Модел. и анализ информ. систем. Т. **20**, № **3** (2013) 130–152

УДК 519.3

Преобразования задач оптимального управления

Цирлин А. М.[1]

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН
152021, Ярославская область, Переславский район, с. Веськово, ул. Петра I, д.4а

e-mail: tsirlin@sarc.botik.ru

получена 26 апреля 2013

Ключевые слова: оптимальное управление, преобразование, переменные состояния, решение

Рассмотрены методы преобразования вариационных задач оптимального управления (замены фазовых переменных), позволяющие упростить их решение. К ним относятся методы уменьшения размерности задачи за счет перехода от исходного к новому аргументу, за счет выявления переменной, остающейся неизменной на уравнениях системы (инварианта), за счет расширения задачи и перехода от исходной задачи к более простой, дающей оценку значения исходной. В ряде случаев решение упрощается при переходе от нескольких условий в форме дифференциальных уравнений к одному интегральному. Последнее относится к уравнениям с запаздывающим аргументом. Даны примеры использования изложенных методов в реальных прикладных задачах управления биосинтезом, охлаждения кристаллических систем с использованием лазерного излучения и др.

1. Введение

Сложность решения задачи оптимального управления сильно зависит от ее формальной постановки [1]. Одна и та же задача может быть формализована различным образом. Ниже рассмотрено несколько типовых приемов, позволяющих упростить решение задачи за счет перехода от исходной формализации к эквивалентной или „почти эквивалентной“. Как правило, такой переход связан с трансформацией пространства состояний.

Пусть исходная задача оптимального управления имеет форму

$$I = \int_0^T f_0(x, u, t)dt \to \max, \tag{1}$$

[1]Работа поддержана РФФИ, грант 10-06-00161.

при условиях

$$x_i = f_i(x, u, t), \quad i = 1, ..., n, \tag{2}$$

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad u \in V_u, \quad i = 1, ..., n, \tag{3}$$

$$J_j = \int_0^T \varphi_j(x, u, t)dt = 0, \quad j = 1, ..., m. \tag{4}$$

Размерность вектор–функции $u(t)$, как правило, не превосходит n, множество V_u — компакт, функции $u(t)$ — кусочно–непрерывные, а $x(t)$ — кусочно–гладкие, функции f и φ — непрерывны по u и непрерывно дифференцируемы по x и t.

Оптимальное решение будем обозначать как $x^*(t), u^*(t)$, а значение задачи как $I^* = I(x^*, u^*)$. В том случае, когда условия, наложенные на искомое решение, и функции, его определяющие, отличны от указанных, мы будем это оговаривать.

Перечислим цели, которых стремятся достичь за счет преобразования исходной постановки:

1. Понижение размерности задачи n посредством: а) замены исходного аргумента, например, времени одной из переменных состояния; б) перевода части переменных состояния в разряд управлений; в) перехода к новым фазовым переменным, при котором правая часть одного из дифференциальных уравнений оказывается тождественно равной нулю.

2. Переход к задаче, в которой некоторые из дифференциальных уравнений оказываются ляпуновскими [2], т.е. их правая часть не содержит фазовых координат.

3. Для линейного дифференциального уравнения переход к эквивалентному интегральному уравнению.

4. Переход к задаче, значение которой заведомо больше значения исходной задачи (получение оценки I^* сверху), с последующим приближением к полученному решению.

Подчеркнем, что лишь в редких случаях упрощающие преобразования позволяют получить аналитическое решение. Условия оптимальности задачи, в какой бы форме они ни были записаны, приводят к необходимости решения тех или иных уравнений. В подавляющем большинстве случаев эти уравнения приходится решать численно.

Рассмотрим подробнее и проиллюстрируем на примерах каждый из перечисленных приемов.

2. Исключение календарного времени

Пусть задача (1)–(4) автономна, т.е. $f_i (i = 0, ..., n)$ и $\varphi_j (j = 1, ..., m)$ не зависит явно от t, правая часть одного из уравнений (2) (для определенности f_1) не равна нулю для всех x, u, или для тех, которые могут претендовать на оптимальность. Тогда

$$dt = \frac{dx_1}{f_1(x, u)}, \tag{5}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dx_i}{dx_1} f_1(x, u) = f_i(x, u), \tag{6}$$

$x(T)$ обозначим как $\overline{x}$. Получим преобразованную задачу в форме

$$I = \int\limits_{x_{10}}^{\overline{x}_1} \frac{f_0(x,u)}{f_1(x,u)} dx_1 \to \max, \tag{7}$$

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{f_i(x,u)}{f_1(x,u)}, \quad x_i(x_{10}) = x_{i0}, \quad i = 2, ..., n \tag{8}$$

$$\int\limits_{x_{10}}^{\overline{x}_1} \frac{1}{f_1(x,u)} dx_1 = T, \quad J_j = \int\limits_{x_{10}}^{\overline{x}_1} \frac{\varphi_j(x,u)}{f_1(x,u)} dx_1 = 0, \quad j = 1, ..., m. \tag{9}$$

Задача (7)–(9) имеет размерность фазовых переменных $(n-1)$ вместо n, а правые части уравнений (8) могут оказаться проще, чем уравнений (2).

В ряде случаев в исходной задаче среди уравнений (2) отсутствует такое, для которого правая часть знакоопределенная. Переход к новым переменным состояния $y(x)$, где преобразование взаимно однозначно, приводит уравнения (2) к виду

$$\dot{y}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} f_i(x(y), u), \quad y_\nu(0) = y(x_0), \quad \nu = 1, ..., n. \tag{10}$$

Правая часть одного из уравнений (10) должна при таком преобразовании не обращаться в нуль.

Пример 1. Оптимальный теплообмен

$$I = \int\limits_0^\tau q(x_1, x_2, u)(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}) dt \to \min \tag{11}$$

$$\mathrm{Sign}\; q = \mathrm{Sign}(x_1 - x_2) \quad \forall u \in V_u \tag{12}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{-q(x_1, x_2, u)}{c_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{+q(x_1, x_2, u)}{c_2} \tag{13}$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad x_{10} > x_{20} > 0. \tag{14}$$

Здесь x_i– температуры по Кельвину, c_i – теплоемкости контактирующих тел ($i = 1, 2$), q – поток теплоты.

В силу (12), (14) знак q не изменяется и любую из переменных состояния можно использовать в качестве аргумента. Приходим к эквивалентной задаче

$$I = \int\limits_{x_1(\tau)}^{x_{10}} c_1(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}) dx_1 \to \min \tag{15}$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{c_1}{c_2}; \quad x_2(x_{10}) = x_{20} \to x_2(x_1) = x_{20} + \frac{c_1}{c_2}(x_{10} - x_1), \tag{16}$$

$$\int\limits_{x_1(\tau)}^{x_{10}} \frac{c_1 dx_1}{q(x_1, x_2, u)} = \tau. \tag{17}$$

Условия (15), (16) позволяют выразить I как функцию $x_1(\tau)$, задача сводится к форме

$$I(x_1(\tau)) \to \min_{u(x_1)\in V_u} \Big/ (17). \tag{18}$$

Нужно найти такое допустимое управление, при котором $x_1(\tau)$ доставляет минимум I с учетом условия (17). Эта задача вместо двух дифференциальных уравнений содержит одно интегральное ограничение.

