

Model of Square Wave Noise Based on Telegraph Process

L. Y. Bystrov¹, A. N. Gladkov¹, E. V. Kuzmin¹DOI: [10.18255/1818-1015-2026-2-206-229](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2026-2-206-229)¹P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

MSC2020: 65C20

Research article

Full text in Russian

Received April 23, 2026

Revised May 7, 2026

Accepted May 22, 2026

This article addresses the problem of mathematical modeling of square wave noise in electromagnetic signals, particularly in eddy current defectograms, to generate high-quality synthetic samples for training machine learning algorithms to detect and suppress square wave noise in data. A comprehensive study of naive models is conducted: a deterministic square wave signal, a square wave signal with white noise, and a telegraph process with white noise. The telegraph process with white noise serves as the central object of the study. For this model, stationary characteristics are analytically derived: the limiting probability density function and the autocorrelation function. To estimate the model parameters, a fully Bayesian approach is proposed and implemented for the first time, utilizing Gibbs sampling and the Forward Filtering Backward Sampling (FFBS) algorithm to efficiently marginalize the hidden Markov states. The parameter estimation algorithm converges rapidly, reaching an overall variance of $1e-6$ value by the 1500th iteration. It is established that classical models possess fundamental limitations due to the unrealistic assumption of a strictly constant period and duty cycle. It is shown that while the telegraph process resolves the issue of stochastic pulse durations, ignoring the continuity of transition fronts leads to a mathematical artifact — a shift in the modes of the theoretical limiting distribution compared to the empirical one. Furthermore, it is demonstrated that the absence of a low-pass filtering mechanism deprives the model's autocorrelation function of its characteristic oscillating component. The experimental confirmation of the significance of these factors justifies the direction for further research: the development of modified stochastic models integrating smooth state-switching mechanisms for the adequate simulation of square wave noise. Eddy current rail defectograms served as the empirical base for testing the models. Nevertheless, the developed mathematical framework can be successfully applied to model square wave noise in other types of electromagnetic signals, such as in ECG and magnetotelluric sounding.

Keywords: square wave noise; random telegraph noise; burst noise; telegraph process; eddy current testing

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Bystrov, Leonid Y. | ORCID iD: [0000-0002-0610-5466](https://orcid.org/0000-0002-0610-5466). E-mail: l.bystrov@uniyar.ac.ru
(corresponding author) | Assistant of the Department of Theoretical Computer Science

Gladkov, Artemy N. | ORCID iD: [0009-0007-0211-5660](https://orcid.org/0009-0007-0211-5660). E-mail: a.gladkov@uniyar.ac.ru
Assistant of the Department of Theoretical Computer Science

Kuzmin, Egor V. | ORCID iD: [0000-0003-0500-306X](https://orcid.org/0000-0003-0500-306X). E-mail: kuzmin@uniyar.ac.ru
Dr. Sc., Head of the Department of Theoretical Computer Science

Funding: Yaroslavl State University (project VIP-021).

For citation: L. Y. Bystrov, A. N. Gladkov, and E. V. Kuzmin, "Model of square wave noise based on telegraph process", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 33, no. 2, pp. 206–229, 2026. DOI: [10.18255/1818-1015-2026-2-206-229](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2026-2-206-229).

Модель прямоугольного шума на основе телеграфного процесса

Л. Ю. Быстров¹, А. Н. Гладков¹, Е. В. Кузьмин¹

DOI: [10.18255/1818-1015-2026-2-206-229](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2026-2-206-229)

¹Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

УДК 519.24

Научная статья

Полный текст на русском языке

Получена 23 апреля 2026 г.

После доработки 7 мая 2026 г.

Принята к публикации 22 мая 2026 г.

В статье решается задача математического моделирования прямоугольного шума в электромагнитных сигналах, в частности на вихретоковых дефектограммах, для генерации качественных синтетических выборок при обучении алгоритмов машинного обучения для обнаружения и подавления прямоугольного шума в данных. Проведено комплексное исследование наивных моделей: детерминированного прямоугольного сигнала, прямоугольного сигнала с белым шумом и телеграфного процесса с белым шумом. Центральным объектом исследования является модель телеграфного процесса с белым шумом. Для этой модели аналитически выведены стационарные характеристики: функция плотности предельного распределения и автокорреляционная функция. Для оценки параметров модели впервые предложен и реализован полностью байесовский подход, использующий сэмплирование по Гиббсу и алгоритм прямой фильтрации и обратного сэмплирования (FFBS) для эффективного маргинализования скрытых марковских состояний. Алгоритм быстро сходится, и к 1500-й итерации сэмплирования общая дисперсия параметров падает до значения $1e-6$. Установлено, что классические модели обладают фундаментальными ограничениями из-за несоответствующего реальности допущения о строгом постоянстве периода и скважности. Показано, что телеграфный процесс решает проблему стохастичности длительностей импульсов, однако игнорирование непрерывности переходных фронтов приводит к математическому артефакту – смещению мод теоретического предельного распределения по сравнению с эмпирическим. Также продемонстрировано, что отсутствие механизма низкочастотной фильтрации лишает автокорреляционную функцию модели характерной осциллирующей компоненты. Экспериментальное подтверждение значимости этих факторов обосновывает направление для дальнейших исследований – разработку модифицированных стохастических моделей, интегрирующих механизмы плавного переключения состояний для адекватного имитационного моделирования прямоугольного шума. В качестве эмпирической базы для тестирования моделей выступали вихретоковые дефектограммы рельсов. Тем не менее, разработанный математический аппарат может успешно использоваться для моделирования прямоугольного шума в других видах электромагнитных сигналах, например в ЭКГ и в магнитотеллурическом зондировании.

Ключевые слова: прямоугольный шум; случайный телеграфный шум; взрывной шум; телеграфный процесс; вихретоковая дефектоскопия

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Быстров, Леонид Юрьевич (автор для корреспонденции)	ORCID iD: 0000-0002-0610-5466 . E-mail: l.bystrov@uniyar.ac.ru Ассистент, кафедра теоретической информатики
Гладков, Артемий Николаевич	ORCID iD: 0009-0007-0211-5660 . E-mail: a.gladkov@uniyar.ac.ru Ассистент, кафедра теоретической информатики
Кузьмин, Егор Владимирович	ORCID iD: 0000-0003-0500-306X . E-mail: kuzmin@uniyar.ac.ru Доктор физ.-мат. наук, заведующий кафедрой теоретической информатики

Финансирование: ЯрГУ (проект VIP-021).

Для цитирования: L. Y. Bystrov, A. N. Gladkov, and E. V. Kuzmin, “Model of square wave noise based on telegraph process”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 33, no. 2, pp. 206–229, 2026. DOI: [10.18255/1818-1015-2026-2-206-229](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2026-2-206-229).

Введение

Прямоугольный шум — это специфический вид импульсных помех в электромагнитных сигналах, характеризующийся высокой амплитудой и стохастическими переключениями базового уровня между двумя дискретными состояниями. Такая динамика придаёт искажённому сигналу характерную прямоугольную форму (рис. 1). Наличие подобного шума критически усложняет автоматический поиск и анализ полезных компонент сигнала. Он размывает сигналы дефектов рельса в вихретоковой дефектоскопии [1] и разрушает наблюдаемую частоту сердечных ритмов в кардиографии [2]. В магнитотеллурическом зондировании (МТ) прямоугольный шум имеет культурное происхождение. Его присутствие делает невозможным применение МТ-методов для геологоразведки вблизи промышленных объектов и населённых пунктов [3].

В связи с этим возникает острая необходимость в разработке надёжных алгоритмов обнаружения и подавления прямоугольного шума. Наиболее перспективным подходом здесь выступают методы глубокого обучения, способные выявлять сложные нелинейные паттерны и формировать качественные маски сегментации. В данном контексте задача фильтрации формулируется как обучение с учителем. Это требует наличия обучающей выборки, состоящей из множества пар $D = \{(\bar{x}_n, \bar{s}_n)\}_{n=1}^N$, где $\bar{s}_n = (s_{n,0}, s_{n,1}, \dots, s_{n,(d-1)})$ — дискретный чистый сигнал, \bar{x}_n — тот же самый сигнал \bar{s}_n , но искажённый прямоугольным шумом \bar{y} . Такого вида выборку можно получить только синтетически путём аддитивного наложения моделируемого шума \bar{y} на чистый сигнал \bar{s} :

$$\bar{x} = \bar{s} + \bar{y}.$$

Помимо порождения датасетов для алгоритмов машинного обучения, математическое моделирование прямоугольного шума имеет самостоятельную научную ценность. Оно позволяет установить точные физические механизмы возникновения данных артефактов и, как следствие, разработать методы контроля или минимизации таких помех на этапе аппаратного сбора данных.

В данной работе рассматриваются классические математические модели прямоугольного шума. Архитектура исследования выстроена по принципу последовательного перехода от простейших детерминированных моделей к более сложным стохастическим. Рассматриваемые модели широко представлены в современной научной литературе и традиционно выступают в качестве базовых при теоретическом описании прямоугольного шума. Цель исследования заключается в комплексном анализе этих классических подходов для объективной оценки их достоинств и фундаментальных ограничений. Анализ включает в себя описание алгоритма порождения прямоугольного шума моделью, байесовскую оценку параметров модели и сравнение стационарных характеристик модели с соответствующими эмпирическими характеристиками наблюдаемого прямоугольного шума.

