MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS, VOL. 33, NO. 1, 2026
journal homepage: www.mais-journal.ru

DISCRETE MATHEMATICS IN RELATION TO COMPUTER SCIENCE

Chromatic Numbers of Scalable Graphs

M. A. Iordanski[1]

DOI: 10.18255/1818-1015-2026-1-78-89

[1]Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia

MSC2020: 05C69
Research article
Full text in Russian

Received January 12, 2026
Revised February 13, 2026
Accepted February 18, 2026

We consider the problem of feasible vertex coloring with the minimum number of colors for connected undirected graphs that contain no self-loops or multiple edges. For every given $k \geq 3$, the problem of checking the existence of a feasible vertex coloring of the graph with k colors is NP-complete. Therefore, studying graph-scaling processes while preserving or limiting their chromatic numbers is of interest.

In this paper, we study the nature of changes in the chromatic number of graphs with an increase in the number of vertices and edges using gluing operations by identifying their isomorphic subgraphs. $G = (G_1 \circ G_2)\,\tilde{G}$ — is the resulting graph of the gluing operation of graphs G_1 and G_2; $\tilde{G} \subseteq G$ is the subgraph obtained as a result of identifying isomorphic subgraphs $G_1' \subseteq G_1$ and $G_2' \subseteq G_2$; $|V(G)| = |V(G_1)|+|V(G_2)|-|V(\tilde{G})|$, $|E(G)| = |E(G_1)|+|E(G_2)|-|E(\tilde{G})|$. Gluing operations in which one of the graphs G_1 or G_2 is isomorphic to another graph or its subgraph and the identification of subgraphs $G_1' \subset G_1$ and $G_2' \subset G_2$ is carried out in accordance with the isomorphism $G_1' \cong G_2'$, are called cloning operations.

A constructive description of a class of 2-chromatic graphs is obtained based on the gluing and cloning operations. Constraints on the gluing and cloning operations that ensure the preservation of the chromatic number of scalable graphs are formulated. It is established that when performing cloning operations, $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$. Examples of assembling 2-chromatic graphs using operations satisfying these constraints are given. For an arbitrary gluing operation $\chi(G) \leqslant \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\} + |V(\tilde{G})| - |V(\tilde{G}')|$, where $\tilde{G}'$ is the maximal complete subgraph of $\tilde{G}$. The possible growth of the chromatic number of graphs is estimated when scaling with various restrictions on the superposition of gluing operations.

Keywords: chromatic number; gluing and cloning operations; superposition; closed class; elemental and operational bases; constructive description

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Iordanski, Mikhail A. (corresponding author)	ORCID iD: 0000-0001-6625-1572. E-mail: iordanski@mail.ru Dr. Sc., Professor

For citation: M. A. Iordanski, “Chromatic numbers of scalable graphs”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 33, no. 1, pp. 78–89, 2026. DOI: 10.18255/1818-1015-2026-1-78-89.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ, ТОМ 33, № 1, 2026
сайт журнала: www.mais-journal.ru

DISCRETE MATHEMATICS IN RELATION TO COMPUTER SCIENCE

Хроматические числа масштабируемых графов

М. А. Иорданский[1]

DOI: 10.18255/1818-1015-2026-1-78-89

[1]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

УДК 519.17
Научная статья
Полный текст на русском языке

Получена 12 января 2026 г.
После доработки 13 февраля 2026 г.
Принята к публикации 18 февраля 2026 г.

Рассматривается задача допустимой раскраски вершин в минимальное число цветов для связных неориентированных графов, не содержащих петель и кратных ребер. При каждом заданном $k \geqslant 3$ задача проверки существования допустимой вершинной раскраски графа в k цветов является NP-полной. В связи с этим представляет интерес изучение процессов масштабирования графов с сохранением или ограничением их хроматических чисел.

В работе исследуется характер изменения хроматического числа графов при увеличении числа вершин и ребер с помощью операций склейки графов путем отождествления их изоморфных подграфов. $G = (G_1 \circ G_2)\,\tilde{G}$ — результирующий граф операции склейки графов G_1 и G_2, $\tilde{G} \subseteq G$ — подграф, полученный в результате отождествления изоморфных подграфов $G_1' \subseteq G_1$ и $G_2' \subseteq G_2$; $|V(G)| = |V(G_1)| + |V(G_2)| - |V(\tilde{G})|$, $|E(G)| = |E(G_1)| + |E(G_2)| - |E(\tilde{G})|$. Операции склейки, в которых один из графов G_1 или G_2 изоморфен другому графу или его подграфу и отождествление подграфов $G_1^{'} \subset G_1$ и $G_2^{'} \subset G_2$, проводится в соответствии с изоморфизмом $G_1' \cong G_2'$, называются операциями клонирования.

На основе операций склейки и клонирования получено конструктивное описание класса 2-хроматических графов. Сформулированы ограничения на операции склейки и клонирования, обеспечивающие сохранение хроматического числа масштабируемых графов. Установлено, что при выполнении операций клонирования $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$. Приводятся примеры сборки 2-хроматических графов с использованием операций, удовлетворяющих этим ограничениям. Для произвольной операции склейки $\chi(G) \leqslant \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\} + |V(\tilde{G})| - |V(\tilde{G}')|$, где $\tilde{G}'$ — максимальный полный подграф в $\tilde{G}$. Оценивается возможный рост хроматического числа графов при масштабировании с различными ограничениями на суперпозиции операций склейки.