Пример 2. Управление периодическим процессом биосинтеза.

При оптимизации микробиологических процессов, протекающих в аппаратах периодического действия, переменными состояния являются концентрации питательного субстрата, биомассы и продуктов жизнедеятельности бактерий (продуктов метаболизма), т.е. $n = 3$. Так как время в уравнения процесса явно не входит, а концентрация субстрата при отсутствии подпиток монотонно уменьшается, то ее можно принять за новую переменную вместо t и сократить число параметров состояния до двух. Оптимальные управления оказываются в результате решения функциями концентрации субстрата и могут быть реализованы с помощью управляющих устройств, измеряющих эту концентрацию.

Например, кинетику процесса биосинтеза пенициллина характеризуют моделью следующего вида:

$$\dot{x} = k_1 \frac{sx}{k_2 + s} - k_3 px; \quad \dot{s} = -k_4 \frac{sx}{k_2 + s}; \quad \dot{p} = k_5 \frac{sx}{k_2 + s} - k_6 px.$$

Здесь x, s и p – концентрации биомассы, питательного субстрата и продуктов метаболизма соответственно; $k_1, ..., k_6$ – неотрицательные коэффициенты, зависящие от управляющих воздействий (кислотности среды, температуры и пр.).

Скорость роста биомассы $\dot{x}$ при $p = 0$ пропорциональна потреблению субстрата $\dot{s}$, наличие же продуктов метаболизма тормозит рост микроорганизмов. Пусть критерием оптимальности является минимальное время процесса T при заданных для $t = T$ концентрациях $s(T) = s_T$ и $p(T) = p_T$. В начальный момент заданы $s(0) = s_0$ и $x(0) = x_0$. Таким образом,

$$I = \int_0^T -dt \to max.$$

Правая часть второго из уравнений, определяющих процесс биосинтеза, заведомо меньше нуля, поэтому можно принять s в качестве нового аргумента

$$dt = -\tfrac{ds(k_2+s)}{k_4 sx}.$$

Приходим к задаче с двумя дифференциальными уравнениями

$$\tfrac{dx}{ds} = -\tfrac{k_1}{k_4} + \tfrac{k_3}{k_4} p(k_2 + s);$$

$$\tfrac{dp}{ds} = -\tfrac{k_5}{k_4} + \tfrac{k_6}{k_4} p(k_2 + s)$$

и критерием оптимальности

$$I = \int_{s_0}^{s_T} \frac{k_2+s}{k_4 s x} ds \longrightarrow max.$$

Если среди исходных переменных нет переменной, которая бы монотонно изменялась во времени, то можно попытаться сделать замену, введя $y(x)$ таким образом, чтобы скорость этой переменной в силу уравнений

$$\frac{dy}{dt} = \sum_i \frac{\partial y}{\partial x_i} f_i(x,u) \tag{19}$$

сохраняла свой знак на предполагаемом оптимальном решении.

Например, если две переменных состояния связаны между собой так, что первая из них является скоростью изменения второй, то для любых управлений изображающая точка на фазовой плоскости, по осям которой отложены эти переменные, движется против часовой стрелки, а значит, при переходе к полярным координатам угол наклона фазового вектора меняется монотонно и может быть использован как переменная, заменяющая календарное время.

3. Перевод части переменных состояния в разряд управлений

3.1. Задачи линейные относительно скорости изменения переменных состояния

Рассмотрим первоначально простейшую задачу этого вида, а затем будем последовательно расширять класс задач, допускающих перевод переменных состояния в разряд управлений.

Простейшая задача и ее обобщения.

Пусть в критерии оптимальности рассматриваемой задачи фигурирует слагаемое

$$I_\nu = \int_0^T N_0(x,t)\upsilon\, dt, \tag{20}$$

где $\dot{x} = \upsilon,\ x(t) \in V_x(t) \supset R$ — функция ограниченной вариации, $x(0) = x_0, x(T) = \overline{x}$, множество $V_x(t)$ — компакт, на υ ограничений не наложено. $N(x,t) : R \times [0,T] \to R$ непрерывна по x и непрерывно дифференцируема по t. Покажем, что справедливо равенство

$$I_\nu = -\int_0^T \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} N_0(x,t) dx dt + \overline{k}(\overline{x}) - k_0(x_0), \tag{21}$$

где

$$\overline{k}(\overline{x}) = \int_0^{\overline{x}} N_0(x,T)dx, \quad k_0(x_0) = \int_0^{x_0} N_0(x_0,0)dx. \tag{22}$$

Для этого, следуя Кротову [3], прибавим к функционалу (20) слагаемое

$$\Delta_I = \int\limits_0^T \dot{y}(x,t)dt - y(\overline{x},T) + y(x_0,0),$$

которое для любой дифференцируемой функции $y(x,t)$ равно нулю, и выберем эту функцию так, чтобы

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -N_0(x,t). \tag{23}$$

Функция $y(x,t)$ имеет вид

$$y(x,t) = -\int\limits_{c_0}^{x} N_0(x,t)dx + c(t), \tag{24}$$

где c_0 и $c(t)$ произвольны. В частности, их можно принять равными нулю. В этом случае

$$I_\nu = -\int\limits_0^T \int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial t} N_0(x,t)dx\,dt + \overline{k}(\overline{x}) - k_0(x_0),$$

что совпадает с (21).

Если критерий оптимальности рассматриваемой задачи имеет вид

$$I = \int\limits_0^T [M_0(x,t) + N_0(x,t)v]dt \to \max. \tag{25}$$

M_0 непрерывна по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируема по t, то его можно привести к эквивалентной форме

$$I = \int\limits_0^T [M_0(x,t) - \int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial t} N_0(x,t)dx]dt + \overline{k}(\overline{x}) - k_0(x_0). \tag{26}$$

Задачу (25) назовем *простейшей задачей* с неограниченным линейно входящим управлением.

Подынтегральное выражение в (26)

$$R(x,t) = M_0(x,t) - \int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial t} N_0(x,t)dx. \tag{27}$$

На оптимальном решении $x^*(t)$ для любого $t \in (0,T)$

$$\left.\begin{array}{l} x^*(t) = \arg\max_{x\in V_x(t)} R(x,t), \\ x_0^* = \arg\min_{x_0\in V_x(0)} k_0(x_0), \\ \overline{x}^* = \arg\max_{x\in V_x(T)} \overline{k}(\overline{x}). \end{array}\right\} \tag{28}$$

Это решение может содержать скачки первого рода, которым соответствует $\upsilon(t)$, имеющая форму δ-функции. Если в задаче (25) на $\upsilon(t)$ наложены некоторые ограничения, то решение (28) и соответствующее ему значение $I(x^*)$ дают оценку сверху значения задачи (25).