Центральным объектом исследования выступает телеграфный процесс с белым шумом — наиболее популярная модель случайного телеграфного шума (Random Telegraph Noise, RTN). В рамках

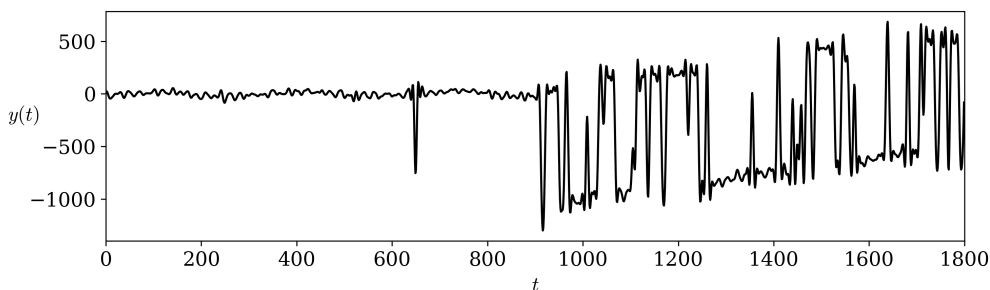


Fig. 1. Example of square wave noise in an eddy current rail defectogram

Рис. 1. Пример прямоугольного шума на вихретоковой дефектограмме рельсов

работы выведены аналитические выражения для функции плотности стационарного распределения и автокорреляционной функции данного процесса. Для задачи параметрической оценки модели впервые предложен и реализован полностью байесовский подход, основанный на сэмплинговании по Гиббсу. Алгоритм быстро сходится, и к 1500 итерации сэмплингования общая дисперсия параметров падает до $1e - 6$. Ранее байесовские методы оценки параметров для данной модели в литературе не рассматривались.

В качестве эмпирической базы для тестирования и верификации математических моделей в настоящей работе используются данные вихретоковых дефектограмм рельсов. Данное исследование продолжает цикл работ авторов, посвящённых автоматическому анализу вихретоковых дефектограмм [1, 4–6], и опирается на накопленный опыт в области изучения структурных особенностей данного класса электромагнитных сигналов. Тем не менее разрабатываемый математический аппарат формулируется в обобщённом виде для произвольных дискретных электромагнитных сигналов, подверженных воздействию прямоугольного шума. Подобное абстрагирование от физической природы конкретного источника данных обеспечивает универсальность предлагаемых решений и возможность их применения в смежных предметных областях.

Несмотря на популярность рассмотренных моделей, показано, что все они обладают рядом критических недостатков. В частности, для моделей прямоугольного сигнала (в том числе с белым шумом) на практике никогда не выполняется предположение о строгом постоянстве периода и скважности импульсов. Как следствие, алгоритмы обнаружения и фильтрации, обученные на таких искусственных данных, оказываются неработоспособными при применении к реальным эмпирическим сигналам.

Переход к телеграфному процессу частично решает эту проблему за счёт введения стохастических длительностей импульсов. Тем не менее, фундаментальное допущение о мгновенном (разрывном) характере переключений лишает модель способности описывать физически непрерывные переходные процессы (фронты) между устойчивыми состояниями. При попытке оценки параметров такой модели на реальных данных возникает математический артефакт – промежуточные отсчёты, принадлежащие непрерывному переходному фронту, принудительно относятся алгоритмом к одному из двух дискретных состояний, что приводит к смещению предсказываемых мод распределения. Также автокорреляционная функция телеграфного процесса с белым шумом лишена осциллирующей компоненты, присутствующей в автокорреляционной функции прямоугольного шума. Спектральный анализ прямоугольного сигнала показывает, что наблюдаемые на практике осцилляции (звон) обусловлены эффектом Гиббса, возникающим вследствие низкочастотной фильтрации сигнала физическими системами. Таким образом, продемонстрировано, что для адекватного имитационного моделирования прямоугольного шума необходимо учитывать непрерывность переходных фронтов и осциллирующее поведение.

1. Основные понятия и обозначения

Вероятность события A будем обозначать как $\mathbb{P}(A)$. Пусть X – непрерывная случайная величина, через $F_X(x)$ обозначим её функцию распределения, а через $f_X(t)$ – её функцию плотности:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt.$$

$\mathbb{E}[X]$ – математическое ожидание величины X , $\text{Var}(X)$ – её дисперсия. Через $\mathbb{I}[\text{Pred}(X)]$ будем обозначать индикаторную случайную величину

$$\mathbb{I}[\text{Pred}(X)] = \begin{cases} 1, & \text{Pred}(X) = \text{true}, \\ 0, & \text{Pred}(X) = \text{false}, \end{cases}$$

где $Pred(X)$ — функция-предикат от случайной величины X .

Величина X распределена по *нормальному закону* распределения $N(m, \sigma^2)$, где $\sigma > 0$, если её функция плотности имеет вид

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-m)^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Гамма-распределение $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$ с параметрами формы $\alpha > 0$ и масштаба $\beta > 0$ для величины X определяется функцией плотности

$$f_X(t) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} \cdot \mathbb{I}[t > 0].$$

Показательное распределение $\text{Exp}(\lambda)$ с параметром интенсивности $\lambda > 0$ для величины X определяется функцией плотности

$$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} \cdot \mathbb{I}[t \geq 0].$$

Одной из особенностей данной работы является использование байесовского метода обучения параметров. В основе байесовского подхода лежит интерпретация вероятности как меры уверенности в истинности гипотезы (параметра), которая пересчитывается по мере поступления новых данных. Пусть $\bar{\theta}$ — вектор оцениваемых параметров вероятностной модели, а $D = \{\bar{x}_n\}_{n=1}^N$ — совокупность наблюдаемых данных (набор независимых одинаково распределённых случайных величин). Связь между ними устанавливается классической формулой Байеса

$$p(\bar{\theta}|D) = \frac{p(D|\bar{\theta})p(\bar{\theta})}{p(D)},$$

где выделяются следующие ключевые компоненты:

- правдоподобие $p(D|\bar{\theta})$ — функция, описывающая вероятность получения наблюдаемых данных D при фиксированном значении параметров $\bar{\theta}$. Далее она будет обозначаться как $\mathcal{L}(\bar{\theta})$. Формально правдоподобие определяется через произведение функций плотности от точек множества D :

$$\mathcal{L}(\bar{\theta}) = \prod_{n=1}^N f(\bar{x}_n|\bar{\theta});$$

- априорная плотность $p(\bar{\theta}) = f(\bar{\theta})$ — функция плотности распределения, отражающего знания или предположения о параметрах до начала эксперимента;
- апостериорная плотность $p(\bar{\theta}|D) = f(\bar{\theta}|D)$ — функция плотности уточнённого распределения параметров после учёта данных D . Именно это распределение является конечным результатом байесовского вывода;
- вероятность данных $p(D) = \int_{-\infty}^{\infty} p(D|\bar{\theta})p(\bar{\theta})d\bar{\theta}$ — нормировочная константа, гарантирующая, что несобственный интеграл по апостериорной плотности равен 1.

Вычислительная сложность байесовского вывода во многом зависит от возможности аналитического вычисления интеграла в знаменателе. Для упрощения расчётов часто используются *сопряжённые априорные распределения* (*conjugate priors*). Априорное распределение называется сопряжённым к данному правдоподобию, если получаемое апостериорное распределение принадлежит к тому же семейству функций, что и априорное. В этом случае обновление знаний сводится к простой корректировке гиперпараметров распределений параметров модели [7].

В отличие от классического метода максимального правдоподобия, результатом которого является точечная оценка $\hat{\theta}_{ML}$, максимизирующая функцию правдоподобия $p(D|\theta)$, байесовский подход обеспечивает полное вероятностное описание параметров в виде апостериорного распределения $p(\theta|D)$. Теоретическая преемственность между данными методами устанавливается теоремой

Бернштейна—фон Мизеса [8]. Согласно этой теореме в асимптотическом пределе при увеличении объема выборки ($N \rightarrow \infty$) влияние априорного распределения пропадает и апостериорное распределение асимптотически стремится к нормальному распределению с математическим ожиданием в точке $\hat{\theta}_{ML}$ и дисперсией, являющейся обратной величиной к информации Фишера $I(\theta)$. Данный факт позволяет рассматривать байесовский вывод как фундаментальное обобщение классических статистических методов, сохраняющее их свойства при больших объемах данных и расширяющее их возможности за счет учёта априорной неопределённости. К тому же, байесовская оценка имеет прямую связь с теоремой Рао—Крамера [9]. Дисперсия оценки апостериорного ожидания асимптотически сходится к границе Рао—Крамера для эффективных оценок. Апостериорная дисперсия выступает в качестве естественной меры эффективности выбранной статистической модели, позволяя количественно интерпретировать эффективность оценки параметров.

2. Обзор предыдущих исследований

В МТ данные часто подвергаются воздействию сильного культурного шума, который может принимать форму прямоугольных или треугольных волн, коротких импульсов и периодических помех [10]. Для анализа и тестирования алгоритмов шумоподавления исследователи часто применяют простейшую модель прямоугольного шума — модель прямоугольного сигнала для построения синтетических выборок [10, 11]. Однако форма реального прямоугольного шума только отдалённо похожа на прямоугольный сигнал, и эта «прямоугольная» форма динамически видоизменяется. Наивность используемых моделей не позволяет описывать сложное поведение траекторий прямоугольного шума в реальных условиях. Соответственно, алгоритмы, обучающиеся и тестирующиеся исключительно на такой идеализированной синтетике, часто оказываются неэффективными на практике.

В ряде других научных отраслей сигнал, по форме напоминающий прямоугольный шум, рассматривается как предмет целенаправленного изучения. Этот феномен известен как телеграфный процесс (Telegraph Process), или взрывной шум (Burst Noise). Подобные скачкообразные процессы исследовались в контексте химических реакций, популяционной динамики и полупроводниковых систем [12, 13]. Например, в биологических системах «взрывной шум» (когда за один переход число особей/молекул изменяется более чем на единицу) может приводить к бистабильности даже в системах, которые детерминированно являются моностабильными [12]. В мезоскопических квантовых системах телеграфный шум (Telegraph Noise) применяется для моделирования флуктуирующего окружения (например, двухуровневой системы, воздействующей на квантовую точку) [14]. Кроме того, телеграфный шум активно исследуется при анализе электронного транспорта в молекулярных соединениях, где стохастические флуктуации параметров моделируются с помощью марковских управляющих уравнений (Markovian Master Equations) [15].