Ключевые слова: хроматическое число; операции склейки и клонирования; суперпозиция; замкнутый класс; элементный и операционный базисы; конструктивное описание

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Иорданский, Михаил Анатольевич (автор для корреспонденции)	ORCID iD: 0000-0001-6625-1572. E-mail: iordanski@mail.ru Доктор физ.-мат. наук, профессор

Для цитирования: M. A. Iordanski, “Chromatic numbers of scalable graphs”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 33, no. 1, pp. 78–89, 2026. DOI: 10.18255/1818-1015-2026-1-78-89.

Введение

Рассматривается задача допустимой раскраски вершин в минимальное число цветов для связных неориентированных *обыкновенных* графов — не содержащих петель и кратных рёбер. Изучаются процессы масштабирования графов — увеличения числа вершин и рёбер, с сохранением хроматических чисел или оценками сверху их значений.

При каждом заданном $k \geqslant 3$ задача проверки существования вершинной раскраски графа в k цветов является NP-полной [1, 2]. Поэтому установление способов генерации подмножеств графов, обладающих заданным значением хроматического числа, является весьма актуальным.

При изучении взаимосвязи структур масштабируемых графов и их свойств можно выделить два подхода: первый подход основывается на рассмотрении специальных операций, сохраняющих требуемые свойства графов-операндов. Он обеспечивает построение графов с наперёд заданными свойствами. В работе Sabidussi [3] для хроматического числа декартова произведения графов $\chi(G \square H)$ было установлено равенство $\chi(G \square H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$, а также показано, что декартово произведение сохраняет свойство двудольности графов. Поскольку двудольные графы являются 2-хроматическими, то декартово произведение также сохраняет 2-хроматичность графов. В работах [4, 5] рассматривалась операция лексикографического произведения графов G и H, множество вершин результирующего графа $V(G \cdot H) = V(G) \times V(H)$, а любые две вершины (u, v) и (x, y) смежны в $(G \cdot H)$ тогда и только тогда, когда либо u смежна с x в G, либо $u = x$ и v смежна с y в H. Операция лексикографического произведения в общем случае не коммутативна $(G \cdot H) \neq (H \cdot G)$. Лексикографическое произведение сохраняет свойство совершенности графов. Для хроматического числа справедливо равенство $\chi(G \cdot H) = \chi_b(G)$, где $b = \chi(H)$, а $\chi_b(G)$ — b-кратное хроматическое число графа G, определяемое следующим образом: b-кратная раскраска графа G — это назначение наборов из b цветов вершинам графа G таким образом, что смежные вершины не содержат общих цветов; $a : b$-раскраска — это b-кратная раскраска, содержащая в общей сложности a цветов; b-кратное хроматическое число $\chi_b(G)$ равно наименьшему a, при котором существует $a : b$-раскраска.

Второй подход основывается на выделении запрещенных подграфов. Почти 100 лет назад в 1927 году Понтрягиным Л.С. было установлено, что граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов гомеоморфных графам $K_{3,3}$ или K_5. Этот результат был позднее также получен Куратовским [6]. В работе Вагнера [7] критерий планарности был сформулирован в терминах запрещенных миноров, при выделении которых допускались операции удаления и стягивания рёбер графа. Робертсон и Сеймур в серии работ [8—11] доказали так называемую структурную теорему, утверждающую, что любое семейство графов, замкнутое относительно операций удаления и стягивания рёбер, может быть определено конечным набором запрещенных миноров.

Таким образом, через конечное число запрещенных миноров можно описать целый класс свойств графов, которые сохраняются при выполнении операций удаления и стягивания рёбер. Планарность графов — одно из свойств этого класса.

Сравнивая эти два подхода к изучению взаимосвязи структур графов и их свойств, можно отметить, что они дополняют друг друга: при первом подходе выясняется, как построить граф, чтобы он обладал заданным свойством, а при втором — чего не должно быть в графе, обладающим заданным свойством. Второй поход имеет теоретическую направленность, а первый важен также и в практическом отношении.

Работы автора относятся к первому подходу. В них были получены конструктивные описания планарных и некоторых других классов графов [12]. Наиболее полный обзор этих работ можно найти в монографии [13] и в англоязычном обзоре [14]. В работах [15—19] рассматривались алгоритмы оптимального синтеза из графа K_2 различных классов деревьев, а также толстых деревьев [20] с использованием минимального числа специальных операций, называемых операциями склейки и клонирования.

В данной работе исследуется характер изменения хроматического числа графов при их масштабировании с помощью операций склейки и клонирования. Получено конструктивное описание класса 2-хроматических графов. Сформулированы ограничения на операции склейки и клонирования, обеспечивающие сохранение хроматического числа масштабируемых графов. Приводятся примеры сборки 2-хроматических графов с использованием операций, удовлетворяющих этим ограничениям. Оценивается возможный рост хроматического числа графов при масштабировании с различными ограничениями на операции склейки и их суперпозиции.

