*Модел. и анализ информ. систем.* Т. **20**, № **3** (2013) 121–129
©*Тухлиев К.*, 2013

УДК 517.5

# Оптимальные квадратурные формулы приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых

Тухлиев К.

*Худжандский государственный университет им. академика Б. Гафурова, Республика Таджикистан, 735700 , г. Худжанд, проезд Мавлонбекова, 1*

*e-mail: kamaridin.t54@mail.ru*

*получена 8 апреля 2013*

**Ключевые слова:** квадратурная формула, криволинейный интеграл, градиент, погрешность, узлы.

В работе рассматривается экстремальная задача отыскания оптимальных квадратурных формул в смысле С.М. Никольского для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода на классах дифференцируемых функций, у которых норма второго градиента ограничена по норме в $L_P$ $(1 \le p < \infty)$ вдоль кривой, по которой вычисляется криволинейный интеграл. Вычислена точная оценка погрешности оптимальной квадратурной формулы на рассматриваемом классе функций и указан явный вид оптимальных узлов и коэффициентов.

## 1. Введение

Одной из основных задач численного анализа является экстремальная задача отыскания оптимальных квадратурных формул для заданного класса функций, определенных на конечном отрезке $[a, b]$. Многочисленные результаты, полученные в этом направлении для регулярных интегралов, подытожены в дополнении Н.П. Корнейчука к монографии С.М. Никольского [1]. Тем не менее, немало задач (особенно в многомерном случае, оптимизации приближенного интегрирования сингулярных или криволинейных интегралов) до настоящего времени не решены. В этой заметке задача отыскания наилучших квадратурных формул для приближенного вычисления криволинейных интегралов решается для некоторых классов дифференцируемых функций и кривых.

Пусть функция $f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ определена и интегрируема вдоль кривой $\Gamma \subset R^m$ и

$$\mathcal{J}(f;\Gamma) := \int\limits_{\Gamma} f(M)ds = \int\limits_{\Gamma} f(x_1, x_2, ..., x_m)ds. \tag{1.1}$$

Предположим, что на кривой $\Gamma$ установлено положительное направление так, что положение точки $M = M(x_1, x_2, ..., x_m)$ на кривой может быть определено длиной

дуги $s = AM$, отсчитываемой от начальной точки A. Тогда кривая $\Gamma$ параметрически выразится уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(s),\ x_2 = \varphi_2(s), ..., x_m = \varphi_m(s),\ 0 \le s \le L,$$

а функция $f(x_1, x_2, ..., x_m)$, заданная в точках кривой, сведется к сложной функции $f(\varphi_1(s), \varphi_2(s), ..., \varphi_m(s))$ от переменной $s$. В этом случае криволинейный интеграл (1.1) запишется в виде определенного интеграла

$$\mathcal{J}(f;\Gamma) = \int_0^L f(\varphi_1(s), \varphi_2(s), ..., \varphi_m(s))ds. \tag{1.2}$$

Всякая квадратурная формула вида

$$\mathcal{J}(f;\Gamma) \approx L_N(f;\Gamma;P,S) := \sum_{k=1}^{N} p_k f(\varphi_1(s_k), \varphi_2(s_k), ..., \varphi_m(s_k)) \tag{1.3}$$

для приближенного вычисления интеграла (1.2) задается векторами коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^N$ и узлов $S = \{s_k\}_{k=1}^N$ $(0 \le s_1 < s_2 < ... < s_N \le L)$, где $p_1, p_2, ..., p_N$ – произвольные действительные числа. При фиксированной $N \ge 1$ через A будем обозначать множество векторов коэффициентов и узлов (P,S), либо некоторое его подмножество, определяемое теми или иными ограничениями на коэффициенты и узлы формулы (1.3) (например, требование точности формулы на многочлены заданной степени, положительность коэффициентов $p_k$ и др.).