В наноэлектронике данный феномен известен как случайный телеграфный шум (RTN, Random Telegraph Noise). Он возникает из-за стохастического обмена носителями заряда в местах дефекта устройств, что приводит к случайным дискретным колебаниям тока [16]. RTN хорошо изучен и обычно моделируется с помощью марковских цепей. Для анализа таких сигналов во временной области применяются вейвлет-преобразования [17], а также активно используются скрытые марковские модели (НММ) и факториальные скрытые марковские модели (ФНММ) [18]. Используются и гибридные модели, объединяющие байесовские методы к оценке уровня амплитуд с марковской моделью для описания динамики прыжков [16].

Продолжаются исследования классических методов оценки параметров телеграфного процесса по дискретным наблюдениям на основе максимального правдоподобия и метода моментов [19]. При этом современные фреймворки для анализа RTN (например, RTNinja) уже начинают внедрять элементы байесовского вывода [16]. В данной же работе предлагается полностью байесовский метод оценки параметров модели для телеграфного процесса с белым шумом. В отличие от точечных

оценок такой подход позволяет надёжно оценивать дисперсию самой оценки. Ранее полностью байесовские методы, то есть методы построения апостериорного распределения параметров модели, в отношении прямоугольного шума не рассматривались.

3. Прямоугольный сигнал

Наиболее простую модель прямоугольного шума можно получить из прямоугольного сигнала. Именно этот вариант используется в большинстве исследований, где авторы прибегают к синтетическому порождению прямоугольного шума. Она также в сжатом виде была описана в статье [1].

Прямоугольный сигнал определим как непрерывную функцию $y(t)$ с периодом T :

$$y(t) = \begin{cases} m_1, & t \in [kT; (p+k)T), \\ m_2, & t \in [(p+k)T; (k+1)T). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Функция $y(t)$ принимает всего 2 значения (импульса): $m_1 > 0$ и $m_2 \leq 0$. Длительность верхнего импульса в периоде T определяется как pT , где $p \in (0; 1)$, длительность второго импульса, соответственно, равна $(1-p)T$. Вид функции $y(t)$ проиллюстрирован на рис. 2.

В радиотехнике такой сигнал с равными длительностями верхнего и нижнего импульсов, то есть при $p = 0.5$, именуемый *меандром*, находит широкое применение [20]. Аналитически меандр с периодом T можно записать через знак синуса:

$$y(t) = \text{sign} \left(\sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right) \right).$$

Для того чтобы задать произвольное p в прямоугольном сигнале или, говоря на языке радиотехники, изменить *скважность* сигнала $1/p$, синус необходимо сдвинуть по фазе φ и по амплитуде C . Длительность верхнего импульса pT определяется первым нулём функции $\sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi \right) - C$, то есть точкой, где меняется знак синуса. Сдвиг по фазе должен обеспечивать равенство нулю синуса в начале координат $\sin \varphi - C = 0$. Таким образом, для нахождения φ и C необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot pT + \varphi \right) - C = 0, \\ \sin \varphi - C = 0. \end{cases}$$

Выразим C из обоих уравнений и решим уравнение относительно фазы φ :

$$\sin(\varphi) = \sin(2\pi p + \varphi).$$

Перенесём всё в одну часть и воспользуемся формулой разности синусов:

$$\sin(2\pi p + \varphi) - \sin(\varphi) = 2 \sin \left(\frac{2\pi p + \varphi - \varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{2\pi p + \varphi + \varphi}{2} \right) = 2 \sin(\pi p) \cos(\pi p + \varphi) = 0.$$

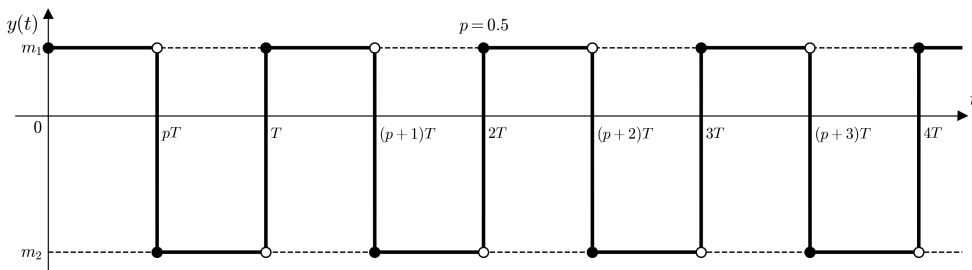


Fig. 2. A square wave signal with equals pulse durations (meander)

Рис. 2. Прямоугольный сигнал с равной длительностью импульсов (меандр)

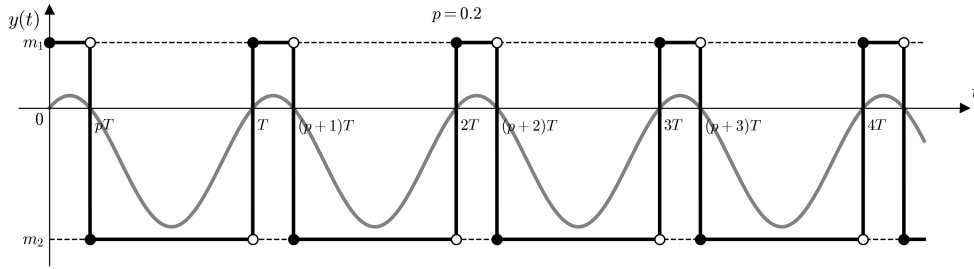


Fig. 3. A square wave signal with $p = 0.2$ and $T = 1$ and the corresponding sine

Рис. 3. Прямоугольный сигнал с $p = 0.2$ и $T = 1$ и соответствующий ему синус

Произведение двух множителей равно нулю тогда, когда хотя бы один из них обращается в ноль. Выражение $\sin(\pi p)$ равно нулю для всех $p \in \mathbb{Z}$. Мы полагаем $p \in (0; 1)$, поэтому ноль возможен только для второго множителя $\cos(\pi p + \varphi)$. Отсюда следует

$$\pi p + \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Выбор параметра k определяет знак функции на первом интервале $(0; pT)$, то есть то, с какого импульса начинается сигнал. Поскольку по определению (1) на интервале $t \in (0; pT)$ сигнал принимает значение $m_1 > 0$, функция $f(t)$ на этом интервале должна быть положительной. Этому условию удовлетворяют чётные значения k . Полагая для простоты $k = 0$, окончательно получаем:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \pi p,$$

$$C = \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot pT + \frac{\pi}{2} - \pi p\right).$$

Итак, прямоугольный сигнал с произвольными периодом T , длительностью верхнего импульса pT и значениями импульсов m_1 и m_2 можно считать знаком от следующей функции, где вместо $+1$ и -1 возвращается m_1 и m_2 соответственно:

$$f(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2} - \pi p\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{T}pT + \frac{\pi}{2} - \pi p\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \pi p\right) - \cos(\pi p).$$

На рис. 3 представлена функция $f(t)$, знаком которой является прямоугольный сигнал с $T = 1$ и $p = 0.2$.

На практике при моделировании прямоугольного сигнала удобнее работать с функцией

$$y(t) = \text{sign}((t \bmod T) - pT), \quad (2)$$

где под \bmod обозначена операция взятия дробной части числа.

В силу периодичности оператора остатка, ограничим рассмотрение интервалом $t \in [0; T)$, где $t \bmod T = t$. Из выражения (2) видно, что аргумент функции sign положителен при $t \in [0; pT)$ и отрицателен при $t \in [pT; T)$, что полностью совпадает с интервалами знака аналитической функции $f(t)$. Таким образом, для того чтобы смоделировать прямоугольный сигнал на отрезке $[a; b]$, достаточно задать частоту дискретизации dt и с помощью формулы (2) построить последовательность амплитуд сигнала.

Одной из особенностей прямоугольного сигнала является его спектральное разложение. Разложим функцию

$$y(t) = \text{sign}f(t) = \begin{cases} m_1, & f(t) > 0, \\ m_2, & f(t) \leq 0; \end{cases}$$

в ряд Фурье

$$y(t) = c_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n e^{in \frac{2\pi}{T} t}.$$

Найдём постоянный член ряда

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^{pT} m_1 dt + \int_{pT}^T m_2 dt \right) = \frac{1}{T} (m_1 p T + m_2 (T - p T)) = m_1 p + m_2 (1 - p). \quad (3)$$

Частоту прямоугольного сигнала $2\pi/T$ удобно обозначить параметром ω_0 . Вычислим коэффициенты в ряде Фурье при ненулевых гармониках

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T y(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^{pT} m_1 e^{-in\omega_0 t} dt + \int_{pT}^T m_2 e^{-in\omega_0 t} dt \right) = \frac{1}{-in\omega_0 T} (m_1 e^{-in\omega_0 t} \Big|_0^{pT} + \\ &+ m_2 e^{-in\omega_0 t} \Big|_{pT}^T) = \frac{1}{-2\pi i n} (m_1 (e^{-2\pi i n p} - 1) + m_2 (1 - e^{-2\pi i n p})) = \frac{m_1 - m_2}{2\pi i n} (1 - e^{-2\pi i n p}). \end{aligned} \quad (4)$$

