Модел. и анализ информ. систем. Т. **19**, № **2** (2012) 87–96

УДК 02.30.Yy

Предельная степень апериодической устойчивости линейных систем и выбор параметров промышленных регуляторов

Татаринов А.В., Цирлин А.М. [1]

Московский государственный университет пищевых производств
Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН

e-mail: tsirlin@sarc.botik.ru

получена 22 января 2012 года

Ключевые слова: предельная устойчивость, расчет параметров регуляторов

Исследована задача о предельной степени устойчивости линейных систем. Получены условия, при которых ближайшие к мнимой оси корни – действительные. При выполнении этих условий найдена предельная степень устойчивости для типового промышленного объекта с запаздыванием и „серийных“ законов регулирования.

1. Введение

Как известно, линейная система устойчива, если все корни ее характеристического уравнения расположены левее мнимой оси. Степенью устойчивости линейной системы называют минимальное расстояние корня ее характеристического уравнения от мнимой оси. Формально

$$\eta = \min_{\nu} |Rep_{\nu}|, \tag{1}$$

где p_{ν} – корень характеристического уравнения системы.

Будем предполагать, что система устойчива, а значит, для всех корней их действительные части Rep_{ν} отрицательны.

Если в системе можно изменять некоторые из ее параметров S, влияющих на расположение корней характеристического уравнения, то одним из естественных подходов к их выбору является требование максимума степени устойчивости (см. [1, 2, 3, 4] и др.). Найденная предельная степень устойчивости гарантирует скорость затухания переходных процессов, связанных с ненулевыми начальными условиями, и косвенно сохранение устойчивости системы при малых отклонениях ее параметров от тех, что были использованы при расчете.

[1]Работа поддержана РФФИ, грант 10-06-00161а.

Когда выражения, связывающие оптимальный вектор варьируемых параметров (настроек) S^* и соответствующую им предельную степень устойчивости η^* с остальными параметрами системы A, получены в аналитической форме и задано множество возможных значений этих параметров, то появляется возможность „робастного" выбора вектора S, такого, чтобы добиться максимума степени устойчивости при самых неблагоприяных значениях A. Так как фактические значения параметров не известны, то настройки выбирают постоянными и такими, при которых

$$\eta^*(A) \Rightarrow \min_A . \tag{2}$$

Для большинства промышленных систем регулирования, кроме требования максимума степени устойчивости, важно, чтобы ближайшие к мнимой оси (критические) корни лежали на действительной оси. Такое расположение корней гарантирует апериодический характер затухания переходных процессов, а значит, малый износ регулирующих устройств (приводов исполнительных механизмов, клапанов и пр.). Степень устойчивости в этом случае названа *апериодической* (см. [6, 7]).

Ниже мы остановимся на вопросе о существовании решения задачи о предельной степени устойчивости, выясним, при каких условиях апериодическая степень устойчивости совпадает с предельной, т.е. не существует комплексных корней, расположенных ближе к мнимой оси, чем ближайшие к ней действительные корни. Наконец получим для типовой промышленной системы аналитические выражения, связывающие предельную устойчивость с параметрами объекта регулирования.

2. Задача о предельной степени устойчивости

2.1. Оценка сверху

Пусть левая часть характеристического уравнения системы может быть приведена к виду полинома степени n с действительными коэффициентами. Для устойчивости системы необходимо, чтобы все его коэффициенты были положительны (условие Стодолы)

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} +, ..., +a_n = 0.$$

Если коэффициенты a_0 и a_1 не зависят от вектора настроек S, то среднее расстояние корней этого уравнения от мнимой оси фиксированно и равно

$$\bar{\eta} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} |Re_\nu| = \frac{1}{n}\frac{a_1}{a_0}. \tag{3}$$

Так как расстояние от мнимой оси критических корней заведомо меньше среднего, то предельная степень устойчивости удовлетворяет неравенству

$$\eta^* \leq \frac{1}{n}\frac{a_1}{a_0},$$

когда индекс коэффициентов полинома, зависящих от вектора настроек, больше единицы. Это неравенство превращается в равенство только в том случае, когда все корни характеристического уравнения лежат на прямой, параллельной мнимой оси, на расстоянии $\bar{\eta}$. Изменения настроек, увеличивающие степень устойчивости (отодвигающие критические корни от мнимой оси) в силу (3) сопровождаются встречным движением других корней до тех пор, пока число критических корней не увеличится. Чем больше критических корней, тем ближе степень устойчивости системы к своей верхней оценке.