Обозначим через $\mathfrak{N}_Q(L)$ – класс пространственных спрямляемых кривых $\Gamma$, у которых длина равна $L$ и кривизна кусочно-непрерывна. В дальнейшем предположим, что все кривые $\Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)$ расположены в области

$$Q = \{(x_1, x_2, ..., x_m) : \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \le L^2\}.$$

Обозначим через $W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q) := W_0^{(2)}L_p(\mathcal{K};Q), 1 \le p \le \infty$ класс функций $f(M) := f(\varphi_1(s), \varphi_2(s), ..., \varphi_m(s))$, для которых $f(\varphi_1(0), \varphi_2(0), ..., \varphi_m(0)) = 0$, $f'_{\varphi_i}(\varphi_1(0), \varphi_2(0), ..., \varphi_m(0)) = 0,\ i = 1, 2, ..., m$; имеющих почти всюду в области $Q$ непрерывные частные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_i^{2-k} \partial \varphi_j^k},\ k = 0, 1, 2;\ i, j = 1, 2, ..., m$$

и удовлетворяющих условиям

$$\|\nabla^2 f(\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), ..., \varphi_m(\cdot))\|_{L_p[0,L]} =$$

$$= \left( \int_0^L |\nabla^2 f(\varphi_1(s), \varphi_2(s), ..., \varphi_m(s))|^p ds \right)^{1/p} \le \mathcal{K}, 1 \le p < \infty,$$

$$\|\nabla^2 f(\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), ..., \varphi_m(\cdot))\|_{L_\infty} =$$

$$= essup\left\{\left|\nabla^2 f(\varphi_1(s),\varphi_2(s),...,\varphi_m(s))\right| :\ s\in[0,L]\right\}\le\mathcal{K},\ p=\infty.$$

Здесь, как обычно, оператор "$\nabla$" определяется равенством

$$\nabla=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\cdot\frac{d\varphi_i}{ds}$$

и для $k\in\mathbb{N},\ \nabla^k:=\nabla(\nabla^{k-1}),\ k\ge 1$.

В частности, при $k=2$ имеем:

$$\nabla^2 f(\varphi_1(s),\varphi_2(s),...,\varphi_m(s))=\nabla(\nabla f(\varphi_1(s),\varphi_2(s),...,\varphi_m(s)))=$$

$$=\nabla\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial\varphi_i}\cdot\frac{d\varphi_i}{ds}\right)=\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\cdot\frac{d\varphi_i}{ds}\right)^2 f(\varphi_1(s),\varphi_2(s),...,\varphi_m(s)).$$

Для каждой функции $f\in W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ и каждой кривой $\Gamma\in\mathfrak{N}_Q(L)$ остаток квадратурной формулы (1.3) имеет вполне определенное числовое значение

$$|R_N(f;\Gamma;P,S)|=|\mathcal{J}(f;\Gamma)-L_N(f;\Gamma;P,S)|.$$

За величину, характеризующую точность квадратурной формулы для всех функций $f\in W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q)$, определенных вдоль кривой $\Gamma\in\mathfrak{N}_Q(L)$, примем число

$$R_N\left(W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q);\Gamma;P,S\right)=\sup\left\{|R_N(f;\Gamma;P,S)|:f\in W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q)\right\}.$$

Наибольшую погрешность квадратурной формулы (1.3) всего класса функций $W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ на классе кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ определим равенством

$$R_N\left(W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L);P,S\right)=\sup\left\{R_N\left(W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q);\Gamma;P,S\right):\Gamma\in\mathfrak{N}_Q(L)\right\}.$$

Для получения формулы, которую можно было бы считать оптимальной для всех функций $f\in W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ и кривых $\Gamma\in\mathfrak{N}_Q(L)$, полагаем, что соотношение (1.3) является точным для констант, что приводит к выполнению равенства

$$\int_\Gamma ds=\sum_{k=1}^{N}p_k=L.$$

Нижнюю грань

$$\mathcal{E}_N\left(W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L)\right)=$$

$$=\inf\left\{R_N\left(W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L);P,S\right):(P,S)\in A\right\}\qquad(1.4)$$

по аналогии с монографией [1] будем называть оптимальной оценкой погрешности квадратурной формулы (1.3) на рассматриваемых классах функций $W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$. Если существует квадратурная формула, для которой

$$\mathcal{E}_N\left(W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L)\right)=R_N\left(W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L);P^0,S^0\right),$$

то будем ее называть *оптимальной* или *наилучшей* на классах $W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ и $\mathfrak{N}_Q(L)$, а векторы $P^0 = \{p_k^0\}_{k=1}^N$ и $S^0 = \{s_k^0\}_{k=1}^N$ назовем соответственно оптимальными коэффициентами и узлами квадратурной формулы.