1. Обозначения и определения основных понятий

Обозначения семейств графов: O_n, K_n — соответственно пустые и полные n-вершинные графы; L_n — цепь, содержащая n вершин. Используется конструктивный подход к представлению графов, основывающийся на построении графов с помощью теоретико-множественных операций объединения с пересечением, называемых операциями *склейки* [12]. При выполнении операций склейки в графах-операндах $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ выделяются изоморфные подграфы $G_1' \subseteq G_1$, $G_2' \subseteq G_2$, $G_1' \cong G_2'$ и производится их отождествление. Для результирующих графов операций склейки $G(V, E)$ используются обозначения $(G_1 \circ G_2)\,\tilde{G}$, где $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$ — подграф графа G, полученный в результате отождествления подграфов G_1' и G_2', называемый *подграфом склейки*; для множеств вершин $V(G)$ и рёбер $E(G)$ графа G при этом выполняются равенства $|V(G)| = |V(G_1)| + |V(G_2)| - |V(\tilde{G})|$, $|E(G)| = |E(G_1)| + |E(G_2)| - |E(\tilde{G})|$. Если $G_1' = G_1$ или (и) $G_2' = G_2$, то операция склейки называется *тривиальной* — её результирующий граф изоморфен хотя бы одному из графов-операндов.

Нетривиальные операции склейки, в которых один из графов-операндов изоморфен другому графу-операнду или его подграфу, а отождествление вершин из $G_1^{'} \subset G_1$ с вершинами из $G_2^{'} \subset G_2$ проводится в соответствии с этим изоморфизмом, называются операциями *клонирования*, а вершины из $\tilde{G}$ — *опорными*. Если граф G_2 изоморфен подграфу $G_1^{''} \subseteq G_1$, то подграф $G_2 \backslash G_2^{'}$ называется *клоном* подграфа $G_1^{''} \backslash G_1^{'}$ графа G_1. Аналогично определяются клоны подграфов графа G_2.

Поскольку клон, являясь подграфом, содержит хотя бы одну вершину, то не любая операция склейки является операцией клонирования, обратное верно всегда. Операцию клонирования можно также рассматривать как унарную, при выполнении которой происходит дублирование некоторого подграфа графа. Связь между дублируемыми подграфами осуществляется через опорные вершины.

Пример 1. С помощью операции клонирования одной из вершин графа K_2 можно построить граф L_3, используя в качестве опорной другую вершину графа K_2. Далее склеивая концевые вершины графа L_3 с вершинами графа K_2 можно получить граф C_3. Исходную операцию клонирования можно рассматривать и как операцию склейки двух графов K_2 по одной вершине (по O_1). Операция склейки L_3 с K_2 по двум вершинам (по O_2) не является операцией клонироваия, поскольку при её выполнении к графу L_3 добавляется лишь ребро.

Пусть P — некоторое множество графов. Граф G является *суперпозицией* графов из P, если $G \in P$ или G можно получить путем последовательного применения операций склейки к графам из P и к графам, полученным из P с помощью операций склейки. Процесс построения графа G из графов множества P с помощью операций склейки задает *операцию суперпозиции* графов над P. Операция суперпозиции называется *бесповторной*, если в графе, построенном на её основе, подграфы склейки разных операций не пересекаются.

Для сохранения характеристического свойства графов на операции склейки накладывается система ограничений H. В общем случае, H может включать в себя ограничения, как на вид отождествляемых подграфов, так и на их выбор в графах-операндах и способ отождествления, поскольку все они могут влиять на результирующий граф. Операции, удовлетворяющие системе ограничений H, называются операциями *H-склейки*. Суперпозиции операций H-склейки называются *H-суперпозициями*.

Множество всех графов, получаемых из P с помощью операций H-суперпозиции, обозначается через $[P]_H$. Класс P называется *H-замкнутым*, если $[P]_H = P$. Подмножество графов $P' \subset P$ образует *полную* систему графов H-замкнутого класса P, если $[P']_H = P$. Минимальная по включению полная система графов B_e образует *элементный* базис H-замкнутого класса P. Если хотя бы один граф-операнд каждой операции склейки принадлежит B_e, то суперпозиция графов называется *канонической*.

Операции с изоморфными подграфами склейки $\tilde{G}$ относятся к одному *типу*. Множество, содержащее минимальное по включению число типов операций H-склейки, достаточное для построения из B_e всех графов H-замкнутого класса P, образует его *операционный* базис B_o. Операционный базис B_o задается множеством графов, изоморфных подграфам склейки $\tilde{G}$ операций различных типов.

Элементный и операционный базисы называются *порождающими* базисами. Вместе с системой ограничений H они задают *конструктивное описание* H-замкнутого класса P. На основе конструктивных описаний можно строить графы, обладающие заданными свойствами.