Если составляющие вектора настоек „линейно-независимо“ влияют на расположение корней, а его размерность равна $m < n$, то число критических корней при оптимальном выборе S равно $m+1$. Так, когда подлежат выбору все коэффициенты характеристического полинома, кроме двух первых, то предельная степень устойчивости равна оценке сверху $\bar{\eta}$. Для апериодической предельной степени устойчивости соответствующие ей критические корни кратные.

Будем рассматривать линеаризованную в окрестности состояния равновесия систему, состоящую из объекта с передаточной функцией $W_0(p)$ и регулятора с передаточной функцией $W_r(S,p)$, в которой S – вектор настроек.

Передаточная функция замкнутой системы

$$W_s(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_0(p)W_r(S,p)}. \tag{4}$$

Здесь учтено, что регулятор реализует отрицательную обратную связь.

Рассмотрим случаи, когда объект характеризуется дробно-рациональной передаточной функцией и когда он содержит чистое запаздывание.

2.2. Дробно-рациональная передаточная функция объекта

Передаточную функцию объекта представим в форме

$$W_0(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}, \tag{5}$$

где $R(p) = r_0p^n + r_1p^{n-1} + ... + r_n$ и $Q(p)q_0p^m + q_1p^{m+1} + ... + q_m$ – полиномы, $n \leq m$. Коэффициент усиления объекта $W_0(0) = \frac{r_n}{q_m} = 1$. Последнего всегда можно добиться за счет выбора масштаба по координате.

Корни характеристического уравнения системы

$$1 + W_0(p)W_r(S,p) = 0 \tag{6}$$

зависят от S.

Передаточная функция разомкнутой системы $W_l(p) = W_0(p)W_r(S,p)$ удовлетворяет условию физической реализуемости

$$\lim_{p\to\infty} |W_l(p)| = 0. \tag{7}$$

Кроме того, будем предполагать, что система в разомкнутом состоянии устойчива и ее степень устойчивости заведомо больше, чем степень устойчивости замкнутой системы. Последнее означает, что ее передаточная функция аналитическая правее прямой $-\eta + i\omega$.

Регулятор, как правило, имеет типовую ПИД структуру

$$W_r(S,p) = \left(S_2 p + S_1 + \frac{S_0}{p}\right). \tag{8}$$

Первое слагаемое называют дифференциальной (Д), второе – пропорциональной (П), а третье – интегральной (И) составляющей.

Требование астатизма системы (реакция на скачкообразное воздействие при стремлении t к бесконечности должна стремиться к нулю) по теореме о конечном значении преобразования Лапласа эквивалентно равенству

$$\lim_{p\to 0} W_c(p,S) = 0.$$

Оно приводит к ограничению $S_0 > 0$. Коэффициенты S_2, и S_1 могут быть и нулевыми.

Перепишем характеристическое уравнение (6) с учетом (5), (8)

$$1 + \left(S_2 p + S_1 + \frac{S_0}{p}\right)\frac{R(p)}{Q(p)} = 0, \tag{9}$$

или после умножения на $Q(p)p$

$$M(p,S) = Q(p)p + \left(S_2 p^2 + S_1 p + S_0\right) R(p) = 0. \tag{10}$$

Условие физической реализуемости (7) выполнено при $m > n + 1$.

Левая часть уравнения (10) распадается на два полинома, коэффициенты первого из которых, имеющего степень $m+1$, не зависят от S. Если степень $n+2$ второго полинома меньше, чем m, то среднее значение расстояния корней уравнения (10) от мнимой оси равно $\frac{q_1}{(m+1)q_0}$. Если коэффициент $S_2 = 0$, то степень второго полинома на единицу меньше.