Отметим, что некоторые результаты по оптимизации квадратурных формул для криволинейных интегралов первого рода получены в работах [2, 3].

## 2. Основной результат

Используя определение класса $W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ для произвольной функции, принадлежащей этому классу, получим представление

$$f(\varphi_1(s),\varphi_2(s),...,\varphi_m(s)) = \int\limits_0^L (s-t)_+ \nabla^2 f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_m(t))dt, \tag{2.0}$$

где $(s-t)_+ = max(s-t,0)$. Подставляя функцию (2.0) в квадратурную формулу (1.3), для погрешности получим формулу

$$R_N(f;\Gamma;P,S) = \int\limits_0^L \nabla^2 f(\varphi_1(s),\varphi_2(s),...,\varphi_m(s)) \cdot \Phi_2(s)ds, \tag{2.1}$$

где

$$\Phi_2(s) = \frac{1}{2}(L-s)^2 - \sum_{k=1}^N p_k(s_k-s)_+.$$

Из равенства (2.1) с учетом неравенства Гельдера имеем:

$$R_N(f;\Gamma;P,S) \le \int\limits_0^L |\nabla^2 f(\varphi_1(s),\varphi_2(s),...,\varphi_m(s))| \cdot |\Phi_2(s)|ds \le$$

$$\le \left(\int\limits_0^L |\nabla^2 f(\varphi_1(s),\varphi_2(s),...,\varphi_m(s))|^p ds\right)^{1/p} \cdot \left(\int\limits_0^L |\Phi_2(s)|^q ds\right)^{1/q} \le$$

$$\le \mathcal{K} \cdot \left(\int\limits_0^L |\Phi_2(s)|^q ds\right)^{1/q}, \ p^{-1}+q^{-1}=1, \ 1 \le q \le \infty. \tag{2.2}$$

Непосредственными вычислениями легко проверить, что для кривой $\Gamma^* \subset \mathfrak{N}_Q(L)$, заданной параметрическими уравнениями

$$x_i = \varphi_i(s) := s/\sqrt{m}, \ 0 \le s \le L, i = 1,2,...,m$$

и определенной на кривой $\Gamma^*$, функция

$$f_0(\varphi_1(s),\varphi_2(s),...,\varphi_m(s)) = \sum_{i=1}^m \int\limits_0^{\varphi_i(s)} \left(\int\limits_0^t \mathcal{F}(u)du\right) dt,$$

где

$$\mathcal{F}(s) = \mathcal{K}\left(\int_0^L |\Phi_2(s)|^q ds\right)^{-1/p} \cdot |\Phi_2^*(s)|^{q-1} sgn\Phi_2^*(s),$$

$$\Phi_2^*(s) = \frac{1}{2}(L - \sqrt{m}s)^2 - \sum_{k=1}^{N} p_k(s_k - \sqrt{m}s)_+,\ \Phi_2^*(\frac{s}{\sqrt{m}}) \equiv \Phi_2(s),$$

неравенство (2.2) обращается в равенство.