Используя формулу Эйлера, полученное выражение можно упростить

$$\begin{aligned} 1 - e^{-2\pi i n p} &= e^{-\pi i n p} (e^{\pi i n p} - e^{-\pi i n p}) = e^{-\pi i n p} (\cos \pi n p + i \sin \pi n p - \cos(-\pi n p) - i \sin(-\pi n p)) = \\ &= 2ie^{-\pi i n p} \sin \pi n p. \end{aligned}$$

Подставим данный результат в (4):

$$c_n = \frac{m_1 - m_2}{2\pi i n} \cdot 2ie^{-\pi i n p} \sin \pi n p = p(m_1 - m_2)e^{-\pi i n p} \text{sinc}(\pi n p). \quad (5)$$

Таким образом, подставляя вместо c_0 и c_n формулы (3) и (5), получим разложение в ряд Фурье прямоугольного сигнала

$$y(t) = m_1 p + m_2 (1 - p) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} p(m_1 - m_2) \text{sinc}(\pi n p) e^{in(\omega_0 t - \pi p)}.$$

Дополнительно ряд можно упростить, объединив отрицательные и положительные гармоники:

$$\begin{aligned} y(t) &= m_1 p + m_2 (1 - p) + \sum_{n=1}^{\infty} p(m_1 - m_2) \text{sinc}(\pi n p) \left(e^{-in(\omega_0 t - \pi p)} + e^{in(\omega_0 t - \pi p)} \right) = m_1 p + m_2 (1 - p) + \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} p(m_1 - m_2) \text{sinc}(\pi n p) \cos(n(\omega_0 t - \pi p)). \end{aligned} \quad (6)$$

Амплитуды гармоник имеют огибающую функцию $\text{sinc}(\pi n p)$, где n — номер гармоники. Размах амплитуды зависит от параметра p и разности импульсов $m_1 - m_2$. Параметр p также порождает фазовый сдвиг на $-\pi n p$ для каждой n -ой гармоники. Амплитудный и фазовый спектр прямоугольного сигнала с $T = 1$ и $p = 0.2$ представлены на рис. 4.

Из формулы (6) видно, что для меандра (при $p = 0.5$) спектр будет состоять из гармоник $n\omega_0$ только с нечётными номерами n и иметь постоянный фазовый сдвиг $-\pi/2$. Специфический вид спектра прямоугольного сигнала является его отличительной особенностью и может пригодиться при построении более сложных моделей прямоугольного шума.

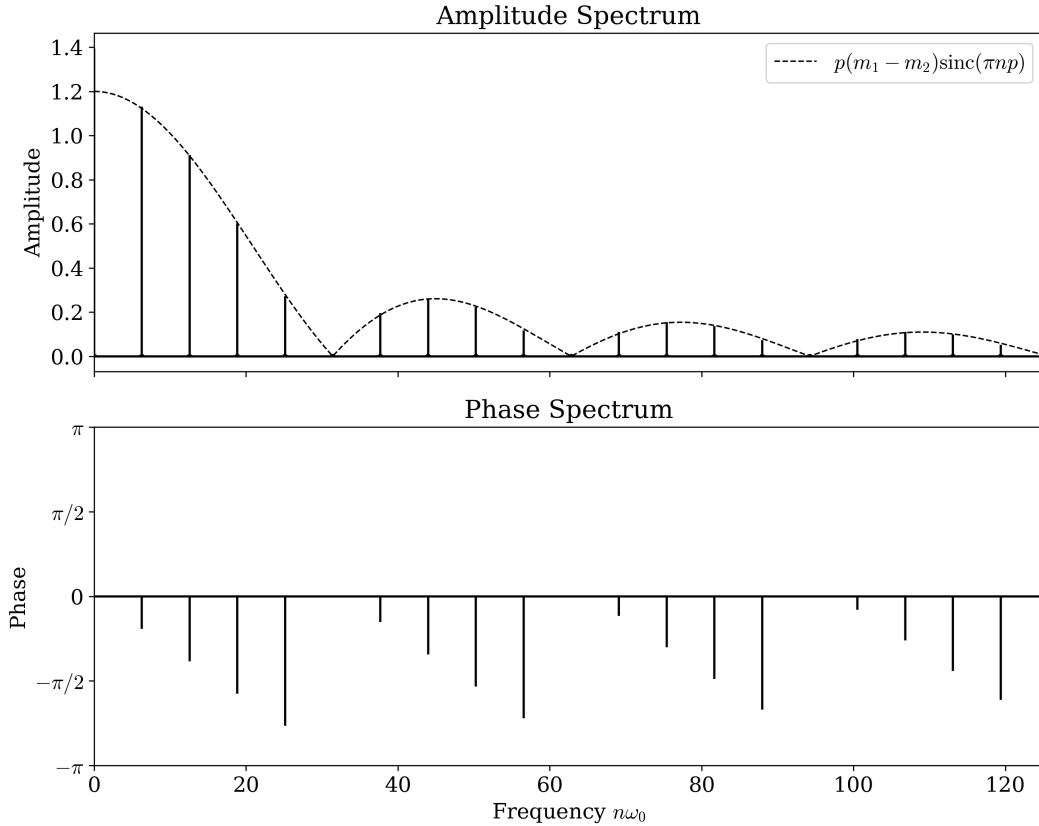


Fig. 4. The amplitude and phase Furie spectrums of square wave signal with $p = 0.2$ and $T = 1$

Рис. 4. Амплитудный и фазовый спектр Фурье прямоугольного сигнала с $p = 0.2$ и $T = 1$

При восстановлении прямоугольного сигнала с помощью частично усечённого ряда Фурье в окрестностях точек разрыва наблюдаются осцилляции (*звон*). Это связано с тем, что ряд Фурье в точках разрыва сходится к среднему арифметическому лево- и правосторонних пределов функции $y(t)$ лишь поточечно, а не равномерно (теорема Дирихле). Причём даже при увеличении гармоник, участвующих в восстановлении, ошибка в точках разрыва сохраняется. Это явление известно как **эффект Гиббса**. Величина *перерегулирования* (*overshoot*), то есть амплитуда первого скачка осцилляции в окрестности точки разрыва, составляет $|m_2 - m_1| \cdot 0.0894899$ (порядка 9% величины истинного перепада) [21]. Если старшая учитываемая гармоника имела частоту ω_c , то аналитически звон в окрестности изолированного скачка от уровня m_1 к m_2 (при $t = 0$) описывается функцией интегрального синуса

$$y(t) \approx \frac{m_1 + m_2}{2} + \frac{m_2 - m_1}{\pi} \text{Si}(\omega_c t) = \frac{m_1 + m_2}{2} + \frac{m_2 - m_1}{\pi} \int_0^{\omega_c t} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (7)$$

На рис. 5 представлен восстановленный с помощью обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ) прямоугольный сигнал по 50-й гармонике с $p = 0.2$ и $T = 1$. Схожие со звоном осцилляции можно наблюдать в прямоугольном шуме на вихретоковых дефектограммах рельсов (рис. 6). Это может указывать на то, что прямоугольный шум проходит через низкочастотный фильтр, порождающий эффект Гиббса. Из-за этого скачки в прямоугольном сигнале перестают быть мгновенными. Непрерывность и гладкость переходных фронтов становится существенным атрибутом прямоугольного шума.

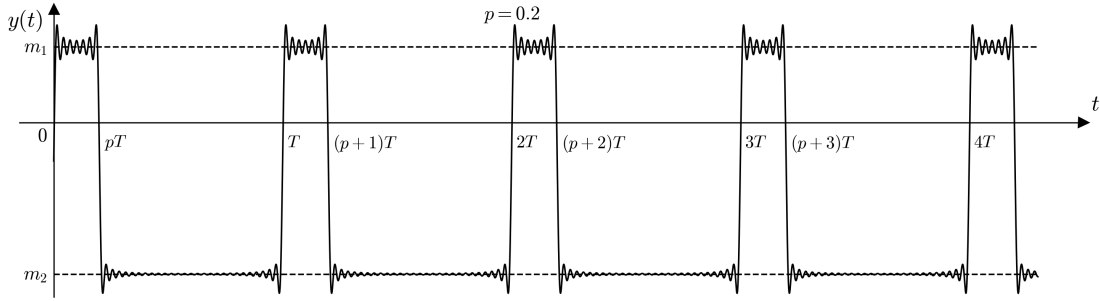


Fig. 5. A square wave signal reconstructed using IDFT at the 50th harmonic with $p = 0.2$ and $T = 1$

Рис. 5. Восстановленный с помощью ОДПФ прямоугольный сигнал по 50-ой гармонике с $p = 0.2$ и $T = 1$

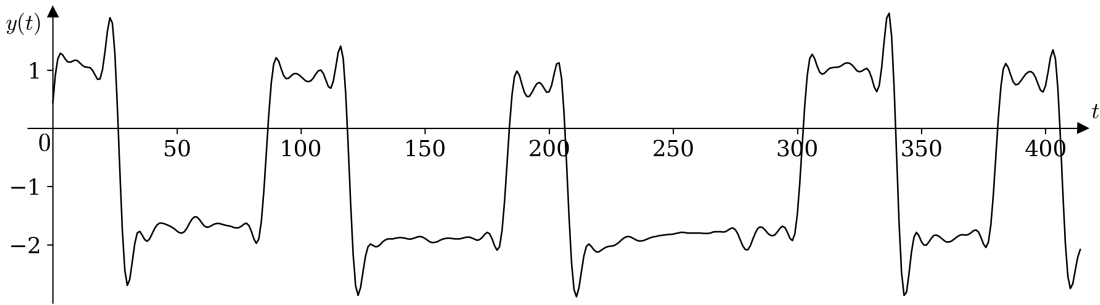


Fig. 6. Observed oscillations in square wave noise in eddy current rail defectograms