Степень устойчивости системы не может превысить этого значения и достигает максимума, когда число критических корней, мнимая часть которых неотрицательна, оказывается на единицу больше размерности S. Т.е. сумма кратности действительных критических корней и числа пар комплексных критических корней равна четырем. Это число может быть меньше, если часть составляющих вектора S фиксирована.

В случае апериодической степени устойчивости все критические корни действительные, предельная степень апериодической устойчивости и соответствующее ей значение вектора S определяется системой уравнений (условиями кратности действительных корней):

$$M(-\eta,S) = 0, \quad \frac{dM(-\eta,S)}{d\eta} = 0, \quad \frac{d^2M(-\eta,S)}{d\eta^2} = 0, \quad \frac{d^3M(-\eta,S)}{d\eta^3} = 0. \tag{11}$$

Эти уравнения линейны относительно S, что существенно облегчает их решение.

2.3. Объект содержит чистое запаздывание

Передаточная функция объекта имеет вид

$$W_0(p) = e^{-p\tau}\frac{R(p)}{Q(p)}, \tag{12}$$

где полиномы $R(p)$ и $Q(p)$ имеют тот же вид, что и для дробно-рациональной передаточной функции, а чистое запаздывание всегда можно за счет выбора масштаба времени сделать равным единице, что далее и принято.

Эквивалентное характеристическое уравнение замкнутой системы запишется в форме

$$M_\tau(p, S) = e^p Q(p)p + \left(S_2p^2 + S_1p + S_0\right) R(p) = 0. \tag{13}$$

Его левая часть, как и выше, распадается на два слагаемых. При любом приближении экспоненты полиномами степень первого слагаемого больше, чем эта степень для объекта без запаздывания. Это дает основание считать, что среднее значение расстояния корней уравнения от мнимой оси не зависит от вектора настроек при условиях физической реализуемости разомкнутой системы. Так что изменение положения критических корней в сторону роста степени устойчивости за счет выбора настроек приведет к встречному движению одного или нескольких из числа оставшихся корней, до тех пор пока общее число критических корней с неотрицательной мнимой частью не станет на единицу больше размерности вектора настроек S.

В случае апериодической степени устойчивости все критические корни действительные, предельная степень апериодической устойчивости и соответствующее ей значение вектора S определяется системой уравнений, аналогичной (13):

$$M_\tau(-\eta, S) = 0, \quad \frac{dM_\tau(-\eta, S)}{d\eta} = 0, \quad \frac{d^2M_\tau(-\eta, S)}{d\eta^2} = 0, \quad \frac{d^3M_\tau(-\eta, S)}{d\eta^3} = 0. \tag{14}$$

Полученные из уравнений (13) либо (14) соотношения для предельной степени устойчивости в функции параметров объекта регулирования имеют ценность лишь для систем, в которых достигнутая апериодическая степень устойчивости совпадает с предельно возможной. Поэтому важно выяснить, отсутствуют ли комплексные корни характеристического уравнения правее прямой, параллельной мнимой оси и проходящей через точку $-\eta$ на действительной оси плоскости p.

3. Условия оптимальности апериодической степени устойчивости и выбор настроек промышленных систем

Пусть при некотором значении вектора $S = S^1$, ближайшие к мнимой оси один или несколько кратных корней характеристического уравнения имеют действительные части, равные η_1, передаточная функция разомкнутой системы $W_p(p) = W_0(p)W_r(S, p)$ аналитическая в области, лежащей правее прямой $-\eta_1, i\omega$. Как выяснить, являются ли эти корни критическими, ($\eta_1 = \eta$) или правее их имеются корни, чье расстояние от мнимой оси меньше, чем η_1? Ответ на этот вопрос дает следующая

Т е о р е м а 1. *Для того, чтобы было выполнено равенство*

$$\eta_1 = \eta, \tag{15}$$

необходимо и достаточно, чтобы годограф расширенной амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы

$$W_l(i\omega - \eta_1) = W_0(i\omega - \eta_1)W_r(i\omega - \eta_1)$$

при изменении ω от минус до плюс бесконечности не охватывал точку с координатами $(-1, 0i)$. Доказательство теоремы дано в приложении.