В самом деле, легко проверить, что

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial \varphi_i^2} \cdot \left(\frac{d\varphi_i}{ds}\right)^2 = \frac{1}{m}\mathcal{F}(\varphi_i(s)) := \frac{1}{m} \cdot \mathcal{F}\left(\frac{s}{\sqrt{m}}\right) =$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \mathcal{K}\left(\int_0^L |\Phi_2(s)|^q ds\right)^{-\frac{1}{p}} \cdot |\Phi_2^*\left(\frac{s}{\sqrt{m}}\right)|^{q-1} sqn\Phi_2^*\left(\frac{s}{\sqrt{m}}\right) =$$

$$= \frac{\mathcal{K}}{m}\left(\int_0^L |\Phi_2(s)|^q ds\right)^{-\frac{1}{p}} \cdot |\Phi_2(s)|^{q-1} sqn\Phi_2(s),\ i = 1, 2, ..., m$$

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j}\left(\frac{d\varphi_i}{ds}\right)\left(\frac{d\varphi_j}{ds}\right) \equiv 0,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, ..., m,$$

а потому имеем

$$\nabla^2 f_0(\varphi_1(s), \varphi_2(s), ..., \varphi_m(s)) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f_0}{\partial \varphi_i^2}\left(\frac{d\varphi_i}{ds}\right)^2 =$$

$$= \mathcal{F}\left(\frac{s}{\sqrt{m}}\right) = \mathcal{K}\left(\int_0^L |\Phi_2(s)|^q ds\right)^{-\frac{1}{p}} \cdot |\Phi_2(s)|^{q-1} sgn\Phi_2(s). \tag{2.3}$$

Так как

$$\|\nabla^2 f_0(\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), ..., \varphi_m(\cdot))\|^p_{L_p[0,L]} =$$

$$= \mathcal{K}^p\left(\int_0^L |\Phi_2(s)|^q ds\right)^{-1} \cdot \int_0^L |\Phi_2(s)|^q ds = \mathcal{K}^p,$$

то функция $f_0(\varphi_1(s), \varphi_2(s), ..., \varphi_m(s)) \in W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K}; Q),\ 1 \leq p \leq \infty$.

Воспользовавшись равенством (2.3), из (2.1) получаем

$$R_N(f_0; \Gamma^*; P, S) = \mathcal{K}\left(\int_0^L |\Phi_2(s)|^q ds\right)^{1/q},\ 1 \leq q \leq \infty.$$

Тем самым мы доказали, что

$$R_N\left(W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L);P,S\right)=\mathcal{K}\left(\int\limits_0^L|\Phi_2(s)|^q ds\right)^{1/q},\ 1\le q\le\infty. \tag{2.4}$$

Полагая $\sigma_k=s_k/L,\ \alpha_k=p_k/L\ (k=1,2,...,N)$, функцию $\Phi_2(s)$ перепишем в следующем виде:

$$\Phi_2(s):=\frac{1}{2}(L-s)^2-\sum_{k=1}^N p_k(s_k-s)_+=$$

$$=L^2\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{s}{L}\right)^2-\sum_{k=1}^N\frac{p_k}{L}\left(\frac{s_k}{L}-\frac{s}{L}\right)_+\right]=$$

$$=L^2\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{s}{L}\right)^2-\sum_{k=1}^N\alpha_k\left(\sigma_k-\frac{s}{L}\right)_+\right]:=L^2\cdot\tilde{\Phi}_2(s/L). \tag{2.5}$$

Заметим, что $\sum\limits_{k=1}^N\alpha_k=1,\ \sigma_1+\sum\limits_{k=1}^N(\sigma_{k+1}-\sigma_k)=1,\ \sigma_{N+1}=1.$

Теперь, с учетом равенства (2.5), из (2.4) получаем

$$R_N\left(W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L);P,S\right)=\mathcal{K}L^{2+\frac{1}{q}}\left(\int\limits_0^1|\tilde{\Phi}_2(s)|^q ds\right)^{1/q},$$

$$(p^{-1}+q^{-1}=1,\ 1\le q\le\infty).$$

Отсюда, согласно равенству (1.4), запишем

$$\mathcal{E}_N\left(W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L)\right)=\mathcal{K}L^{2+\frac{1}{q}}\inf_{\{\alpha_k\},\{\sigma_k\}}\left(\int\limits_0^1|\Phi_2^*(s)|^q ds\right)^{1/q}. \tag{2.6}$$