2. Конструктивное описание класса 2-хроматических графов

Граф является 2-хроматическим тогда и только тогда, когда он не содержит простых циклов нечётной длины. В терминах запрещённых подграфов класс 2-хроматических графов совпадает с классом 2-дольных графов [21]. На основе конструктивного описания класса 2-дольных графов [13] построим конструктивное описание класса 2-хроматических графов. Справедлива

Лемма 1. *Если графы G_1 и G_2 являются 2-хроматическими, то граф $G = (G_1 \circ G_2)\,\tilde{G}, |V(\tilde{G})| \geqslant 2$ будет 2-хроматическим тогда и только тогда, когда для любых вершин $v_i, v_j \in V(\tilde{G})$, соединённых цепями в $G(E_1 \backslash \tilde{E})$ и $G(E_2 \backslash \tilde{E})$, длины этих цепей имеют одинаковую чётность.*

Доказательство. Необходимость. Так как 2-хроматический граф не содержит циклов нечётной длины, то для любой пары вершин $v_i, v_j \in V(\tilde{G})$, соединённых цепями в $G(E_1 \backslash \tilde{E})$ и $G(E_2 \backslash \tilde{E})$ (это подграфы графа G, порождённые указанными подмножествами его рёбер), длины этих цепей должны иметь одинаковую чётность. Иначе в графе G появился бы цикл нечётной длины.

Достаточность. В 2-хроматических графах G_1 и G_2 нет циклов нечётной длины. В графе $G = (G_1 \circ G_2)\,\tilde{G}, |V(\tilde{G})| \geqslant 2$ новые циклы могут появиться, когда в $V(\tilde{G})$ найдется пара вершин $v_i, v_j \in V(\tilde{G})$, соединённых цепями в $G(E_1 \backslash \tilde{E})$ и $G(E_2 \backslash \tilde{E})$. Длина каждого такого цикла, равная сумме длин соответствующей пары цепей, будет чётной как сумма двух чисел одинаковой чётности.

Если цепи, соединяющие вершины v_i и v_j, пересекаются по рёбрам с циклами из графов G_1 и (или) G_2, то в графе G образуются циклы, длина каждого из которых равна сумме длин циклов, составленного из цепей, соединяющих вершины v_i и v_j в $G(E_1 \backslash \tilde{E})$ и $G(E_2 \backslash \tilde{E})$, и циклов графа G_1 или (и) G_2, уменьшенной на удвоенное число рёбер, входящих в пересечение указанных циклов. Поскольку циклы графов G_1 и G_2 имеют чётную длину и цикл, составленный из цепей, соединяющих вершины v_i и v_j в $G(E_1 \backslash \tilde{E})$ и $G(E_2 \backslash \tilde{E})$, имеет чётную длину, то все образующиеся новые циклы также имеют чётную длину. □

Операции склейки, удовлетворяющие указанным ограничениям, обозначим как операции H_{eqp}-склейки (equal parity). Поскольку рассматриваются графы, не содержащие кратных рёбер, то добавляется ещё ограничение, обеспечивающее сохранение отсутствия кратных рёбер: каждой паре несмежных в $V(\tilde{G})$ вершин, должна соответствовать пара несмежных вершин хотя бы в одном из графов-операндов. Это ограничение обозначается добавлением «мягких» угловых скобок: $\prec H \succ$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Класс 2-хроматических обыкновенных графов канонически $\prec H_{eqp} \succ$-замкнут с элементным базисом $B_e = \{K_2\}$ и операционным базисом $B_o = \{O_1, O_2\}$.*

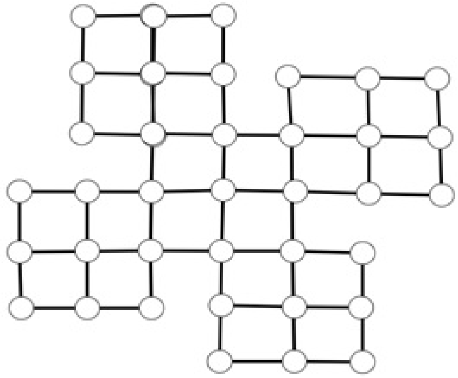

Fig. 1. A 2-chromatic graph **Рис. 1.** 2-хроматический граф

Доказательство. Граф K_2 является 2-хроматическим. Его склейки по O_1 с K_2 или с текущим построенным графом, очевидно, сохраняют хроматическое число. При выполнении $\prec H_{eqp} \succ$-склеек K_2 по O_2 с текущим графом в нем образуются четные циклы длины не меньше четырёх и 2-хроматичность сохраняется. Таким образом, все графы, реализуемые указанными в теореме каноническими суперпозициями, являются 2-хроматическими.

Покажем, что такими суперпозициями может быть реализован любой 2-хроматический обыкновенный граф G. Выделим в G произвольное остовное дерево. Его можно построить с помощью последовательности операций склейки исходного графа K_2, а затем текущего графа с K_2 по O_1. Добавление в циклы «замыкающих» рёбер осуществляется операциями склейками текущего графа с K_2 по O_2. При этом используются операции $\prec H_{eqp} \succ$-склейки, так как в рассматриваемом 2-хроматическом графе G нет циклов C_2 и циклов нечётной длины и, следовательно, замыкающие ребра соединяют концевые вершины цепей длины $l = 2k + 1, k \geqslant 1$. □

Пример 2. На рис. 1 изображен 2-хроматический граф, содержащий 37 вершин и 56 рёбер. Для его построения с использованием канонической суперпозиции графов K_2 требуется 55 операций склейки (35 — с K_2 по O_1 и 20 — с K_2 по O_2). Начинать сборку графа можно с любого его подграфа K_2, строя каждый из 20 циклов C_4 с помощью 1-2 операций склейки текущего графа с K_2 по O_1, а затем одной склейки с K_2 по O_2.