Рис. 6. Наблюдаемые осцилляции в прямоугольном шуме на вихретоковых дефектограммах рельсов

4. Прямоугольный сигнал с белым шумом

В реальности форма прямоугольного шума только напоминает прямоугольный сигнал. Искажим прямоугольную форму с помощью прибавления к сигналу независимого белого (нормального) шума с дисперсией σ^2 . Теперь вместо функции $y(t)$ мы будем говорить о последовательности случайных величин Y_t или, иначе, *случайном процессе*. Визуально он представлен на рис. 7.

$$Y_t = y(t) + \varepsilon_t, \text{ где } \varepsilon_t \sim N(0; \sigma^2).$$

Величина Y_t будет нормально распределена с прямоугольным сигналом в ожидании и дисперсией σ^2 . С помощью формулы (1) процесс Y_t можно описать выражением

$$Y_t \sim \begin{cases} N(m_1, \sigma^2), & t \in [kT; (p+k)T), \\ N(m_2, \sigma^2), & t \in [(p+k)T; (k+1)T). \end{cases}$$

Данная модель описывается параметрами m_1, m_2, σ, p, T , где p, T определяют детерминированную структуру сигнала. Будем считать, что p и T известны. Параметры m_1, m_2 и σ оценим по-байесовски. Для этого от дисперсии шума σ^2 перейдем к *точности* $\tau = 1/\sigma^2$. В этом случае функция плотности нормального распределения будет иметь вид

$$f(x) = N(x|m, \tau) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}} e^{-\frac{\tau}{2}(x-m)^2}.$$

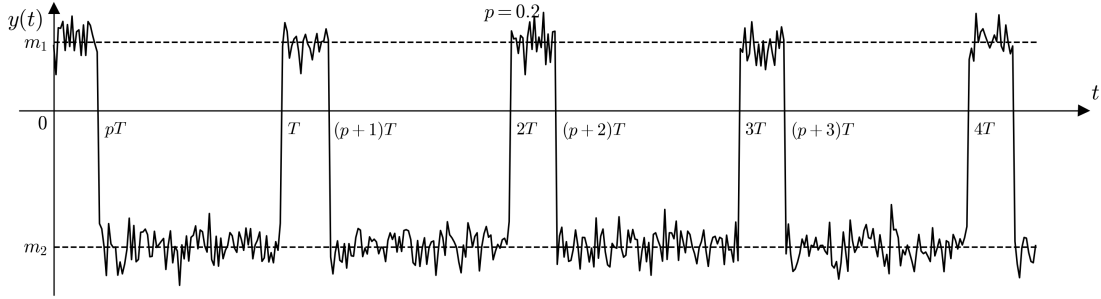


Fig. 7. A square wave signal with $p = 0.2$ and $T = 1$ and white noise

Рис. 7. Прямоугольный сигнал с параметрами $p = 0.2$ и $T = 1$ и белым шумом

Введём вспомогательную переменную $z(t)$ — индикатор состояния, в котором находится величина Y_t (верхний или нижний импульс). Значения $z(t)$ для любых t будем полагать известными.

$$z(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } Y_t \sim N(m_1, \tau), \\ 0, & \text{если } Y_t \sim N(m_2, \tau). \end{cases} \quad (8)$$

Предположим, что наблюдаемые амплитуды дискретного сигнала $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_d)$ получены дискретизацией процесса Y_t с шагом dt на отрезке $t \in [a; b]$. Для каждого отсчёта известно также состояние $\bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_d)$. Байесовская оценка параметров заключается в вычислении апостериорной плотности по теореме Байеса:

$$f(m_1, m_2, \tau | \bar{y}, \bar{z}) = \frac{\mathcal{L}(m_1, m_2, \tau, \bar{y}, \bar{z}) f(m_1, m_2, \tau)}{\iiint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(m_1, m_2, \tau, \bar{y}, \bar{z}) f(m_1, m_2, \tau) dm_1 dm_2 d\tau}. \quad (9)$$

Прямое вычисление нормировочной константы в знаменателе требует многомерного численного интегрирования, что является крайне ресурсоёмкой задачей. Чтобы избежать прямого вычисления этого интеграла и получить замкнутое аналитическое выражение для апостериорной плотности, необходимо выбрать априорное распределение $f(m_1, m_2, \tau)$ так, чтобы оно было сопряжённым к функции правдоподобия \mathcal{L} . В этом случае апостериорное распределение будет принадлежать к тому же параметрическому семейству, что и априорное, а байесовский вывод сведётся к простому алгебраическому пересчёту гиперпараметров априорного распределения.

Функция правдоподобия данных имеет вид

$$\mathcal{L}(m_1, m_2, \tau, \bar{y}, \bar{z}) = \prod_{i=1}^d N(y_i | m_1, \tau)^{z_i} \cdot N(y_i | m_2, \tau)^{(1-z_i)}.$$

Перейдём к логарифму правдоподобия:

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{L}(m_1, m_2, \tau, \bar{y}, \bar{z}) &= \sum_{i=1}^d z_i \left(\frac{1}{2} (\ln \tau - \ln 2\pi) - \frac{\tau}{2} (y_i - m_1)^2 \right) + (1 - z_i) \left(\frac{1}{2} (\ln \tau - \ln 2\pi) - \frac{\tau}{2} (y_i - m_2)^2 \right) = \\ &= \sum_{i=1}^d \frac{1}{2} (\ln \tau - \ln 2\pi) - \frac{\tau}{2} (z_i (y_i - m_1)^2 + (1 - z_i) (y_i - m_2)^2) = \frac{d}{2} (\ln \tau - \ln 2\pi) - \\ &\quad - \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^d (z_i (y_i - m_1)^2 + (1 - z_i) (y_i - m_2)^2). \end{aligned}$$

Дальнейшие вычисления целесообразно проводить в матричной форме. Введём вектор $\bar{m} = (m_1, m_2)^\top$. Также обозначим через k число компонент вектора \bar{y} , соответствующих состоянию верхнего импульса, то есть сумму всех единиц в векторе \bar{z} . Тогда $d - k$ — это число компонент вектора \bar{y} , соответствующих состоянию нижнего импульса, или сумма нулей в векторе \bar{z} . Также введём вектор $\bar{v} = (v_1, v_2)^\top$ с координатами $v_1 = \sum_{i=1}^d z_i y_i$ и $v_2 = \sum_{i=1}^d (1 - z_i) y_i$. Тогда логарифм правдоподобия можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{L}(m_1, m_2, \tau, \bar{y}, \bar{z}) &= \frac{d}{2} (\ln \tau - \ln 2\pi) - \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^d (z_i (y_i - m_1)^2 + (1 - z_i) (y_i - m_2)^2) = \frac{d}{2} (\ln \tau - \ln 2\pi) - \\ &- \frac{\tau}{2} \left(\bar{m}^\top \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & d - k \end{pmatrix} \bar{m} - 2\bar{m}^\top \bar{v} + \bar{y}^\top \bar{y} \right) = \frac{d}{2} (\ln \tau - \ln 2\pi) - \frac{\tau}{2} (\bar{m}^\top \mathcal{K} \bar{m} - 2\bar{m}^\top \bar{v} + \bar{y}^\top \bar{y}). \end{aligned} \quad (10)$$

В качестве априорного распределения на параметры выберем распределение, сопряжённое правдоподобию. Для доказательства сопряжённости достаточно показать, что структурный вид функций $f(m_1, m_2, \tau)$ и $f(m_1, m_2, \tau | \bar{y}, \bar{z})$ сохраняется с точностью до константы. Так как m_1, m_2 и τ представляют собой параметры нормальных распределений, в соответствии с классическими результатами байесовского вывода для гауссиана [7] разумно выбрать в качестве априорного распределения гамма-нормальное:

$$f(m_1, m_2, \tau) = f(\bar{m} | \tau) \cdot f(\tau) = N(\bar{m} | \bar{\mu}, (\tau \mathcal{P})^{-1}) \cdot \text{Gamma}(\tau | \alpha, \beta). \quad (11)$$

Матрица \mathcal{P} — это матрица точности, поэтому матрица ковариации распределения \bar{m} получается обращением матрицы $\tau \mathcal{P}$. Найдём логарифм плотности (11):

$$\begin{aligned} \ln f(m_1, m_2, \tau) &= -\ln 2\pi + \ln \tau + \frac{\ln \det \mathcal{P}}{2} - \frac{\tau}{2} (\bar{m} - \bar{\mu})^\top \mathcal{P} (\bar{m} - \bar{\mu}) + \alpha \ln \beta - \ln \Gamma(\alpha) + (\alpha - 1) \ln \tau - \beta \tau = \text{Const} - \\ &- \frac{\tau}{2} (\bar{m}^\top \mathcal{P} \bar{m} - 2\bar{m}^\top \mathcal{P} \bar{\mu} + \bar{\mu}^\top \mathcal{P} \bar{\mu}) + \alpha \ln \tau - \beta \tau. \end{aligned} \quad (12)$$

Для доказательства сопряжённости выбранного априорного распределения правдоподобию рассмотрим логарифм апостериорной плотности, который в соответствии с формулой (9) представляет собой сумму логарифмов (10) и (12) с точностью до константы. В слагаемое Const положим все члены, не зависящие от параметров m_1, m_2, τ . Получим:

$$\begin{aligned} \ln f(m_1, m_2, \tau | \bar{y}, \bar{z}) &= \text{Const} + \ln \mathcal{L}(m_1, m_2, \tau) + \ln f(m_1, m_2, \tau) = \text{Const} + \frac{d}{2} \ln \tau - \frac{\tau}{2} (\bar{m}^\top \mathcal{K} \bar{m} - 2\bar{m}^\top \bar{v} + \bar{y}^\top \bar{y}) - \\ &- \frac{\tau}{2} (\bar{m}^\top \mathcal{P} \bar{m} - 2\bar{m}^\top \mathcal{P} \bar{\mu} + \bar{\mu}^\top \mathcal{P} \bar{\mu}) + \alpha \ln \tau - \beta \tau = \text{Const} + \left(\alpha + \frac{d}{2} \right) \ln \tau - \frac{\tau}{2} (\bar{m}^\top (\mathcal{K} + \mathcal{P}) \bar{m} - 2\bar{m}^\top (\bar{v} + \mathcal{P} \bar{\mu}) + 2\beta + \\ &+ \bar{y}^\top \bar{y} + \bar{\mu}^\top \mathcal{P} \bar{\mu}). \end{aligned} \quad (13)$$