Решение задачи (2.6) базируется на использовании свойств многочлена $R_{2,q}(x)$ степени 2 с коэффициентом при $x^2$, равным единице, вида $x^2+ax+b$, который наименее уклоняется от нуля на отрезке $[-1,1]$ в метрике пространства $L_q[-1,1]$ $(1\le q\le\infty)$. Следуя схеме рассуждений работы [4], после выполнения простых вычислений, мы приходим к следующим экстремальным значениям:

$$\alpha_k^*=\frac{2}{2N+\sqrt{R_{2,q}(1)}},\ k=1,2,...,N-1,$$

$$\alpha_N^*=\frac{2+\sqrt{R_{2,q}(1)}}{2N+\sqrt{R_{2,q}(1)}}, \tag{2.7}$$

$$\sigma_k^*=\frac{2k}{2N+\sqrt{R_{2,q}(1)}},\ k=1,2,...,N, \tag{2.8}$$

доставляющим минимум величине

$$\mathcal{A}_N = \inf_{\alpha_k,\sigma_k} \left( \int_0^1 |\Phi_2^*(s)|^q ds \right)^{1/q},$$

причем легко подсчитать, что

$$\mathcal{A}_N = \frac{R_{2,q}(1)}{2\sqrt[q]{2q+1} \cdot \left[2N + \sqrt{R_{2,q}(1)}\right]^2}.$$

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

**Теорема.** *Среди всех квадратурных формул вида (1.3) для приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода (1.1) на классе функций $W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q)$, $1 \le p \le \infty$ и классе кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ наилучшей является формула*

$$\int_\Gamma f(M)ds = \sum_{k=1}^{N} p^* f(M^*) + R_N(f;\Gamma), \tag{2.9}$$

*где $p_k^* = \alpha_k^* L$, $M_k^* = M(\varphi_1(\sigma_k^* L), \varphi_2(\sigma_k^* L), ..., \varphi_m(\sigma_k^* L))$, $\alpha_k^*$ и $\sigma_k^*$ определены равенствами (2.7) и (2.8), $x_i = \varphi_i(s)$ $(i = 1, 2, ..., m)$ – параметрические уравнения кривой $\Gamma$, $L$ – ее длина. Для минимальной оценки погрешности наилучшей формулы (2.9) на указанных классах функций и кривых имеет место оценка*

$$\mathcal{E}_N\left(W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L)\right) = \frac{\mathcal{K}L^{2+\frac{1}{q}} \cdot R_{2,q}(1)}{2\sqrt[q]{2q+1} \cdot \left[2N + \sqrt{R_{2,q}(1)}\right]^2}.$$

Отметим некоторые важные частные случаи доказанной теоремы.

**Следствие 1.** *Пусть $p = 1 (q = \infty)$. Тогда $R_{2,\infty}(t)$ есть многочлен Чебышева первого рода $T_2(t) = t^2 - \frac{1}{2}$, а коэффициенты и узлы имеют вид:*

$$p_k^* = \frac{2\sqrt{2}L}{2\sqrt{2}N+1}, k = 1, 2, ..., N-1;$$

$$p_N^* = \frac{(2\sqrt{2}+1)L}{2\sqrt{2}N+1};$$

$$s_k^* = \sigma_k^* L = \frac{2\sqrt{2}kL}{2\sqrt{2}N+1}, k = 1, 2, ..., N.$$

*При этом*

$$\mathcal{E}_N\left(W_{0,1}^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L)\right) = \frac{\mathcal{K}L^2}{2(2\sqrt{2}N+1)^2}.$$

**Следствие 2.** *Пусть $p = 2 (q = 2)$. Тогда $R_{2,2}(t)$ есть многочлен Лежандра $l_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}$, а коэффициенты и узлы имеют вид:*

$$p_k^* = \frac{2\sqrt{3}L}{2\sqrt{3}N+\sqrt{2}}, k = 1, 2, ..., N-1;$$

$$p_N^* = \frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})L}{2\sqrt{3}N+\sqrt{2}};$$

$$s_k^* = \frac{2\sqrt{3}kL}{2\sqrt{3}N+\sqrt{2}}, k = 1, 2, ..., N,$$

*и тогда*

$$\mathcal{E}_N\left(W_{0,2}^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L)\right) = \frac{\mathcal{K}L^{5/2}}{\sqrt{5}(2\sqrt{3}N+\sqrt{2})^2}.$$