Если использовать при сборке графов не канонические суперпозиции, то есть склеивать граф в процессе его масштабирования не только с K_2, но и с графами большего объема, то можно сократить количество необходимых операций. Рассмотрим такие операции, сохраняющие хроматическое число графа.

3. Масштабирование графов с сохранением хроматического числа

Лемма 2. *Операции клонирования сохраняют хроматическое число графа.*

Доказательство. Операция клонирования — частный случай операции склейки, в которой один из графов-операндов изоморфен другому графу-операнду или его подграфу, а отождествление вершин из $G_1' \subset G_1$ с вершинами из $G_2' \subset G_2$ проводится в соответствии с этим изоморфизмом.

Пусть $G = (G_1 \circ G_2)\,\tilde{G}$ и граф G_2 изоморфен подграфу графа G_1. При этом допустимая раскраска графа G_1 в минимальное число цветов индуцирует допустимую раскраску графа G_2, число разных цветов в которой не превосходит $\chi(G_1)$. Так как объединение графов G_1 и G_2 задает весь граф G, то получаем $\chi(G) = \chi(G_1)$. Случай, когда граф G_1 изоморфен подграфу графа G_2, доказывается аналогично. □

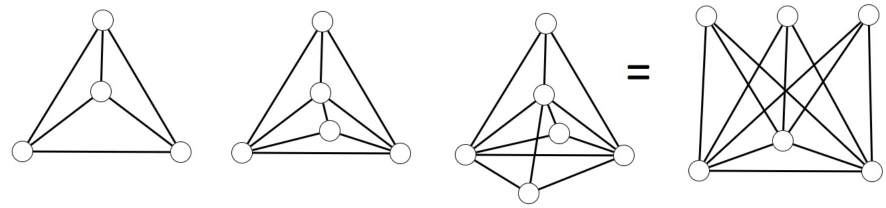

Fig. 2. Gluing graphs by complete subgraphs

Рис. 2. Склейки графов по полным подграфам

Нетрудно видеть, что если $G = (G_1 \circ G_2)\,\tilde{G}$ и $\tilde{G}$ полный граф, то $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$, поскольку все вершины полного подграфа $\tilde{G}$ должны быть окрашены в разные цвета и допустима совместная раскраска графов G_1 и G_2 в минимальное число цветов путём их переименования. Учитывая это, операции склейки по полным подграфам удобно использовать при масштабировании графов с сохранением хроматического числа.

Пример 3. На рис. 2 показан процесс построения некоторого 4-хроматического графа из трёх 4-хроматических графов K_4 с помощью двух операций склейки по полным подграфам K_3. Каждая такая операция может рассматриваться и как операция клонирования вершины 3 степени с тремя смежными с ней опорными вершинами. Для упрощения анализа картинки операции клонирования удобно интерпрентировать как унарные операции.

Замечание 1. Подграфы склейки K_3 обеих операций совпадают и при этом свойство планарности не сохраняется [12].

Замечание 2. Операции склейки графов по полным подграфам, называемые в англоязычной литературе суммами клик, интересны ещё тем, что с их помощью из планарных графов и графа Вагнера (лестница Мёбиуса) могут быть образованы все графы, не содержащие миноров K_5 [7]. Склейки по полным подграфам также используются в доказательстве структурной теоремы Робертсона и Сеймура [11].

Учитывая предыдущее, на основе леммы 2 доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Хроматическое число графа G сохраняется в процессе его масштабирования с помощью операций клонирования и (или) склейки по полным подграфам с графами G_i, $\chi(G_i) \leqslant \chi(G)$, $i = 1, 2, \ldots$.*

Сформулированные в теореме 2 ограничения на операции склейки облегчают процесс контроля за хроматическим числом масштабируемых графов. Например, при их использовании для 2-хроматических графов не нужно проверять чётность длин цепей, соединяющих вершины подграфов склейки в графах-операндах.

К достоинствам операций клонирования следует также отнести их технологичность — использование подграфов одного из графов-операндов в качестве другого графа-операнда.

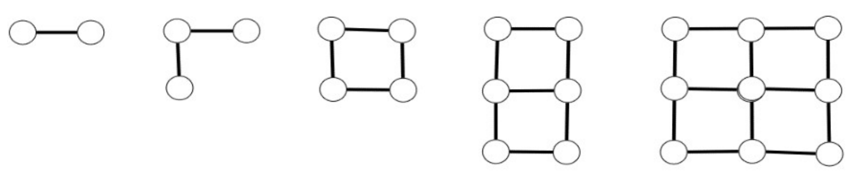

Fig. 3. Assembling a graph using cloning operations

Рис. 3. Сборка графа с помощью операций клонирования

Сочетание операций клонирования со склейками по полным подграфам повышает комбинаторные возможности масштабирования графов.

Пример 4. Граф из примера 2 можно собрать с помощью 4 операций склейки по K_2 из 5 графов, каждый из которых строится из K_2 за 4 операции клонирования (рис. 3).