Так как коэффициенты передаточных функций действительны, $W_l(i\omega - \eta_1)$ – четная функция частоты и можно ограничиться изменением ω от нуля до бесконечности.

Если корни, находящиеся на расстоянии η_1, действительные, то из теоремы 1 вытекает

С л е д с т в и е. *Для выполнения равенства (15) достаточно, чтобы для любого значения ω модуль $W_l(i\omega - \eta_1)$ не превышал единицы.*

Действительно, на нулевой частоте этот модуль равен единице, так как в точке $(-\eta_1, 0)$ расположен корень характеристического уравнения. Если модуль расширенной АФХ разомкнутой системы не превышает единицы, то при изменении частоты годограф заведомо не охватывает точку $(-1, 0i)$.

3.1. Оптимальные настройки типовых промышленных систем

В качестве примера использования приведенных выше утверждений воспользуемся ими для вычисления предельной степени устойчивости систем, передаточная функция объекта в которых имеет вид

$$W_0(p) = e^{-p}\frac{1}{Tp + 1}. \tag{16}$$

Такой объект часто называют типовым промышленным объектом, так как эта передаточная функция представляет собой простейшую аппроксимацию в окрестности равновесия распределенных процессов, включающих тепло-массоперенос, транспорт продуктов, накопление вещества и пр.

Условия максимума апериодической степени устойчивости приводят к системе уравнений, которая во многих практически важных случаях легко решается.

Действительно, в предположении, что максимальная степень устойчивости является апериодической, она может быть найдена из условия кратности $(k + 1)$-го критического корня характеристического уравнения

$$\frac{d^k}{(d\eta)^k}\left(\frac{\eta}{W_0(\eta)}\right)_{\eta^*} = 0, \tag{17}$$

где k — размерность вектора S. В это условие параметры регулятора не входят, так как производная порядка k от них не зависит. Так что степень устойчивости определяет одно уравнение с одним переменным. Подстановка его решения в остальные уравнения определяет соответствующие значения вектора S, которые входят в эти уравнения линейно.

И-регулятор. В этом случае S_1 и S_2 равны нулю, характеристическое уравнение примет форму

$$e^p(Tp+1)p+S_0=0. \tag{18}$$

Будем предполагать, что критические корни действительные, а затем проверим с использованием теоремы 1, является ли это предположение правильным.

Для расчета степени устойчивости и величины S_0 заменим в уравнении (18) p на $-\eta$. Получим

$$e^{-\eta}(1-\eta T)\eta=S_0. \tag{19}$$

Условие (17) кратности двух корней запишется как

$$e^{-\eta}[1-\eta(2T+1)+\eta^2T]=0. \tag{20}$$

В этих выражениях постоянная времени, как и степень устойчивости, безразмерны. Заменяя постоянную времени отношением T/τ, а степень устойчивости произведением $\eta\tau$, получим в размерных единицах

$$\eta_a=\frac{1}{\tau}+\frac{1}{2T}-\sqrt{\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{4T^2}}. \tag{21}$$

Соответствующее значение параметра регулятора в размерных величинах находят из (18)

$$S_0K=\eta_a\exp^{-\eta_a\tau}(1-T\eta_a). \tag{22}$$

Здесь K – коэффициент усиления объекта.

Найденная степень устойчивости является максимальной, так как модуль расширенной характеристики разомкнутой системы падает с частотой. Эта характеристика представляет собой дробь, модуль числителя которой не зависит от частоты, а модуль знаменателя

$$\sqrt{(T^2\omega^2+(1-T\eta_a)^2)(\omega^2+\eta_a^2)}$$

растет с ростом частоты. В силу следствия из теоремы 1 найденная степень устойчивости максимально возможная.