Простейшая задача с интегральными ограничениями. Рассмотрим задачу (25) с добавочными условиями вида

$$J_i = \int\limits_0^T [M_i(x,t) + N_i(x,t)\upsilon]dt = 0, \quad i = 1, ..., n. \tag{29}$$

Аналогично тому, как это было сделано выше с функционалом I, каждое из условий (29) может быть преобразовано к форме

$$\begin{gathered} J_i = \left\{ \int\limits_0^T \left[M_i(x,t) - \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^x N_i(x,t)dx \right] dt + \right. \\ \left. + \overline{k}_i(\overline{x}) - k_{0i}(x_0) \right\} = 0, \quad i = 1, ..., n. \end{gathered} \tag{30}$$

Условия оптимальности решения задачи (26), (30) имеют форму принципа максимума (см., например [1]), а именно: *если оптимальное решение задачи* (29), (30) $x^*(t), x_0, \bar{x}$ *существует, то найдется такой ненулевой вектор* $\lambda = (\lambda_0, ..., \lambda_n)$, *для которого функция Лагранжа*

$$L = \sum_{i=0}^n \lambda_i \left(M_i(x,t) - \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^x N_i(x,t)dx \right)$$

максимальна по $x \in V_x$, *а функции*

$$\left.\begin{aligned} \overline{L} &= \sum_{i=0}^n \lambda_i \int\limits_0^{\overline{x}} N_i(x,T)dx, \\ L_0 &= \sum_{i=0}^n \lambda_i \int\limits_0^{x_0} N_i(x,0)dx, \quad i = 0, ...n \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

локально неулучшаемы по $\overline{x}$ *и* x_0 *соответственно, что приводит к соотношениям*

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i N_i(\overline{x},T)\delta\overline{x} \le 0, \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i N_i(x_0,0)\delta x_0 \ge 0, \tag{32}$$

где $\delta\overline{x}$ и δx_0 – допустимые вариации этих переменных.

Особо отметим случай, когда в задаче (26), (30) функции $N_i = r_i(x)t$ линейны по t , а M_i не зависят явно от t для $i = 0, ..., n$. В этом случае она превращается в усредненную задачу нелинейного программирования и справедливы условия оптимальности этой задачи [4]: *Если оптимальное решение* $x^*(t)$ *существует, то найдется такой ненулевой вектор* $\lambda = (\lambda_0, ..., \lambda_n)$, *что функция Лагранжа* $L = \sum\limits_{i=0}^n \lambda_i [M_i(x) + \int\limits_0^x r_i(x)dx]$ *на оптимальном решении* x^* *удовлетворяет условиям*

$$\max_{x \in V_x} L \to \min_{\lambda}. \tag{33}$$

Максимум по x может быть достигнут не в одной, а в нескольких точках x_b^*. Эти значения x называют базовыми. Их число не превосходит $(n+1)$.

Оптимальное решение на интервале продолжительностью $\gamma_b T$ равно x_b^*,

$$\gamma_b \geq 0; \quad \sum_{b=0}^{n} \gamma_b = 1, \tag{34}$$

последовательность, в которой $x^*(t)$ принимает базовые значения, роли не играет, поэтому оптимальное решение не единственно. x_0 и $\overline{x}$ определены условиями (32). Для расчета γ_b имеем условия

$$\sum_{b=0}^{n} \gamma_b [M_i(x_b^*) + \int_0^{x_b} r_i(x)dx] + \overline{k_i}(\overline{x}) - k_{i0}(x_0) = 0, \quad i = 1, ..., n, \tag{35}$$

которые вместе с условиями (34) составляют систему линейных уравнений относительно γ_b.

3.2. Задачи, приводимые к простейшей

Скалярный случай. Пусть задача оптимизации имеет форму

$$I = \int_0^T f_0(x, u, t)dt \to \max \tag{36}$$

с условием

$$\dot{x} = v(x, u, t), \quad x \in V_x \subset R^1, \tag{37}$$

$x(t), u(t)$ – скалярные, функции f_0 и f непрерывны и дифференцируемы по u, на управление нет ограничений.

Выясним, при каких условиях задача (36), (37) может быть приведена к виду (20), (25) и как следствие фазовая координата может быть переведена в разряд управлений.

Ограничим класс функций v такими, значение которых при любых допустимых фиксированных значениях x и t взаимно-однозначно связано с u. Это для дифференцируемой по u функции означает, что

$$\frac{\partial v}{\partial u} \neq 0 \quad \forall x, t. \tag{38}$$

Управление в этом случае может быть выражено через v, x, t как $u(v, x, t)$. Задача приводима к простейшей, если

$$f_0(x, u(v, x, t), t) = M_0(x, t) + N_0(x, t)v.$$

Выразим M_0 и N_0 через f_0, для чего запишем условия

$$\frac{\partial f_0}{\partial v} = \frac{\partial f_0}{\partial u} : \frac{\partial v}{\partial u} = N_0(x, t), \tag{39}$$

$$f_0(x, u_{\text{ст}}(x,t), t) = M_0(x,t). \tag{40}$$

Здесь зависимость $u_{\text{ст}}(x,t)$ (статическое управление) находится из условия

$$v(x, u_{\text{ст}}, t) = 0. \tag{41}$$

Выражения (39)–(41) не только представляют собой условия приводимости, но и определяют N_0 и M_0, которые после подстановки в условия (29)–(33) позволяют найти оптимальное решение.

Заведомо приводимы задачи с неограниченным управлением аффинные по u

$$I = \int_0^T [l_0(x,t) + r_0(x,t)u]dt \to \max \tag{42}$$

при условии

$$\dot{x} = l(x,t) + r(x,t)u, \quad r \neq 0. \tag{43}$$

Из условий (39)–(41) получим

$$\left.\begin{array}{l} N_0(x,t) = \frac{r_0(x,t)}{r(x,t)}, \quad u_{\text{ст}}(x,t) = -\frac{l(x,t)}{r(x,t)}, \\ M_0(x,t) = l_0(x,t) - \frac{r_0(x,t)l(x,t)}{r(x,t)}, \\ \overline{k}(\overline{x}) = \int\limits_0^{\overline{x}} \frac{r_0(x,T)}{r(x,T)}dx, \quad k_0(x_0) = \int\limits_0^{x_0} \frac{r_0(x,0)}{r(x,0)}dx. \end{array}\right\} \tag{44}$$

Подстановка этих выражений в условия (28) определяет $x^*(t), \overline{x}$ и x_0.

Пример 3.

$$\left.\begin{array}{l} I = \int\limits_0^T \frac{xt}{cu-Q}dt \to \max, \quad x(T) = \overline{x}, x(0) = x_0 \\ \dot{x} = -\frac{xu}{cu-Q}. \end{array}\right\} \tag{45}$$

Здесь $Q = Q(x,t)$ — заданная функция.