Введём новые параметры:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + \frac{d}{2}, \\ \mathcal{P}' &= \mathcal{P} + \mathcal{K}, \\ \bar{\mu}' &= (\mathcal{P}')^{-1} (\mathcal{P} \bar{\mu} + \bar{v}), \\ \beta' &= \beta + \frac{1}{2} (\bar{y}^\top \bar{y} + \bar{\mu}^\top \mathcal{P} \bar{\mu} - \bar{\mu}'^\top \mathcal{P}' \bar{\mu}'). \end{aligned} \quad (14)$$

Полученные формулы можно использовать для обновления оценок параметров. Если переписать (13) в новых обозначениях, то можно убедиться в принадлежности апостериорного и априорного распределения к одному параметрическому семейству распределений, сравнив полученное выражение с (12):

$$\ln \mathcal{L}(m_1, m_2, \tau) + \ln f(m_1, m_2, \tau) = \text{Const} + \alpha' \ln \tau - \frac{\tau}{2} (\bar{m}^\top \mathcal{P}' \bar{m} - 2\bar{m}^\top \mathcal{P}' \bar{\mu}' + \bar{\mu}'^\top \mathcal{P}' \bar{\mu}') - \beta' \tau.$$

Таким образом, для нахождения параметров процесса Y_t по-байесовски достаточно располагать статистиками по суммарной продолжительности верхнего и нижнего импульса k и $d - k$, первыми моментами по каждому импульсу \bar{v} и вторыми моментами по всем дискретам сигнала $\bar{y}^\top \bar{y}$. Точечную оценку параметров m_1, m_2, τ можно получить из пересчитанной апостериорной плотности $f(m_1, m_2, \tau | \bar{y}, \bar{z})$, взяв точку максимума этой функции (Maximum A Posteriori, MAP) [7].

5. Телеграфный процесс с белым шумом

На практике предположение о постоянстве периода T и соотношении длительностей импульсов p не соблюдается. В связи с этим целесообразно рассматривать продолжительности верхнего и нижнего импульсов как случайные величины. Классическим математическим аппаратом для решения этой задачи выступает телеграфный процесс [15, 22]. Рассматриваемая в данном разделе конструкция является наиболее популярной моделью RTN. В отличие от ранее рассмотренных наивных моделей телеграфный процесс заслуживает детального исследования.

Введём однородный марковский процесс Z_t с непрерывным временем и двумерным пространством состояний $S = \{1, 2\}$. Процесс Z_t является обобщением ранее рассмотренной индикаторной функции $z(t)$ (8):

$$Z_t = \begin{cases} 1, & \text{если } Y_t \sim N(m_1, \tau), \\ 2, & \text{если } Y_t \sim N(m_2, \tau). \end{cases}$$

Динамика переходов между состояниями процесса Z_t определяется матрицей интенсивностей Q :

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1 > 0$ — интенсивность перехода из состояния 1 в состояние 2, а $\lambda_2 > 0$ — интенсивность обратного перехода из состояния 2 в состояние 1.

Параметры λ_1, λ_2 определяют продолжительности верхнего и нижнего импульсов и приходят на смену жёстко зафиксированным pT и $(1 - p)T$. Из теории марковских цепей с непрерывным временем известно [9], что длительности верхнего P_1 и нижнего P_2 импульсов будут независимыми случайными величинами с показательным законом распределения: $P_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$, $P_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$. Период T также становится случайной величиной и представляет собой сумму независимых показательно распределённых случайных величин: $T = P_1 + P_2$. В данной модели прямоугольный шум будет описываться процессом, который мы теперь будем обозначать как Y_t :

$$Y_t = m_{Z_t} + \varepsilon_t, \text{ где } \varepsilon_t \sim N(0; \sigma^2) \text{ не зависит от времени } t. \quad (15)$$

Траектория процесса Y_t представлена на рис. 8. Для её построения необходимо моделировать марковский процесс Z_t . С вероятностью $\mathbb{P}(Z_0 = 1) = \frac{1}{2}$ определим начальное состояние цепи, а затем для каждой новой точки с вероятностями $p_{12}(dt), p_{21}(dt)$, определяемыми матрицей Q (точные формулы будут выведены далее), будем менять состояние цепи. По сформированным состояниям согласно формуле (15) симулируем траекторию процесса Y_t .

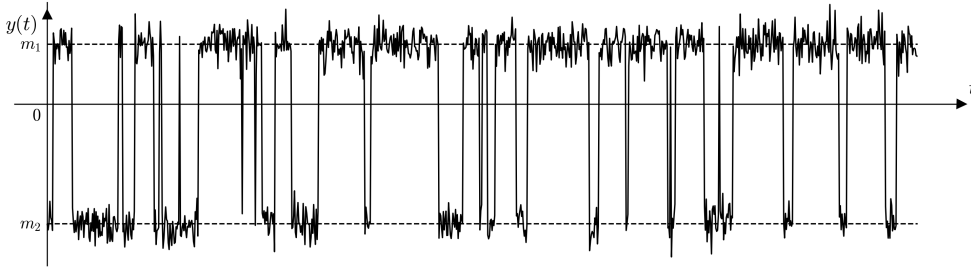


Fig. 8. Telegraph process with white noise.
Parameter values: $\lambda_1 = 0.04$, $\lambda_2 = 0.067$

Рис. 8. Телеграфный процесс с белым шумом.
Значения параметров: $\lambda_1 = 0.04$, $\lambda_2 = 0.067$

Адекватность использования данной модели для порождения прямоугольного шума можно оценить, основываясь на стационарных характеристиках наблюдаемого шума. Допущение о стационарности наблюдаемого шумового процесса играет здесь ключевую роль. Оно подразумевает инвариантность вероятностных свойств процесса относительно сдвига во времени. Сравнение гистограммы амплитуд наблюдаемого шума с функцией плотности предельного распределения модели позволяет оценить, насколько корректно модель воспроизводит амплитудную структуру шума. В свою очередь, автокорреляционная функция выступает критерием адекватности временной динамики, отражая структурную «память» процесса, интенсивность переключений и наличие осцилляций.

5.1. Функция плотности распределения

При фиксированном значении Z_t величина Y_t имеет нормальное распределение:

$$(Y_t | Z_t = i) \sim N(m_i, \tau).$$

По формуле полной вероятности функция плотности распределения величины Y_t находится как

$$f_{Y_t}(y) = f_{Y_t|Z_t}(y|Z_t = 1)\mathbb{P}(Z_t = 1) + f_{Y_t|Z_t}(y|Z_t = 2)\mathbb{P}(Z_t = 2).$$

Таким образом, для нахождения функции плотности распределения f_{Y_t} необходимо знать вероятности состояний процесса Z_t . Обозначим $p_1(t) = \mathbb{P}(Z_t = 1)$, $p_2(t) = \mathbb{P}(Z_t = 2)$. Эволюция $\bar{p}(t) = (p_1(t), p_2(t))$ описывается системой дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = Q\bar{p}.$$

Данная система линейна, поэтому её решением будет матричная экспонента. При заданных начальных условиях $\bar{p}(0)$ система имеет решение

$$\bar{p}(t) = e^{Qt}\bar{p}(0). \quad (16)$$

Формула (16) может быть преобразована в [23]

$$\bar{p}(t) = \bar{p}(0) + Q \frac{1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}}{\lambda_1 + \lambda_2} \bar{p}(0). \quad (17)$$

Начальные вероятности определяют, в каком состоянии находилась марковская цепь в начальный момент времени $t = 0$. Если считать, что начальное состояние жёстко зафиксировано $Z_0 = 1$ или $Z_0 = 2$, тогда формулу (17) можно будет упростить. Введём обозначения:

$$\pi_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \pi_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (18)$$

Для $Z_0 = 1$ имеем:

$$\begin{aligned}\bar{p}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}}{\lambda_1 + \lambda_2} \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}}{\lambda_1 + \lambda_2} \begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \pi_2 (1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \pi_2 \\ \pi_2 \end{pmatrix} - \pi_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} + \pi_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (19)\end{aligned}$$

Аналогично при $Z_0 = 2$ динамика вероятностей \bar{p} описывается формулой:

$$\begin{aligned}\bar{p}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}}{\lambda_1 + \lambda_2} \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}}{\lambda_1 + \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \pi_1 (1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \pi_1 \\ 1 - \pi_1 \end{pmatrix} - \pi_1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} + \pi_1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (20)\end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть Z_t — однородный марковский процесс с непрерывным временем, пространством состояний $S = \{1, 2\}$ и матрицей интенсивностей

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

Наблюдаемый процесс Y_t определён следующим образом:

$$Y_t = m_{Z_t} + \varepsilon_t, \quad \text{где } \varepsilon_t \sim N(0; \sigma^2).$$

Тогда предельным распределением Y_t (при $t \rightarrow \infty$) будет смесь двух гауссиан с функцией плотности распределения

$$f(y) = \frac{\pi_1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-m_1)^2} + \frac{\pi_2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-m_2)^2}, \quad \text{где } \pi_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad \text{и} \quad \pi_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (21)$$