ПИ-регулятор. В этом случае условия, наложенные на значение степени устойчивости и коэффициенты регулятора при замене p на $-\eta$, запишутся как

$$e^{-\eta}(1-\eta T)\eta=S_0-S_1\eta, \tag{23}$$

$$e^{-\eta}[1-\eta(2T+1)+\eta^2T]=-S_1, \tag{24}$$

$$[\eta(4T+1)-\eta^2T-2(1+T)]=0. \tag{25}$$

Переходя, как и выше, к размерным переменным, получим

$$\eta_a=\frac{2}{\tau}+\frac{1}{2T}-\sqrt{\frac{2}{\tau^2}+\frac{1}{4T^2}}. \tag{26}$$

Соответствующие параметры регулятора

$$S_0K = \eta_a^2 e^{-\eta_a \tau}\tau(1 + \frac{T}{\tau} - T\eta_a). \tag{27}$$

$$S_1K = e^{-\eta_a \tau}[(2T+\tau)\eta_a - T\tau\eta_a^2 - 1]. \tag{28}$$

Модуль расширенной амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы для найденных параметров регулятора примет вид

$$|W_l(i\omega, \eta_a)| = \sqrt{\frac{\eta_a^2\left(1-T\eta_a\right)^2 + \omega^2\left(2T\eta_a + \eta_a - T\eta_a^2 - 1\right)^2}{\eta_a^2\left(T\eta_a - 1\right)^2 + T^2\omega^4 + \omega^2\left(\left(1-2T\eta_a\right)^2 + 2T\eta_a\left(1-\eta_a\right)\right)}} \tag{29}$$

Он монотонно убывает с ростом ω, поэтому предельная степень апериодической устойчивости является максимально возможной.

ПИД –регулятор. Аналогично двум рассмотренным выше случаям получим

$$\eta_a = \frac{1}{2T} + \frac{3}{\tau} - \sqrt{\frac{3}{\tau^2} + \frac{1}{4T^2}}. \tag{30}$$

Соответствующие настроечные параметры

$$S_0K = \eta_a^3\left(T\tau^2 - T\eta_a\tau^3 + \frac{\tau^3}{2}\right)e^{-\eta_a\tau},$$

$$S_1K = \left(3T\tau\eta_a^2 + \eta_a^2\tau^2 - \eta_a\tau - T\eta_a^3\tau^2 - 1\right)e^{-\eta_a\tau},$$

$$S_2K = \left(\frac{\eta_a\tau}{2} + 2T\eta_a - \frac{T}{\tau} - \frac{T\tau\eta_a^2}{2} - 1\right)e^{-\eta_a\tau}.$$

Модуль расширенной характеристики разомкнутой системы примет вид

$$|W_l(i\omega, \eta_a)| = \sqrt{\frac{\eta_a^2\left(1-T\eta_a\right)^2 + \omega^2\left(T\eta_a^3 - 8T\eta_a^2 + 4T\eta_a + \eta_a - 1\right)^2}{\eta_a^2\left(T\eta_a - 1\right)^2 + T^2\omega^4 + \omega^2\left(\left(1-2T\eta_a\right)^2 + 2T\eta_a\left(1-\eta_a\right)\right)}}.$$

Он монотонно уменьшается с ростом ω от 1 до нуля, следовательно, η_a является максимально возможной.

4. Заключение

В последующие годы значительное внимание исследователей привлекает задача управления объектами с изменяющимися характеристиками и синтеза робастных регуляторов, которые без перенастройки способны управлять целым классом объектов или одним объектом в широком диапазоне изменения его параметров, нагрузок и пр. Для конечномерных задач точные методы синтеза таких систем с оценкой допустимой области возможных параметров объекта развиты в работах Б.Т. Поляка и П.С. Щербакова (см. [5]). Однако эти методы не применимы для объектов с запаздыванием.

Выбор параметров регулятора по условию максимальной степени устойчивости косвенно обеспечивает робастность системы. При известной зависимости максимальной степени устойчивости от параметров объекта и заданной области, в которой эти параметры могут принимать свои значения, самому «неблагоприятному» сочетанию параметров из области их возможных значений (в нем максимум степени устойчивости минимален) соответствует гарантированная степень устойчивости системы.