По условиям приводимости (39), (40)

$$N_0(x,t) = -\frac{xtc}{(cu-Q)^2} : \frac{x(cu-Q) - cxu}{(cu-Q)^2} = \frac{ct}{Q}, \tag{46}$$

$u_{\text{ст}}(x,t) = 0$,

$$M_0(x,t) = -\frac{xt}{Q}. \tag{47}$$

Если задано $V_x(t)$, множество допустимых значений x, то оптимальное решение $x^*(t)$ доставляет максимум функции

$$R = \left[-\frac{xt}{Q} + \int_0^x \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{ct}{Q}\right)dx\right] \to \max_{x \in V_x(t)} \tag{48}$$

$$\overline{k} - k_0 = -\frac{cT}{Q}x(T). \tag{49}$$

Граница множества $V_x(t)$ может определяться и ограничениями на u, если они заданы. В этом случае решение приведенной задачи дает верхнюю оценку для решения исходной.

Отметим, что внутри множества V_x условие стационарности R по x приводит к уравнению Миеле [5], полученному другим способом

$$Q(c-t)+t\left(c\frac{\partial Q}{\partial t}-x\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0. \tag{50}$$

Оно является более слабым, чем (48), (49), условием оптимальности и может иметь не единственное решение.

Векторный случай. Пусть в задаче (20), (25) $x(t)$ — вектор-функция

$$x(t)=(x_1(t),x_2(t)),$$

где $x_1(t)$ — векторная, а $x_2(t)$ — скалярная функции. Условия, наложенные на фазовые координаты,

$$\dot{x_1}=f_1(x,u,t),\quad u\in V_u,\quad x_1(0)=x_1(0) \tag{51}$$

$$\dot{x_2}=\upsilon,\quad x_2\in V_{x_2}. \tag{52}$$

Функция f_1 непрерывно-дифференцируема по x_1,t и непрерывна по x_2,u,V_u и V_{x_2} — замкнуты и ограниченны. Критерий оптимальности

$$I=\int\limits_0^T[f_0(x,u,t)+N_0(x_2,t)\upsilon]dt\to\max. \tag{53}$$

Аналогично простейшей задаче функционал (53) может быть приведен к эквивалентной форме

$$I=\int\limits_0^T\left[f_0(x,u,t)-\int\limits_0^{x_2}\frac{\partial}{\partial t}N_0(x_2,t)dx_2\right]dt+\overline{k}(\overline{x_2})-k_0(x_{20})\to\max, \tag{54}$$

где $\overline{k}$ и k_0 соответствуют выражениям (22).

Задача (54), (51) представляет собой стандартную задачу оптимального управления, с управляющими воздействиями $u(t)$ и $x_2(t)$.

Задачи, приводимые к простейшей на части интервала управления. Пусть интервал $[0,T]$ может быть разбит на три подынтервала $[0,t_1)$, $[t_1,t_2]$, $(t_2,T]$, а функционал I может быть представлен как

$$\begin{gathered}I=I_1+I_0+I_2=\int\limits_0^{t_{1-}}f_{01}(x,u,t)dt+\\+\int\limits_{t_1}^{t_2}(l_0(x,t)+r_0(x,t)u)dt+\int\limits_{t_{2+}}^{T}f_{02}(x,u,t)dt\to\max\end{gathered} \tag{55}$$

при условии

$$\dot{x} = l(x,t) + r(x,t)u, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = \overline{x}, \quad r(x,t) \neq 0. \tag{56}$$

В этой задаче на подынтервале $[t_1, t_2]$ оптимальное решение определяется условиями (44) и не зависит от решения на остальной части интервала управления.

Интересен случай, когда отрезок $[t_1, t_2]$ стягивается в точку $t = t_\nu$. В этом случае слагаемое I_0 в (55) равно

$$I_0 = \int\limits_{x(t_{\nu-})}^{x(t_{\nu+})} \frac{r_0(x_1, t_\nu)}{r(x, t_\nu)} dx. \tag{57}$$

Если $r_0(x, t_\nu) = 0 \quad \forall x$, то значения $x(t_{\nu-})$ и $x(t_{\nu+})$ находят по условию максимума функционалов I_1 и I_2 со свободными правым и левым концами траектории соответственно.

4. Оценочные задачи

Пусть задача оптимального управления имеет форму

$$I = \int\limits_0^T f_0(x, z, u_2, t) dt \to max \tag{58}$$

при условиях

$$\dot{z} = f_1(x, z, u_1, t), \tag{59}$$

$$\dot{x} = f_2(x, z, u_2, t). \tag{60}$$

Функции $f_i, i = 0, 1, 2$ непрерывны по z, u и непрерывно дифференцируемы по x, t. Для простоты будем считать $z(t)$ и $u_1(t)$ скалярными.

Простейший способ построения задачи, решение которой проще, чем решение исходной (58)–(60), и позволяет оценить ее значение I^* сверху (оценочной), состоит в том, чтобы отбросить уравнение (59) и считать переменную z наряду с u_2 управлением в задаче (58)–(60).

Ограничения на z могут быть наложены непосредственно или получены с учетом граничных условий на z и ограничений на u_1, как множество достижимых из заданных граничных точек значений z в силу уравнения (59). Для некоторых задач такое „внешнее множество достижимости“ $V_z(x,t)$ может быть легко построено.

Пусть решение оценочной задачи $\overline{x(t)}, \overline{u_2(t)} \in V_u, \overline{z(t)} \in V_z$ найдено, ему соответствует значение критерия оптимальности $\overline{I} \geq I^*$. Управление $\overline{u_1(t)}$ находят по условию

$$\dot{\overline{z}} = f_1(\overline{x}, \overline{u}_1, \overline{z}, t). \tag{61}$$

Если найденное таким образом управление допустимо, то решение оценочной задачи оптимально для исходной задачи. Если же оно не допустимо, то строят такую последовательность допустимых решений исходной задачи, которая стремилась бы к решению оценочной. Если при этом значение критерия оптимальности исходной задачи стремится к $\overline{I}$, то она имеет „обобщенное решение" в классе последовательностей, а ее критерий оптимальности на множестве допустимых решений не достигает максимума, а достигает точной верхней грани.

Любое допустимое решение реализует оценку значения задачи снизу $I^0 \leq I^*$. Выбрав допустимое решение, в том или ином смысле близкое к решению оценочной задачи, или по принципу „близоруко-оптимального" решения, когда управление выбирают по условию максимума подынтегрального выражения I, а переменные состояния рассчитывают из уравнений связи, можно рассчитывать, что разность $\overline{I}-I^0$ окажется достаточно малой. В этом случае найденное допустимое решение можно принять в качестве приближенного решения исходной задачи.