Доказательство. При фиксированном значении Z_t величина Y_t имеет нормальное распределение. По формуле полной вероятности функция плотности распределения Y_t описывается как

$$f_{Y_t}(y) = f_{Y_t|Z_t}(y|Z_t = 1)\mathbb{P}(Z_t = 1) + f_{Y_t|Z_t}(y|Z_t = 2)\mathbb{P}(Z_t = 2) = N(y|m_1, \sigma^2)p_1(t) + N(y|m_2, \sigma^2)p_2(t).$$

Вероятности π_1, π_2 задают стационарное распределение Z_t , так как удовлетворяют условиям

$$Q \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = 0, \quad \pi_1 + \pi_2 = 1.$$

При $t \rightarrow \infty$ вероятности $(p_1(t), p_2(t))$ сходятся к стационарному распределению (π_1, π_2) независимо от начальных условиях $p_1(0), p_2(0)$. Следовательно, при $t \rightarrow \infty$

$$f_{Y_t}(y) \rightarrow \pi_1 N(y|m_1, \sigma^2) + \pi_2 N(y|m_2, \sigma^2).$$

□

В рассматриваемой модели прямоугольного шума, в соответствии с теоремой 1, процесс Y_t обладает предельным распределением. Скорость сходимости к предельному распределению, исходя из решения уравнений Колмогорова (17), определяется экспонентой $e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$. Таким образом,

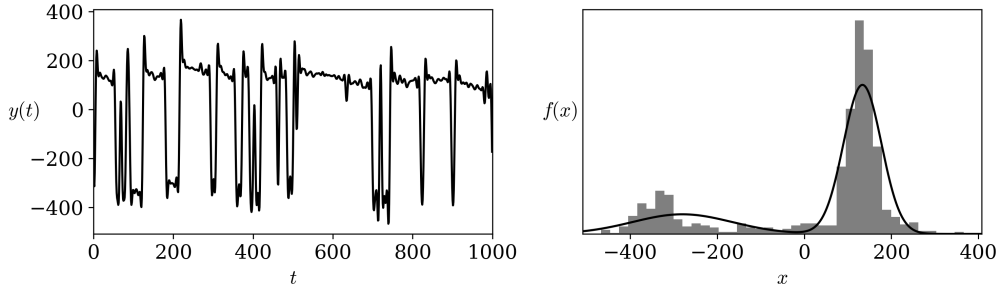


Fig. 9. A square wave noise in eddy current rail defectograms and histogram of its amplitudes with approximation of the probability density function by a mixture of two gaussians

Рис. 9. Прямоугольный шум на вихретоковых дефектограммах рельсов и гистограмма его амплитуд с аппроксимацией функции плотности распределения смесью двух гауссиан

экспоненциально быстро теряется зависимость процесса Y_t от времени и он вырождается в последовательность слабозависимых величин, имеющих распределение смеси двух гауссиан. Схожее поведение наблюдается и у прямоугольного шума (рис. 9). Гистограмма амплитуд прямоугольного шума имеет две выраженные моды, но при этом обладает «перешейком» между гауссианами, который вносит существенный вклад в ошибку аппроксимации распределения смесью двух гауссиан. Из-за этого «перешейка» настоящие центры гауссиан оказываются смещёнными по сравнению с теоретическими. Этот существенный недостаток текущей модели указывает на значимость переходного процесса между прямоугольными импульсами. Также данный факт демонстрирует, что пренебрежение переходным процессом в большинстве моделей RTN недопустимо.

5.2. Автоковариационная и автокорреляционная функции

Ковариационная функция $R(t, t+h)$ стационарного процесса зависит только от разности аргументов, то есть $R(t, t+h) = R(h)$ [24]. Найдём автокорреляционную функцию $\rho(h)$ и автоковариационную функцию $R(h)$ процесса Y_t . По определению они связаны соотношением

$$\rho(h) = \frac{R(h)}{R(0)}.$$

Из независимости шума ε_t ковариацию суммы $m_{Z_t} + \varepsilon_t$ можно разложить в сумму ковариаций. При $h > 0$ ковариация $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h})$ будет равна 0, тогда ковариация $\text{Cov}(Y_t, Y_{t+h})$ вычисляется как

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) &= \text{Cov}(m_{Z_t} + \varepsilon_t, m_{Z_{t+h}} + \varepsilon_{t+h}) = \text{Cov}(m_{Z_t}, m_{Z_{t+h}}) + \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = \\ &= \mathbb{E}[m_{Z_t} \cdot m_{Z_{t+h}}] - \mathbb{E}[m_{Z_t}] \cdot \mathbb{E}[m_{Z_{t+h}}] + 0 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 m_i m_j p_{ij}(h) p_i - (m_1 p_1 + m_2 p_2)^2, \end{aligned}$$

где p_{ij} — вероятность перехода из состояния i марковской цепи в состояние j , p_i — вероятность состояния i .

Вероятности, необходимые для вычисления ковариации, уже были найдены ранее в (18), (19) и (20). Стационарные вероятности π_1 и π_2 определяют вероятности $\mathbb{P}(Z_t = 1) = p_1$ и $\mathbb{P}(Z_t = 2) = p_2$ соответственно, а решение уравнений Колмогорова $\bar{p}(t)$ позволяет найти переходные вероятности $p_{ij}(t)$ для любых $i, j \in \{1, 2\}$. В результате получим:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) &= m_1^2 \pi_1 (\pi_1 + \pi_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)h}) + m_1 m_2 \pi_1 (\pi_2 - \pi_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)h}) + m_2 m_1 \pi_2 (\pi_1 - \pi_1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)h}) + \\ &+ m_2^2 \pi_2 (\pi_2 + \pi_1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)h}) - (m_1 \pi_1 + m_2 \pi_2)^2 = m_1^2 \pi_1^2 + 2m_1 m_2 \pi_1 \pi_2 + m_2^2 \pi_2^2 + (m_1^2 \pi_1 \pi_2 - 2m_1 m_2 \pi_1 \pi_2 + \\ &+ m_2^2 \pi_1 \pi_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)h} - (m_1 \pi_1 + m_2 \pi_2)^2 = (m_1 \pi_1 + m_2 \pi_2)^2 + (m_1 - m_2)^2 \pi_1 \pi_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)h} - \\ &- (m_1 \pi_1 + m_2 \pi_2)^2 = (m_1 - m_2)^2 \pi_1 \pi_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)h}. \end{aligned}$$

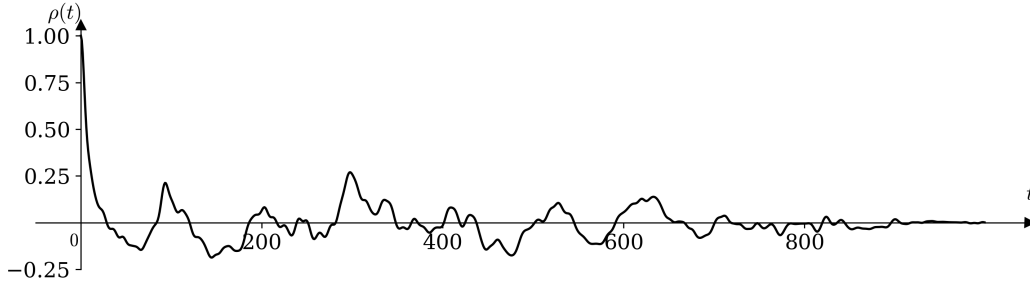


Fig. 10. An autocorrelation function of square wave noise in eddy current rail defectograms

Рис. 10. Автокорреляционная функция прямоугольного шума на вихретоковых дефектограммах рельсов

При $h = 0$ ковариация $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h})$ становится ненулевой. В этом случае ковариация процесса Y_t равна

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_t, Y_t) &= \text{Cov}(m_{Z_t}, m_{Z_t}) + \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_t) = \mathbb{E}[m_{Z_t}^2] - (\mathbb{E}[m_{Z_t}])^2 + \sigma^2 = m_1^2\pi_1 + m_2^2\pi_2 - \\ &- (m_1\pi_1 + m_2\pi_2)^2 + \sigma^2 = m_1^2(\pi_1 - \pi_1^2) + m_2^2(\pi_2 - \pi_2^2) - 2m_1m_2\pi_1\pi_2 + \sigma^2 = m_1^2\pi_1\pi_2 + m_2^2\pi_1\pi_2 - \\ &- 2m_1m_2\pi_1\pi_2 + \sigma^2 = (m_1 - m_2)^2\pi_1\pi_2 + \sigma^2. \end{aligned}$$

Таким образом, автоковариационная функция $R(h)$ процесса Y_t представляет собой произведение дисперсии величины m_{Z_t} и экспоненты с показателем, определяемым интенсивностями λ_1, λ_2 :

$$R_Y(h) = (m_1 - m_2)^2\pi_1\pi_2e^{-(\lambda_1+\lambda_2)h} + \sigma^2 \cdot \mathbb{I}[h = 0]. \quad (22)$$

Автокорреляционная функция $\rho(h)$ процесса Y_t нормирует $R(h)$ относительно дисперсии $\text{Var}(Y)$:

$$\rho_Y(h) = \frac{R_Y(h)}{R_Y(0)} = \frac{(m_1 - m_2)^2\pi_1\pi_2e^{-(\lambda_1+\lambda_2)h} + \sigma^2 \cdot \mathbb{I}[h = 0]}{(m_1 - m_2)^2\pi_1\pi_2 + \sigma^2}.$$

Прямоугольный шум на вихретоковых дефектограммах рельсов подобно процессу Y_t обладает автокорреляционной функцией с экспоненциальным затуханием. Однако прямоугольному шуму присущи выраженные осцилляции, которые проявляются в автокорреляционной функции в виде дополнительной косинусоидальной компоненты (рис. 10).