В 1-й операции клонируется любая из двух вершин исходного графа K_2, другая вершина является опорной; во 2-й операции клонируется средняя вершина цепи L_3, опорными являются концевые вершины этой цепи, а результирующим графом — цикл C_4; в 3-й операции клонируется подграф K_2 цикла C_4, опорными являются 2 другие вершины цикла C_4; в 4-й операции клонируется цепь L_3, опорными являются 3 вершины, каждая из которых смежна с соответствующей вершиной клонируемой цепи L_3.

Всего при этом способе сборки графа из примера 2 требуется 24 операции (20 — клонирования для построения 5 графов, каждый из которых строится за 4 операции (рис. 3), и 4 — для их склейки по K_2).

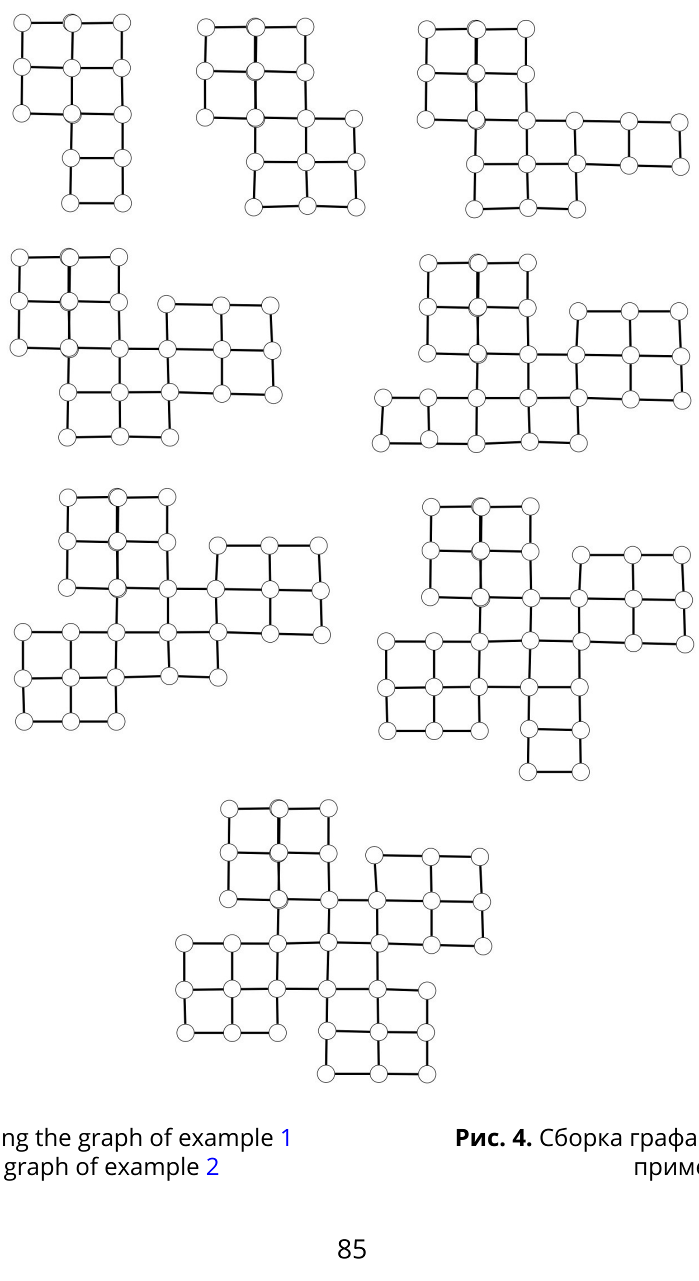

Fig. 4. Assembling the graph of example 1 from the graph of example 2

Рис. 4. Сборка графа примера 1 из графа примера 2

Число операций клонирования можно ещё сократить, если увеличить объём клонируемых подграфов.

Пример 5. Граф из примера 2 можно построить из графа примера 4 с помощью 8 следующих операций клонирования (рис. 4).

Здесь попеременно используются операции двух видов. В операциях первого вида клонируется цикл C_4, опорными вершинами выступают вершины подграфа K_2, смежные с вершинами клонируемого цикла C_4. В операциях второго вида клонируется цепь L_3, опорными являются 3 вершины, каждая из которых смежна с соответствующей вершиной клонируемой цепи. Необходимо по 4 операции каждого вида. Учитывая число операций для построения исходного графа (рис. 3), всего получаем 12 операций.

Следует иметь в виду, что увеличение размеров клонируемых подграфов может приводить к росту числа используемых типов операций. Так для построения графа в примере 2 использовались операции 2 типов: склейки по O_1 и O_2, а в примере 5 для построения этого же графа используются 3 типа операций: склейки по O_1, O_2 и O_3. Кроме того, при этом могут возникать ограничения на допустимый порядок сборки графа.

Поскольку не все 2-хроматические графы являются планарными, то приведём в заключение этого раздела пример построения непланарного 2-хроматического графа.

Пример 6. На рис. 5 показана сборка графа $K_{3,3}$ с помощью операций клонирования.

Здесь первые 2 операции такие же как в примере 4. В 3-й операции клонируется одна из вершин цикла C_4, полученного в результате 2-й операции, опорными являются 2 смежные с ней вершины. В заключительной 4-й операции клонируется любая из двух вершин третьей степени графа, полученного в результате 3-й операции, опорными являются все три смежные с ней вершины.