Пример 4. Рассмотрим в качестве иллюстрации задачу с критерием

$$I = -\int_0^9 (x(t) - \sqrt{t})^2 dt \to max. \tag{62}$$

Функция $x(t)$ подчиняется дифференциальному уравнению и ограничениям

$$\dot{x} = u; \quad |u| \leq 1; \quad x(0) = 1; \quad x(9) = 2.$$

Оценочную задачу получим, отбросив ограничение на управление, а вместе с ним и дифференциальное уравнение. Будем искать $x(t)$ в классе кусочно-непрерывных функций по условию максимума функционала I. Ее решение, очевидно

$$\overline{x}(t) = \sqrt{t}; \quad \overline{u}(t) = -\delta(t) + \tfrac{1}{2\sqrt{t}} - \delta(t-9),$$

значение же критерия $\overline{I} = 0$.

Чтобы найти допустимое решение, приближающее $\overline{x}$, построим на плоскости x, t множество M, в точки которого можно попасть с помощью ограниченного по модулю управления из точек $x(0) = 1$ и $x(9) = 2$. В области M построим реализуемую траектортю, минимально по модулю отличающуюся от $\overline{x}(t)$ в каждый момент времени. Эта траектория $x^0(t)$ проходит по границе M до ее пересечения с $\overline{x}(t) = \sqrt{t}$, затем совпадает с этой линией и, наконец, сходит с нее в точке пересечения с другой границей M. Соответствующее управление $u^0(t)$ принимает значения, равные -1 в начале и в конце интервала $[0, 9]$, а для промежуточных значений $0,38 \leq t \leq 8.1$ оно совпадает с $\overline{u}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$.

Решение той же задачи с использованием необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума совпадает с найденным решением, но его получение куда более трудоемко, так как оно содержит участок особого управления.

5. Переход к новым переменным состояния

Пусть в задаче (58)–(60) уравнение (59) имеет форму

$$\dot{z} = F(x, z)v, z \in V_z, F(x, z) \neq 0, \tag{63}$$

управление v не ограничено.

Изложенная выше процедура при этом упрощается. В оценочной задаче z переводят в разряд управлений, функции f_0 и f_2 могут быть не дифференцируемы, а непрерывны по z, соответствующее решению оценочной задачи управление

$$\overline{v(t)} = \frac{\dot{\overline{z(t)}}}{F(\overline{z(t)}, \overline{x(t)})}.$$

За счет замены переменных рассмотренный класс задач можно расширить на задачи, в которых уравнения (60) имеют вид

$$\dot{x} = f_1(x, z, u, t) + f_2(x, z)v. \tag{64}$$

Для приведения задачи (58), (63), (64) к форме (58), (59), (63) нужно сделать замену переменных $y(x, z)$, так чтобы скорость изменения этой переменной не зависела от v [12]. Скорость изменения y

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial x}(f_1(x, z, u, t) + f_2(x, z)v) + \frac{\partial y}{\partial z}F(x, z)v. \tag{65}$$

Она не зависит от v, если выполнено условие

$$\frac{\partial y}{\partial x}f_2(x, z) + \frac{\partial y}{\partial z}F(x, z) = 0, \tag{66}$$

которое представляет собой линейное однородное уравнение в частных производных относительно $y(x, z)$. Одним из решений этого уравнения является первый интеграл $y_0(x, z)$ уравнения в обыкновенных производных вида

$$\frac{dx}{f_2(x, z)} = \frac{dz}{F(x, z)}. \tag{67}$$

Любая непрерывно-дифференцируемая функция от y_0 является решением уравнения (66).

Когда $y(x, z)$ найдена, можно исключить из условий задачи x через y и z и переписать задачу в форме

$$I = \int\limits_0^T \tilde{f}_0(y, u, z, t)dt \to \max \tag{68}$$

при условиях

$$\dot{y} = \tilde{f}_1(y, u, z, t), \tag{69}$$

$$\dot{z} = \tilde{F}(y, z)v, \quad z \in V_z, u \in V_u, x(y_0, z_0) = x_0. \tag{70}$$

В этой задаче переменная z может быть переведена в разряд управлений.

Пусть x — вектор и неограниченное управление v линейно входит в правую часть не одного, а нескольких дифференциальных уравнений. В этом случае можно перейти от исходных фазовых координат $x(t)$ к новым переменным состояния $y(x, t)$ так, чтобы скорость одной из составляющих $y_1(x,t)$ линейно зависела от υ, а скорости остальных не зависели от υ, а зависели бы от y_1. Например,

$$I = \int_0^T [l_0(x,t) + r_0(x,t)\upsilon]dt \to \max \tag{71}$$

$$\begin{gathered} x(t) = (x_1(t), x_2(t)), \\ \dot{x_1} = l_1(x,t) + r_1(x)\upsilon, \\ \dot{x_2} = l_2(x,t) + r_2(x)\upsilon, \\ x(t) \in V_x(t) \subset R, \quad r_1(x) \neq 0, r_2(x) \neq 0. \end{gathered} \tag{72}$$

Выберем новые переменные $y_1(x)$ и $y_2(x)$ так, чтобы

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{1}{r_1(x)}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = +\frac{1}{r_2(x)}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{r_2(x)}. \tag{73}$$

Такая замена найдется, если

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial y_i}{\partial x_2 \partial x_1}, \quad i = 1, 2.$$

В этом случае

$$\left.\begin{array}{l} \dot{y_1} = \frac{l_1(x,t)}{r_1(x)} + \frac{l_2(x,t)}{r_2(x)} + 2\upsilon, \\ \dot{y_2} = \frac{l_1(x,t)}{r_1(x)} - \frac{l_2(x,t)}{r_2(x)}. \end{array}\right\} \tag{74}$$

После того как в выражениях (71), (74) вектор x выражен через y, получим задачу, в которой переменная y_1 может быть переведена в разряд управлений. Наложенные на $y(x)$ ограничения нужно выразить через ограничения на $x(t)$.

Пример 5.

$$I = \int_0^T x_1^2 dt \to \min,$$

при условии

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x_1} = x_2 + \upsilon, \quad \dot{x_2} = -\upsilon, \\ x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \\ x_1(T) = x_2(T) = 0, \quad x \in V_x. \end{array}\right\} \tag{75}$$

Сделаем замену

$$y_1 = (x_1 - x_2)/2, \quad y_2 = (x_1 + x_2)/2,$$

при этом

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_2 - y_1,$$

$$\dot{y_1} = \frac{x_2}{2} + \upsilon = \frac{y_2 - y_1}{2} + \upsilon, \tag{76}$$

$$\dot{y_2} = \frac{x_2}{2} = (y_2 - y_1)/2, \tag{77}$$

$$I = \int\limits_0^T (y_1 + y_2)^2 dt \to \min. \tag{78}$$

Переменная y_1 может быть переведена в разряд управлений в задаче (77), (78), в которой ограничения на x определяют множество допустимых значений y.