**Следствие 3.** *Пусть* $p = \infty (q = 1)$. *В этом случае* $R_{2,1}(t)$ *есть многочлен Чебышева второго рода*

$$Q_2(t) = \frac{\sin(3\arccos t)}{4\sqrt{1-t^2}} = t^2 - \frac{1}{4}$$

*и коэффициенты и узлы имеют вид:*

$$p_k^* = \frac{4L}{4N+\sqrt{3}}, k = 1, 2, ..., N-1;$$

$$p_N^* = \frac{(4+\sqrt{3})L}{4N+\sqrt{3}};$$

$$s_k^* = \frac{4kL}{4N+\sqrt{3}}, k = 1, 2, ..., N.$$

*При этом*

$$\mathcal{E}_N\left(W_{0,\infty}^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L)\right) = \frac{\mathcal{K}L^3}{2(4N+\sqrt{3})^2}.$$

Автор благодарит рецензента за ценные замечания.

# Список литературы

1. Никольский С.М. Квадратурные формулы. М.: Наука, 1988. (Nikolsky S.M. Kvadraturnye formuly. Moskva: Nauka, 1988 [in Russian]).

2. Шабозов М.Ш., Мирпоччоев Ф.М. Оптимизация приближенного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // ДАН РТ. 2010. Т. 53, №6. С. 415–419. (Shabozov M.Sh., Mirpochchoev F.M. Optimizatsiya priblizhennogo integrirovaniya krivolineynogo integrala pervogo roda dlya nekotorykh klassov funktsy i krivykh // DAN RT. 2010. T. 53, №6. S. 415–419 [in Russian]).

3. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Оптимальные формулы приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математического анализа и теории функций"(Душанбе, 29–30 июня 2012 г.). Душанбе: Дониш, 2012. С. 197–206. (Shabozov M.Sh., Tukhliev K. Optimalnye formuly priblizhennogo vychisleniya krivolineynogo integrala pervogo roda dlya nekotorykh klassov funktsiy i

krivykh // Materialy mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii "Sovremennye problemy matematicheskogo analiza i teorii funktsy"(Dushanbe, 29–30 iyunya 2012 g.). Dushanbe: Donish, 2012. S. 197–206 [in Russian]).

4. Аксень М.Б., Турецкий А.Х. О наилучших квадратурных формулах для некоторых классов функций // ДАН СССР. 1966. Т. 166, №5. С. 1019–1021. (Aksen M.B., Turetsky A.Kh. O nailuchshikh kvadraturnykh formulakh dlya nekotorykh klassov funktsy // DAN SSSR. 1966. T. 166, №5. S. 1019–1021 [in Russian]).

## The Optimal Quadrature Formula of Approximate Calculation of Curvilinear Integral of First Kind for Some Classes of Functions and Curves

Tukhliev K.

*Khujand State University,*
*Mavlonbekova, 1, Khujand, 735700, Tajikistan*

**Keywords:** quadrature formula, curvilinear integral, gradient, error, node.

In this paper is considered the extreme problem of searching for the optimal quadrature formulas in S.M. Nikolskiy sense for approximate calculation of curvilinear integrals of first kind on the class of differentiable functions, the second gradient norm of which in $L_P$ $(1 \leq p < \infty)$ is bounded along the curve by which the curvilinear integral is calculated. The exact errors of optimal quadrature formula for the studied class of functions were calculated, and the explicit formulas for optimal nodes and coefficients was shown.

**Сведения об авторе:**
**Тухлиев Камаридин**,
Худжандский государственный университет им. академика Б. Гафурова,
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информатики и вычислительной математики