4. Оценки хроматического числа масштабируемых графов

Лемма 3. *Если $G = (G_1 \circ G_2)\,\tilde{G}$, $|V(\tilde{G})| = n$, $n' \in \overline{1,n}$ — число вершин в максимальном полном подграфе графа $\tilde{G}$, то*

$$\chi(G) \leqslant \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\} + (n - n'). \tag{1}$$

Доказательство. Допустимая совместная раскраска подграфов графа G, изоморфных графам G_1 и G_2, в минимальное число цветов возможна путём переименования цветов для одного из графов G_1 или G_2, если все вершины подграфа склейки $\tilde{G}$ окрашены в разные цвета. Если это не так, то минимальное число цветов необходимых для допустимой совместной раскраски G_1 и G_2 может увеличиться не более чем на число вершин подграфа склейки $\tilde{G}$, не входящих в его максимальный полный подграф. Вершины максимального полного подграфа в $\tilde{G}$ раскрашены в разные цвета и их совместная раскраска достижима путем переименования цветов. Из-за различий в структурах графов G_1 и G_2 совместная раскраска всех остальных вершин, входящих в $\tilde{G}$, может оказаться невозможной и их придётся раскрасить дополнительными $n - n'$ цветами. Так как объединение подграфов, изоморфных графам G_1 и G_2, задаёт весь граф G, то отсюда получаем оценку (1). □

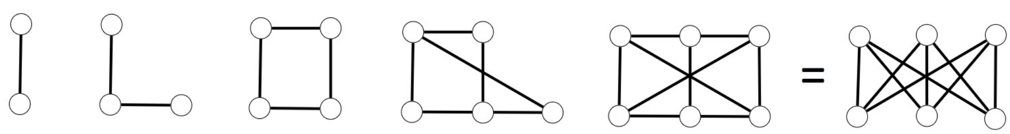

Fig. 5. Assembling the graph $K_{3,3}$ using cloning operations

Рис. 5. Сборка графа $K_{3,3}$ операциями клонирования

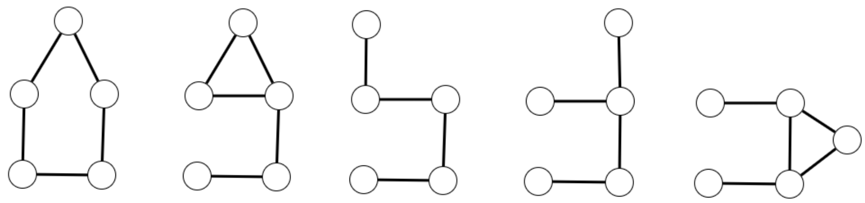

Fig. 6. Non-isomorphic graphs $G = (L_3 \circ L_4)\, O_2$ **Рис. 6.** Неизоморфные графы $G = (L_3 \circ L_4)\, O_2$

Пример 7. На рис. 6 приведены все неизоморфные графы G, получающиеся в результате склейки $(L_3 \circ L_4)\, O_2$. Неоднозначность операции связана с возможностью различного выбора отождествляемых вершин в графах-операндах.

Так как $\chi(L_3) = \chi(L_4) = 2, n = 2, n' = 1$, а $\chi(G) = 2$ или 3, то для каждого графа справедлива оценка (1), причём она достижима на 1, 2 и 5 графах.

Рассмотрим масштабирование графов на основе операции H-суперпозиции над множеством графов $P = \{G_i\}, i = \overline{1,r}$ с использованием различных систем ограничений H.

Обозначим через $G^q = (G_1^q \circ G_2^q)\, \tilde{G}^q, q = \overline{1,m}$ — результирующий граф q-й операции H-склейки, $|V(\tilde{G})| = n_q, n_q'$ — число вершин максимального полного подграфа в $\tilde{G}^q$. Учитывая (1), получаем:

$$\chi(G^q) \leqslant \max\{\chi(G_1^q), \chi(G_2^q)\} + (n_q - n_q'). \tag{2}$$

Теорема 3. *Если граф G реализован канонической бесповторной суперпозицией над $P = \{G_i\}, i = \overline{1,r}$ с помощью $m \geqslant r-1$ операций склейки, то*

$$\chi(G) \leqslant \max_{i=\overline{1,r}} \chi(G_i) + \sum_{i=1}^{m}(n_i - n_i').$$

Доказательство. Оценка получается в результате суммирования оценок из (2) для $q = \overline{1,m}$, так как используется бесповторная суперпозиция и подграфы склейки разных операций не пересекаются. □

Следствие 1. *Если $\tilde{G}^q, q = \overline{1,m}$ полные графы, то*

$$\chi(G) = \max_{i=\overline{1,r}} \chi(G_i).$$

Следствие 2. *Если $|V(\tilde{G}^q)| = 2, q = \overline{1,m}$, то*

$$\chi(G) \leqslant \max_{i=\overline{1,r}} \chi(G_i) + m.$$

Если убрать ограничение на бесповторность операции суперпозиции, то можно получить.