Пример 6. Задача оптимального управления реактором периодического действия с использованием подпитки имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} I = \int_0^T zxp\ (x, s, u)\ dt \to \max; \\ \dot{x} = x\mu\ (x, s, u) - v\frac{x}{z}; \\ \dot{s} = -x\eta\ (x, s, u) + v\ \frac{s_0 - s}{z}; \\ \dot{z} = v. \end{array}\right\} \tag{79}$$

Здесь z – объем аппарата; v – расход подпитки; x и s – концентрации реагентов; s_0 – концентрация одного из них в подпитке; u – вектор режимных управлений (температура, pH и др.), фиксированы начальные значения всех переменных состояния, подынтегральное выражение в I представляет собой скорость образования целевого продукта.

Продемонстрируем на этой задаче последовательность использования метода замены переменных:

1-й шаг. Перейдем к переменным $y_1(x, z, s)$ и $y_2(x, z, s)$, скорость изменения которых не зависила бы от v. Условие независимости для каждой из этих переменных имеет одну и ту же форму

$$\frac{\partial y_i}{\partial x}\frac{x}{z} + \frac{\partial y_i}{\partial s}\frac{s_0 - s}{z} + \frac{\partial y_i}{\partial z} = 0; \qquad i = 1, 2. \tag{80}$$

Уравнению (80) соответствует система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\frac{z}{x}dx = \frac{z}{(s_0 - s)}ds = dz,$$

которая имеет два независимых первых интеграла $C_1(z, x, s)$ и $C_2(z, x, s)$. Решением (80) является любая дифференцируемая функция от C_1, C_2. Проще всего принять $y_1 = C_1$ и $y_2 = C_2$, где C_1 и C_2 – первые интегралы уравнений

$$-\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}; \qquad \frac{ds}{s_0 - s} = \frac{dz}{z},$$

откуда

$$y_1 = C_1(x, z) = -\frac{1}{xz}; \qquad y_2 = C_2(s, z) = \frac{1}{(s_0 - s)z}.$$

2-й шаг. Заменяя в задаче (79) x и s как $x = -1/y_1 z, \quad s = s_0 - 1/y_2 z$ и расширяя задачу за счет отбрасывания уравнения для z, получаем оценочную задачу меньшей размерности

$$I = -\int_0^T \frac{1}{y_1}\ \widetilde{p}\ (z, y_1, y_2, u)\ dt \to \max;$$

$$\dot{y}_1 = -\frac{1}{y_1 z^2}\ \widetilde{\mu}\ (z, y_1, y_2, u);$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{y_2^2}{y_1}\ \widetilde{\eta}\ (z, y_1, y_2, u),$$

управлениями в которой являются z и u. Решение этой задачи, если оно реализуемо, определит решение исходной, а если не реализуемо, то позволит получить верхнюю оценку ее значения I^* и даст полезную информацию о характере решения исходной задачи.

Эффективность такого рода преобразований продемонстрирована на примерах многих реальных задач (см. [12], [13] и др.).

6. Подбор «инварианта»

Пусть в задаче (1)–(4) найдется такая функция $y(x) : R^n \times [0, T] \to R$, что скорость ее изменения в силу уравнений (2) равна нулю:

$$y(x(t)) = y(x_0) = \text{Const}. \tag{81}$$

По условию (81) одна из фазовых переменных может быть выражена через остальные с уменьшением размерности задачи.

Условие постоянства y вдоль траекторий системы приводит к равенству

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} f_i(x, u, t) = 0, \quad \forall x, t, u \in V_u. \tag{82}$$

Переменная $y(x)$, неизменная на искомом решении, заведомо существует в физических задачах, решение которых удовлетворяет законам сохранения вещества, энергии, энтропии (если оно ищется в классе обратимых процессов) и пр.

Пример 7.

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x_1} = u(x_1 - x_2), \\ \dot{x_2} = -u(x_1 - x_2) - 2x_3 x_4, \\ \dot{x_3} = u x_3 + 2x_2 x_4, \\ \dot{x_4} = u x_4, \quad x_{41} \le x_4 \le x_{42} \\ x_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1, ..., 4. \end{array}\right\} \tag{83}$$

Эта задача возникает в связи с торможением системы квантовых осцилляторов [6], [7]. Ее физический смысл позволяет найти переменную $y(x)$, не изменяющуюся вдоль траекторий движения

$$y(x) = \frac{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{x_4^2}. \tag{84}$$

Действительно, в соответствии с (82) имеем

$$\begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = \frac{2x_1}{x_4^2} u(x_1 - x_2) + \frac{2x_2}{x_4^2}[u(x_1 - x_2) + 2x_3 x_4] - \\ - \frac{2x_3}{x_4^2}(u x_3 + 2x_2 x_4) - \frac{2(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)}{x_4^3} u x_4 = 0. \end{array}$$

Физически значение y однозначно связано с фон Неймановской энтропией $S_N(y)$, и постоянство y соответствует постоянству S_N (обратимости процесса).

Если y найдена, то размерность задачи можно снизить, найдя значение y по начальным условиям и выразив из (84) одну из переменных через остальные.

7. Ляпуновские уравнения

Уравнения

$$\dot{y} = f(x, u, t), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) = \overline{y}, \tag{85}$$

называют Ляпуновскими [2], если их правая часть не зависит от y.

Такие уравнения могут быть заменены интегральными условиями вида

$$\int\limits_0^T f(x(t), u(t), t)dt = \overline{y} - y_0, \tag{86}$$

если переменная y не входит в правые части уравнений для x.

В исходной постановке задача (1)–(4) может не содержать Ляпуновских уравнений, но существует замена $y_1(x, t)$ такая, что правая часть уравнения

$$\dot{y}_1 = \varphi(x, u, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} f_i(x, u, t) + \frac{\partial y_1}{\partial t} \tag{87}$$

после замены одной из фазовых переменных, например x_1, через y_1 не содержит y_1. Тогда уравнение (87) эквивалентно условию

$$\int\limits_0^T \varphi(x, u, t)dt = y_1(T) - y_1(0) \tag{88}$$

и размерность задачи может быть уменьшена.

Пример 8. Пусть

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(x_2, u, t)x_1, \quad x_1(0) = x_{10}, \quad x_1(T) = \overline{x_1} \\ \dot{x}_2 = f(x_2, u, t). \end{array}\right\} \tag{89}$$

Замена $y(x_1) = \ln x_1$ приводит к уравнениям

$$\left.\begin{array}{l} \dot{y} = f_1(x_2, u, t), \quad y(0) = \ln x_{10}, \quad y(T) = \ln \overline{x_1}, \\ \dot{x}_2 = f(x_2, u, t). \end{array}\right\} \tag{90}$$

Первое из этих уравнений — Ляпуновское, и его можно заменить интегральным ограничением

$$\int\limits_0^T f_1(x_2, u, t)dt = y(T) - y(0), \tag{91}$$

что упрощает решение.

В задачах управления термодинамическими системами [2], состояние системы описывается значениями экстенсивных переменных (числа молей, внутренней энергии, объема, энтропии и пр.), а скорости их изменения зависят от интенсивных переменных (температур, давлений, химических потенциалов и пр.), так что уравнения часто оказываются ляпуновскими.