В качестве примера рассмотрим типичный для технологических процессов случай, когда при изменении нагрузки (потоков сырья) отношение T/τ не меняется. Чем меньше нагрузка, тем больше числитель и знаменатель этой дроби. Из формулы (26) следует, что предельная степень устойчивости уменьшается с уменьшением нагрузки и соответствующем увеличении T и τ. Следовательно, вектор настроек нужно выбирать в расчете на минимальную нагрузку из заданного диапазона ее изменения.

Решение подобных задач существенно облегчается, если найдена аналитическая зависимость максимальной степени устойчивости от параметров объекта. Как показано выше, такую зависимость нетрудно получить в случае, когда критические корни характеристического уравнения действительные. Полученные выражения могут быть использованы для проектирования робастных систем, в которых требуется выбирать настройки в расчете на наименее благоприятное сочетание параметров.

5. Приложение

Доказательство теоремы 1. Теорема 1 является прямым следствием принципа аргумента [9], который с учетом вида характеристического уравнения замкнутой системы утверждает, что число корней этого уравнения, расположенных внутри контура, ограниченного прямой $i\omega - \eta$ и расположенным правее этой прямой полукругом сколь угодно большого радиуса на плоскости p, равно изменению аргумента вектора $1 + W_l(i\omega - \eta)$, деленному на 2π. Чтобы внутри этого контура не было корней, необходимо и достаточно, чтобы годограф $W_l(i\omega - \eta)$ не охватывал точку с координатой $-1, i0$. При этом круг бесконечного радиуса отображается в начало координат.

Если этот годограф не охватывает точки $(-1, i0)$, то все корни характеристического уравнения расположены левее прямой $(i\omega - \eta)$, а значит, ближайшие к мнимой оси действительные корни – критические. Если же он охватывает эту точку, то имеются комплексные корни, лежащие ближе к мнимой оси, а значит, η не является степенью устойчивости системы.

Список литературы

1. *Цыпкин Я.З.* О верхней границе степени устойчивости одноконтурных систем автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. 1952. Т. XIII. №4. С. 425–428.

2. *Цыпкин Я.З., Бромберг П.В.* О степени устойчивости линейных систем // Изв. АН СССР. Сер. ОТН. 1945. №12. С. 1163–1165.

3. *Шубладзе А.М.* Способы синтеза систем управления максимальной степени устойчивости // Автоматика и телемеханика. 1980. №1. С. 28–37.

4. *Загарий Г.И., Шубладзе А.М.* Синтез систем управления на основе критерия максимальной степени устойчивости. М.: Энергоатомиздат, 1988. 170 с.

5. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.

6. *Воронина Н.О., Татаринов А.В., Цирлин А.М.* Предельная степень апериодической устойчивости и соответствующие ей настройки для типовых систем регулирования // Известия вузов. Приборостроение. 1989. №3. С. 26–31.

7. *Татаринов А.В., Цирлин А.М.* Задачи математического программирования, содержащие комплексные переменные, и предельная степень устойчивости динамических систем // Известия РАН, сер. Теория и системы управления. 1995. №1. С. 28–33.

8. *Гурецкий Х.* Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. Пер. с польского. М.: Машиностроение, 1974. 326 с.

9. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 1967. 560 с.

The Limiting Degree of Linear System Aperiodic Stability and the Choice of Industrial Regulator Parameters

Tatarinov A.V., Tsirlin A.M.

Keywords: limiting stability, account of regulator parameters

The problem of a limiting degree of linear system stability is investigated. The conditions are received, where roots nearest to an imaginary axis are valid. When fulfilling these conditions the limiting degree of stability for a typical industrial object with delay and "serial" laws of regulation is found.

Сведения об авторах: Татаринов Александр Владимирович, Московский государственный университет пищевых производств, канд. техн. наук, доцент;
Цирлин Анатолий Михайлович, Институт программных систем
им. А.К. Айламазяна РАН, д-р техн. наук, гл. науч. сотр.