim R''_{2,1,1}(X) = 6$ и $\dim R_{3,1}(X) = \dim R_{2,2}(X) = 7$, то случаи 1) – 5) невозможны, следовательно, $R_{1,1,1,1}(X) \subset \bar{R}_4(X)$ и $\bar{R}_3(X)$ — есть компонента схемы $Hilb^{3n+1}(X)$, содержащая точку $[C]$. □

Предложение 10. *Для общего $X \in G(6,9)^*$ семейство $\bar{R}_4(X)$ неприводимо.*

Доказательство. Пусть $\Gamma = \{(C, X) \in R_4(G) \times G(6,9)^* | C \subset X\}$. Обозначим через q_1 проекцию Γ на первый множитель, а через q_2 — на второй. Согласно предложению 1, $R_4(G)$ – неприводимое многообразие размерности 23.

Нетрудно видеть, что множество шестимерных подпространств в $\mathbb{P}^9$, проходящих через квартику C, есть грассманиан $G(1,4)$, естественным образом лежащий в грассманиане $G(6,9)$. Возьмем произвольную квартику $C \in R_4(G)$. Тогда слой $q_1^{-1}(C)$ равен $G(1,4)^* := G(6,9)^* \cap G(1,4)$. Здесь $G(1,4)^*$ — открытое плотное подмножество в $G(1,4)$, а значит, $G(1,4)^*$ неприводимо. Следовательно, Γ неприводимо ввиду неприводимости $R_4(G)$.

Обозначим через $\bar{\Gamma}$ замыкание Γ в $\bar{R}_4(G) \times G(6,9)^*$, и пусть $\bar{q}_2 : \bar{\Gamma} \to G(6,9)^*$ — естественная проекция. Тогда для произвольного $X \in G(6,9)^*$ слой $\bar{q}_2{}^{-1}(X)$ есть $\bar{R}_4(X)$. Заметим, что в силу предложения 9, $R_{1,1,1,1}(X)$ лежит в $\bar{R}_4(X)$ и $\bar{R}_4(X)$ неособо в произвольной точке из $R_{1,1,1,1}(X)$.

Заметим,что через неособую точку в $\bar{R}_4(X)$ не может проходить более одной компоненты $\bar{R}_4(X)$. Отсюда следует, что существует единственная неприводимая компонента $\bar{R}_4(X)^+$, содержащая $R_{1,1,1,1}(X)$.

Допустим, что для общего $X \in G(6,9)^*$ семейство $\bar{R}_4(X)$ приводимо, т.е. $\bar{R}_4^+(X)$ — не единственная компонента $\bar{R}_4(X)$. Обозначим через $\bar{R}_4'(X)$ ообъединение всех неприводимых компонент $\bar{R}_4(X)$, отличных от $\bar{R}_4^+(X)$, и пусть $\bar{\Gamma}_+ := \bigcup_{X \in G(6,9)^*} \bar{R}_4^+(X)$ и $\bar{\Gamma}' := \bigcup_{X \in G(6,9)^*} \bar{R}_4'(X)$. Тогда $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_+ \cup \bar{\Gamma}'$ есть разложение $\bar{\Gamma}$ на две компоненты (где $\bar{\Gamma}'$ не обязательно неприводима), вопреки неприводимости $\bar{\Gamma}$. Следовательно, $\bar{R}_4(X)$ неприводимо. □

Из предложений 4, 7 и 10 вытекает искомая теорема 1.

Список литературы

1. *Исковских В.А.* Трехмерные многообразия Фано. I // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41, № 3. С. 516–562. (English transl.: *Iskovskikh V. A.* Fano 3-folds. I // Mathematics of the USSR-Izvestiya. 1978. V. 12:3. P. 469–506.)

2. *Stromme S.A.* On parametrized rational curves in Grassmann varieties // Lectures Notes in Math. **1266**. Springer, 1987. P. 251–272.

3. *Hartshorne R.* Deformation Theory. Springer, 2010.

Families of Smooth Rational Curves of Small Degree on the Fano Variety of Degree 5 of Main Series

Omelkova M. S.

Kostroma State University,
1 May str., 14, Kostroma, 156961, Russia

Keywords: Fano varieties, moduli space of vector bundles, Serre construction, Hilbert scheme of curves.

In this paper we consider some families of smooth rational curves of degree 2, 3 and 4 on a smooth Fano threefold X which is a linear section of the Grassmanian $G(1,4)$ under the Plücker embedding. We prove that these families are irreducible. The proof of the irreducibility of the families of curves of degree d is based on the study of degeneration of a rational curve of degree d into a curve which decomposes into an irreducible rational curve of degree $d-1$ and a projective line intersecting transversally at a point. We prove that the Hilbert scheme of curves of degree d on X is smooth at the point corresponding to such a reducible curve. Then calculations in the framework of deformation theory show that such a curve varies into a smooth rational curve of degree d. Thus, the set of reducible curves of degree d of the above type lies in the closure of a unique component of the Hilbert scheme of smooth rational curves of degree d on X. From this fact and the irreducibility of the Hilbert scheme of smooth rational curves of degree d on the Grassmannian $G(1,4)$ one deduces the irreducibility of the Hilbert scheme of smooth rational curves of degree d on a general Fano threefold X.

Сведения об авторе:
Омелькова Мария Сергеевна,
Костромской государственный университет им. Н. А. Некрасова,
ассистент кафедры высшей математики