8. Переход от линейных дифференциальных уравнений к интегральным

Пусть задача (1)–(4) содержит дифференциальное уравнение вида

$$a_0 x^{(q)} + a_1 x^{(q-1)} + ... + a_{q-1}\dot{x} + a_q x = u(t), \tag{92}$$

где a_ν $(\nu = 0, ..., q)$ — константы.

Ясно, что уравнение (92) эквивалентно системе уравнений вида (2). При нулевых начальных значениях производных оно может быть переписано в интегральной форме

$$x(t) = \int\limits_0^t k(t-\tau)u(\tau)d\tau + x(0), \tag{93}$$

где импульсная переходная функция

$$k(\tau) = L^{-1}\left[\frac{1}{a_0 s^{q+} + a_1 s^{q-1} + ... + a_q}\right] \tag{94}$$

— обратное преобразование Лапласа от функции, стоящей в квадратных скобках, s — оператор Лапласа [8].

Часто в реальных задачах дифференциальные уравнения системы вообще не известны, а импульсная переходная функция или ее интеграл (кривая разгона) получены экспериментально. в этих случаях переход к дифференциальным уравнениям представляет собой самостоятельную задачу, не всегда имеющую решение.

Уравнение (92) может быть уравнением с запаздывающим аргументом, отражающим распределенный характер управляемого объекта. Это практически не осложняет интегральную форму (93) представления для $x(t)$.

Пример 9. Обобщенная задача Булгакова.

Найти оптимальное скалярное ограниченное по модулю управление $u(t)$, для которого функционал

$$I = \int\limits_0^T f_0(u,t)dt + F_0(x(T)) \to \max_{|u(t)|\le 1} \tag{95}$$

при условиях

$$x_i(T) = x_{i0} + \int\limits_0^T k_i(T-\tau)u(\tau)d\tau \quad i = 1, ..., n. \tag{96}$$

Функция f_0 непрерывна по u и непрерывно–дифференцируема по t.

Обобщенный функционал Лагранжа для задачи (95), (96) примет вид (см. [9], [10])

$$\begin{aligned} &S = I + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i[(x_i(T) - x_{i0}) - \int\limits_0^T k_i(T-t)u(t)dt] = \\ &= \int\limits_0^T [f_0(u,t) - u(t)\sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i(T-t)]dt + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i[(x_i(T) - x_{i0}) + \\ &+ F_0(x(T)) = \int\limits_0^T R(u,t,\lambda)dt + S_1(\lambda, x(T)). \end{aligned} \tag{97}$$

Условия оптимальности приводят к требованию стационарности S по $x(T)$ и максимума R по $u(t)$. Из этих условий получим:

$$\lambda_i = -\frac{\partial F_0}{\partial x_i}, \quad i = 1, ..., n, \tag{98}$$

$$u^*(t) = \arg\max_{|u|\le 1}[f_0(u,t) + u\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_0}{\partial x_i} k_i(T-t)]. \tag{99}$$

Решение задачи сильно упрощается, когда $F_0(x(T)) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i(T)$. В этом случае $\lambda_i = -a_i$ и оптимальное управление определено условиями (99) для тех значений t, для которых максимум по u выражения $[f_0(u,t) + u\sum_{i=1}^{n} a_i k_i(T-t)]$ единственный. В задаче Булгакова x – скаляр, а $I = -x(T)$.

В том случае, когда F – нелинейная функция, ее производные зависят от $x(T)$ и требование максимума (99) нужно решать совместно с уравнениями (98) численно, например, методом итераций. То же относится и к рассмотренной ниже задаче с квадратичным функционалом.

Пример 10. Рассмотрим первоначально задачу

$$I = \int\limits_0^\infty x^2(t)dt \to \min \Big/ \ \dot{x} = u, \ |u| \le 1, x(0) = 1. \tag{100}$$

Эквивалентное дифференциальному уравнению условие в интегральной форме имеет вид

$$x(t) - x(0) = \int\limits_0^\infty h(t-\tau)u(\tau)d\tau. \tag{101}$$

Здесь $h(t)$ — функция Хевисайда, равная нулю при $t < 0$ и единице при $t \ge 0$.

Для невырожденного решения ($\lambda_0 = -1$) запишем условия оптимальности задачи (100), (101) через обобщенную функцию Лагранжа [10]

$$R = -x^2(t) + \int\limits_0^\infty \lambda(\tau)h(\tau - t)u(t)d\tau - \lambda(t)(x(t) - x(0)). \tag{102}$$

Условия оптимальности сводятся к требованию стационарности R по x и максимума по u.

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0 \to \quad \lambda(t) = -2x(t). \tag{103}$$

Условие максимума с учетом (103) приводит к равенству

$$u^*(t) = \arg\max_{|u|\le 1} R(x^*, \lambda^*, u) \to u^*(t) = -\mathrm{Sign} \int\limits_t^\infty x(\tau)h(\tau - t)d\tau. \tag{104}$$

Так как $h(\tau - t)$ при $\tau \ge t$ равно единице, то после подстановки (104) в (101) получим для оптимальной траектории

$$x(t) = x(0) - \int\limits_0^t \left\{ \mathrm{Sign} \int\limits_\tau^\infty x(t)dt \right\} d\tau. \tag{105}$$

Эта задача легко обобщается на случай, когда $x(t)$ представляет собой решение линейного дифференциального уравнения вида

$$a_0 x^{(q)}(t) + a_1 x^{(q-1)}(t) + ... + a_0 x(t) = u(t) \tag{106}$$

при тех же ограничениях на u, что в задаче (100).

Действительно, при переходе к интегральному уравнению связь между x и u примет форму уравнения свертки

$$x(t) - x(0) = \int\limits_0^\infty k(t-\tau)u(\tau)d\tau, \tag{107}$$

где $k(t) = 0$ при $t < 0$, а при $t \ge 0$ представляет собой обратное преобразование Лапласа от выражения (94).

Обобщенная функция Лагранжа

$$R = -x^2(t) + u(t) \int\limits_t^\infty \lambda(\tau)k(\tau - t)d\tau - \lambda(t)(x(t) - x_0).$$

Условия стационарности этой функции по x и максимума по u приводят к соотношениям

$$\lambda(t) = -2x(t), \quad u^*(t) = -\mathrm{Sign} \int_t^\infty x(\tau)k(\tau - t)d\tau. \tag{108}$$

На оптимальном решении

$$x(t) = x(0) - \int\limits_0^t [k(t-\tau)\mathrm{Sign} \int\limits_\tau^\infty k(t-\tau)x(t)dt]d\tau. \tag{109}$$

Если уравнение (106) является уравнением с запаздывающим аргументом с величиной запаздывания θ, то в условии (109) функцию $k(t)$ нужно заменить на функцию $k(t-\theta)$. Соответственно пределы интегрирования изменятся с t на $t-\theta$ и с τ на $\tau+\theta$.

Для линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами импульсная переходная функция $k(t)$ в уравнении свертки заменяется функцией Грина $k(t,\tau)$. Во многих случаях численное решение одного интегрального уравнения оказывается проще, чем решение краевой задачи для системы дифференциальных уравнений.