Следствие 3. *Если подграфы склейки $\tilde{G}^q, q = \overline{1,m}$ совпадают в результирующем графе G с его подграфом $\tilde{G}, |V(\tilde{G})| = n, n' \in \overline{1,n}$ — число вершин в максимальном полном подграфе графа $\tilde{G}$, то*

$$\chi(G) \leqslant \max_{i=\overline{1,r}} \chi(G_i) + (n - n').$$

Заключение

Для класса 2-хроматичесих графов получено конструктивное описание с конечными порождающими базисами, позволяющее эффективно строить 2-хроматические графы. При переходе к классам графов с хроматическим числом $k \geqslant 3$ сложность конструктивных описаний может существенно возростать. Например, класс максимальных планарных графов обладает счётным элементным базисом [12]. Сложность доказательства принадлежности этих графов классу 4-хроматических графов породила в свое время гипотезу 4-х красок.

Сформулированы ограничения на операции склейки, сохраняющие хроматическое число графов. Рассмотрены возможности использования таких операций при масштабировании графов на примере 2-хроматических графов.

Что касается оценок хроматического числа масштабируемых графов, то следует отметить, что для получения более содержательных результатов, необходима дополнительная информация об используемых графах-операндах и ограничениях, накладываемых на операции склейки.

References

[1] L. Stockmeyer, “Planar 3-colorability is NP-complete”, *SIGACT News*, vol. 5, no. 3, pp. 19–25, 1973.

[2] M. Garey, D. Johnson, and S. L., “Some simplified NP-complete graph problems”, *Theoretical Computer Science*, vol. 1, no. 3, pp. 237–267, 1976.

[3] G. Sabidussi, “Graphs with given group fnd given graph-theoretical properties”, *Canadian Journal of Mathematics*, vol. 9, pp. 515–525, 1957. DOI: 10.4153/CJM-1957-060-7.

[4] D. Geller and S. S., “The chromatic number and other functions of the lexicographic product”, *Journal of Combinatorial Theory*, vol. 19, pp. 87–95, 1975. DOI: 10.1016/0095-8956(75)90076-3.

[5] G. Ravindra and K. R. Parthasarathy, “Perfect product graphs”, *Discrete Mathematics*, vol. 20, no. 2, pp. 177–186, 1977. DOI: 10.1016/0012-365X(77)90056-5.

[6] K. Kuratowski, “Sur le problème des courbes gauches en Topologie”, *Fundamenta Mathematicae*, vol. 15, no. 1, pp. 271–283, 1930, in French.

[7] K. Wagner, “Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe”, *Mathematische Annalen*, vol. 114, no. 1, pp. 570–590, 1937, in German.

[8] N. Robertson and P. D. Seymour, “Graph minors. V. Excluding a planar graph”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 41, no. 1, pp. 92–114, 1986. DOI: 10.1016/0095-8956(86)90030-4.

[9] N. Robertson and P. D. Seymour, “Graph minors. XIII. The disjoint paths problem”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 63, no. 1, pp. 65–110, 1995. DOI: 10.1006/jctb.1995.1006.

[10] N. Robertson and P. D. Seymour, “Graph minors. XVI. Excluding a non-planar graph”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 89, no. 1, pp. 43–76, 2003. DOI: 10.1016/S0095-8956(03)00042-X.

[11] N. Robertson and P. D. Seymour, “Graph minors. XX. Wagner’s conjecture”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 92, no. 2, pp. 325–357, 2004. DOI: 10.1016/j.jctb.2004.08.001.

[12] M. A. Iordanski, “Constructive descriptions of graphs”, *Discrete Analysis and Operations Research*, vol. 3, no. 4, pp. 35–63, 1996, in Russian.

[13] M. A. Iordanski, *Constructive graph theory and its applications.* Cyrillic, 2016, 172 pp., in Russian.

[14] M. A. Iordanski, *Constructive graph theory: Generation methods, structure and dynamic characterization of closed classes of graphs – a survey*, 2020. DOI: 10.48550/arXiv.2011.10984. arXiv: 2011.10984 [math.CO].

[15] M. Iordanski, “Cloning of graphs”, in *Proceedings of the XVIII International Conference on Problems of Theoretical Cybernetics, Penza*, in Russian, 2017, pp. 108–110.

[16] M. Iordanski, “On the complexity of graph synthesis using cloning operations”, in *Proceedings of the XIII International Seminar on Discrete Mathematics and Its Applications*, in Russian, 2019, pp. 220–223.

[17] M. A. Iordanski, “Cloning operations and the diameter of graphs”, *Discrete Mathematics*, vol. 34, no. 2, pp. 26–31, 2022, in Russian.

[18] M. A. Iordanski, “Scaling graphs with constraint diameter”, *Discrete Mathematics*, vol. 35, no. 4, pp. 46–57, 2023, in Russian.

[19] M. A. Iordanski, “Dominant sets with neighborhood for trees”, *Modeling and Analysis of Information System*, vol. 32, no. 1, pp. 32–41, 2025, in Russian. DOI: 10.18255/1818-1015-2025-1-32-41.

[20] C. Leiserson, “Fat-trees: Universal networks for hardware-efficient supercomputing”, *IEEE Transactions on Computers*, vol. C-34, pp. 892–901, 1985.

[21] F. Harary, *Theory of graphs*. Mir, Moscow, 1973, 300 pp., in Russian.