Пример 11. В качестве примера остановимся на задаче, подробно исследованной в [11]. В этой задаче в уравнении (92) $a_0 = 1, a_\nu = 0$ $(\nu = 1, ..., q)$. Импульсная переходная функция представляет собой взятый q раз интеграл от δ-функции

$$k(t) = \frac{t^{q-1}}{(q-1)!}. \tag{110}$$

Интегральное уравнение для оптимального решения при нулевых начальных условиях по всем производным получается из (109)

$$x(t) = x_0 - \int\limits_0^t \left[\frac{(t-\tau)^{q-1}}{(q-1)!}\mathrm{Sign}\int\limits_\tau^\infty x(t)(t-\tau)^{q-1}dt\right]d\tau. \tag{111}$$

Когда начальные условия для производных не нулевые: $x_0^{(\nu)} = x_{\nu 0}, \nu = 0, 1, ..., q-1$, получим вместо (107) равенство

$$x(t) = x_0 + \sum_{\nu=1}^{q-1} x_{\nu 0}\frac{t^\nu}{\nu!} + \int\limits_0^t \left[\frac{(t-\tau)^{q-1}}{(q-1)!}u(\tau)\right]d\tau. \tag{112}$$

Функция R аналогично (102) равна

$$R = -x^2(t) + u(t)\int\limits_0^\infty \lambda(\tau)\frac{(\tau-t)^{q-1}}{(q-1)!}d\tau - \lambda(t)\left(x(t) - \sum_{\nu=0}^{q-1} x_{\nu 0}\frac{t^\nu}{\nu!}\right). \tag{113}$$

Условия оптимальности (стационарности этой функции по x и максимума по u) приводят к соотношениям:

$$\lambda(t) = -2x(t), \quad u^*(t) = -\mathrm{Sign}\int\limits_t^\infty x(\tau)\frac{(\tau-t)^{q-1}}{(q-1)!}d\tau. \tag{114}$$

9. Заключение

Рассмотрены способы преобразования вариационных задач и даны примеры их использования в прикладных задачах, некоторые из которых без перехода к преобразованной задаче решить не удавлось. Эти примеры показывают, что до решения задачи стандартными методами целесообразно оценить возможности ее трансформации с целью упрощения последующего решения.

Список литературы

1. *Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1984. (Alekseev V.M., Galeev E.M., Tichomirov V.M. Sbornik zadash po optimizazii. Moskva: Nauka, 1984 [in Russian]).

2. *Розоноэр Л.И., Цирлин А.М.* Оптимальное управление термодинамическими системами // Автоматика и Телемеханика. 1983. №1. С. 70–79; №2. С. 88–101; №3. С. 50–64 (English transl.: Rozonoer L.I., Tsirlin A.M. Optimal control of thermodynamic systems // Automation and Remote Control. 1983. №1. P. 70–79; №2. P. 88–101; №3. P. 50–64).

3. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.(Krotov V.F., Gurman V.I. Metodi i zadashi optimalnogo upravlenija. Moskva: Nauka, 1973 [in Russian]).

4. *Цирлин А.М.* Методы усредненной оптимизации и их приложения. М.: Физматлит, 1997. (Tsirlin A.M. Metodi usrednennoy optimizazii i ix prilogenija. Moskva: Fiznatlit, 1997 [in Russian]).

5. *Brayson A.E, YI-Chi-Ho. Applied optimal Control. Riais. Publ. Comp. 1969.*

6. *Salamon P., Hoffman K-H., Yair Rezek* Maximum work in minimum time from a conservative quantum sustem // Chem. Phys. 2009. N 11. P. 1027–1032.

7. *Цирлин А.М., Саламон П., Хоффман К-Х.* Замена переменных состояния в задачах параметрического управления осцилляторами // Автоматика и телемеханика. 2011. №8. (English transl.: Tsirlin A.M., Salamon P., Hoffman K.-H. Change of variables in problems of optimal parametrical control of oscillators // Automation and Remote Control. 2011. N8).

8. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматлит, 1961. 524 с.(Ditkin V.A., Prudnikov A.P. Integralnie preobrazovanija i operazionnoe ischislenie. Moskva: Fizmatlit, 1961 [in Russian]).

9. *Цирлин А.М.* Оптимизация в среднем и скользящие режимы в задачах оптимального управления // Изв АН СССР. Техн. киберн. 1974. № 2. С. 27–33. (Tsirlin A.M. Optimizazija v srednem i skolzjachie regimi v zadashach optimalnogo upravlenija // Izvestija AN SSSR. Texnisheskaja kibernetika. 1974. N2. S. 27–33 [in Russian]).

10. *Цирлин А.М.* Условия оптимальности скользящих режимов и прнцип максимума для задачи со скалярным аргументом // Автоматика и телемеханика. 2009. №5 (English transl.: Tsirlin A.M. Optimality conditions of sliding modes and maximum principle for problems with a scalar arguments // Automation and Remote Control. 2009. №5).

11. *Зеликин М.И., Локоциевский Л.В., Хильдебранд Р.* Геометрия окрестностей особых экстремалей в задачах с многомерным управлением // Труды матем. инст. им. В.А. Стеклова. 2012. Т. 277 (English transl.: Zelikin M.I., Lokocievsky L.V., Hildebrand R. Geometry of equilibrium extremal trajectory neighborhoods in problems with multidimensional control // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2012. V. 277).

12. *Гурман В.И.* Принцип расширения в экстремальных задачах. М.: Физматлит, 1997 (Gurman V.I. Extension principle in extremal problems. Moskva: Fizmatlit, 1997 [in Russian]).

13. *Гурман В.И., Дыхта В.А.* Вырожденные задачи оптимального управления и метод кратных максимумов // Автоматика и телемеханика. 1977. № 3 (English transl.: Gurman V.I., Dyhta V.A. Degenerate problems of optimal control and multiple maxima method // Automation and Remote Control. 1977. №3).

Transformations of Optimal Control Problems

Tsirlin A.

Program Systems Institute of RAS
Petra I st., 2, s. Ves'kovo, Pereslavskii raion, Yaroslavskaya obl., 152021, Russia

Keywords: optimum control, transformation, variable condition, decision

The paper considers such transformations of variational and optimal control problems (by a change of phase variables) that help to get the solution. Among these techniques are methods of the dimensionality reduction by a transition from an original argument to a new one, by a detection of a variable staying unchanged through equations of the system (invariant), by extension of the original problem and a transition from it to a simpler problem that gives an estimate solution of the original one. In some cases we can get a solution that is simplified by a transition from a set of conditions in the form of differential equations to the only integral condition. This relates to equations with a retarded argument. The paper gives examples of application of these techniques to real engineering problems such as an optimal control of biosynthesis, cooling of crystal systems by a laser radiation, etc.

Сведения об авторе:
Цирлин Анатолий Михайлович,
Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН,
заместитель директора по научной работе