Автокорреляционная функция рассматриваемой базовой модели Y_t описывается исключительно экспоненциальным затуханием и не содержит осциллирующей компоненты. Тем не менее, требуемый колебательный эффект, характерный для реального прямоугольного шума, может быть успешно воспроизведён путём применения к процессу низкочастотной фильтрации. На рис. 11 представлена реализация процесса Y_t , восстановленная посредством обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ) с усечением спектра до 50 первых гармоник, а на рис. 12 — соответствующая ей автокорреляционная функция. Таким образом, интеграция механизма низкочастотной фильтрации позволит существенно повысить степень соответствия теоретической и эмпирической автокорреляционных функций. Подобная модификация модели представляет собой перспективное направление для будущих исследований.

5.3. Байесовская оценка параметров

Параметры процесса Y_t будем искать по-байесовски. Модель описывается параметрами: $m_1, m_2, \tau, \lambda_1, \lambda_2$. Как и в главе 4, мы перешли от дисперсии шума σ^2 к точности $\tau = 1/\sigma^2$. Априорные распределения на m_1, m_2, τ зададим согласно (11).

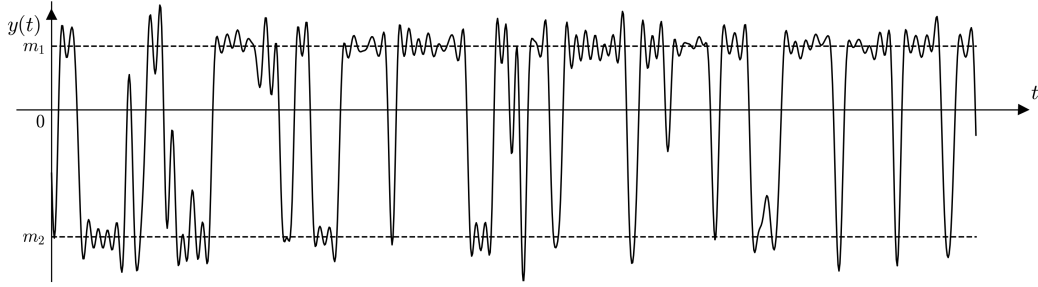


Fig. 11. A trajectory of telegraph process with white noise reconstructed using IDFT at the 50th harmonic

Рис. 11. Восстановленная с помощью ОДПФ траектория телеграфного процесса с белым шумом по 50-й гармонике.

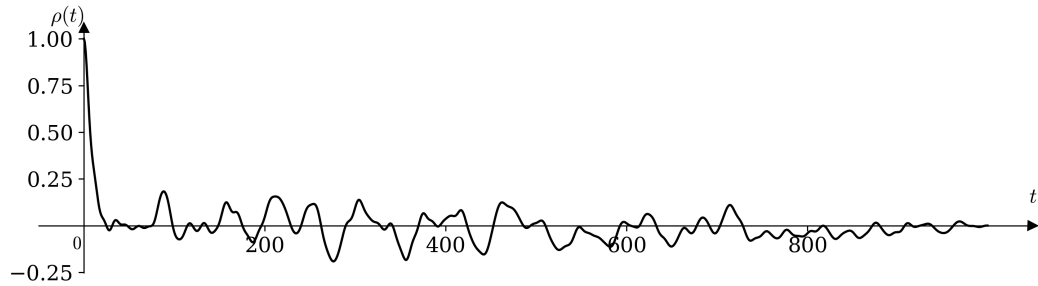


Fig. 12. Autocorrelation Function of Trajectory of Telegraph Process with Wight Noise Reconstructed using IDFT at the 50th Harmonic.

Рис. 12. Автокорреляционная функция восстановленной с помощью ОДПФ траектории телеграфного процесса с белым шумом по 50-й гармонике.

Параметры λ_1, λ_2 задают интенсивности в показательных распределениях длительности состояний марковской цепи $\text{Exp}(\lambda_1), \text{Exp}(\lambda_2)$. Для показательного распределения сопряжённым является гамма-распределение [7]. Поэтому в качестве априорных для λ_1, λ_2 возьмём гамма-распределения:

$$\lambda_i \sim \text{Gamma}(\lambda_i | \gamma_i, \theta_i).$$

Предполагая, что λ_1, λ_2 не зависят от m_1, m_2, τ , можем записать единое априорное распределение на параметры процесса Y_t в следующем виде:

$$f(m_1, m_2, \tau, \lambda_1, \lambda_2) = f(m_1, m_2 | \tau) \cdot f(\tau) \cdot f(\lambda_1) \cdot f(\lambda_2) = N(\bar{m} | \bar{\mu}, (\tau \mathcal{P})^{-1}) \cdot \text{Gamma}(\tau | \alpha, \beta) \cdot \text{Gamma}(\lambda_1 | \gamma_1, \theta_1) \cdot \text{Gamma}(\lambda_2 | \gamma_2, \theta_2). \quad (23)$$

Процесс Y_t дискретизируется с шагом dt на отрезке $t \in [a; b]$. В результате получается вектор чисел $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_d)$. Так как процесс Y_t напрямую зависит от марковского процесса Z_t , вектор \bar{y} можно рассматривать как наблюдения *скрытой марковской модели* (рис. 13). Вектор скрытых переменных \bar{z} представляет собой реализацию процесса Z_t . Условные распределения этой скрытой марковской модели известны. Формулы (19) и (20) задают вероятности $\mathbb{P}(Z_t = j | Z_{t-1} = i)$, а условная плотность наблюдений при условии скрытой переменной, исходя из определения процесса (15), находится следующим образом:

$$f_{Y_t | Z_t}(y | Z_t = i) = N(y | m_i, \tau).$$

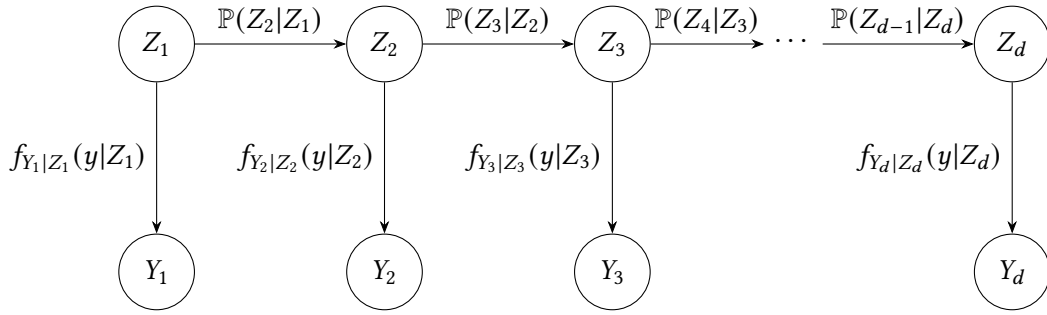


Fig. 13. A hidden Markov chain for observations of the process Y_t

Рис. 13. Скрытая марковская модель для наблюдений процесса Y_t

Нахождение параметров по-байесовски заключается в вычислении плотности апостериорного распределения $f(m_1, m_2, \tau, \lambda_1, \lambda_2 | \bar{y})$, и без известных скрытых переменных \bar{z} эта задача может быть решена только маргинализацией по всем возможным значениям скрытых переменных:

$$f(m_1, m_2, \tau, \lambda_1, \lambda_2 | \bar{y}) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_d} f(m_1, m_2, \tau, \lambda_1, \lambda_2 | \bar{y}, z_1 = i_1, z_2 = i_2, \dots, z_d = i_d).$$

Число слагаемых в сумме составляет 2^d , что при достаточно больших d делает задачу маргинализации трудно решаемой. Понятно также, что при таком подходе получить замкнутые формулы для обновления гиперпараметров апостериорного распределения как в разделе 4 не получится. Поэтому для решения задачи прибегнем к *МСМС-методам* (*Markov Chain Monte Carlo*) и с помощью *сэмплирования по Гиббсу* сформируем выборку из совместного распределения $f(\bar{z}, m_1, m_2, \tau, \lambda_1, \lambda_2 | \bar{y})$, по которой оценим параметры апостериорного распределения.

МСМС-сэмплирование образует марковскую цепь с состояниями $(\bar{z}^{(s)}, m_1^{(s)}, m_2^{(s)}, \tau^{(s)}, \lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)})$. Блуждание по этой цепи приводит к стационарному распределению, соответствующему искомому совместному распределению $f(\bar{z}, m_1, m_2, \tau, \lambda_1, \lambda_2 | \bar{y})$. Сэмплирование по Гиббсу формирует состояние марковской цепи по следующим правилам [25]:

1. $\bar{z}^{(s+1)} \sim f(\bar{z} | m_1^{(s)}, m_2^{(s)}, \tau^{(s)}, \lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)}, \bar{y})$.
2. $m_1^{(s+1)} \sim f(m_1 | \bar{z}^{(s+1)}, m_2^{(s)}, \tau^{(s)}, \lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)}, \bar{y})$.
3. $m_2^{(s+1)} \sim f(m_2 | \bar{z}^{(s+1)}, m_1^{(s+1)}, \tau^{(s)}, \lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)}, \bar{y})$.
4. $\tau^{(s+1)} \sim f(\tau | \bar{z}^{(s+1)}, m_1^{(s+1)}, m_2^{(s+1)}, \lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)}, \bar{y})$.
5. $\lambda_1^{(s+1)} \sim f(\lambda_1 | \bar{z}^{(s+1)}, m_1^{(s+1)}, m_2^{(s+1)}, \tau^{(s+1)}, \lambda_2^{(s)}, \bar{y})$.
6. $\lambda_2^{(s+1)} \sim f(\lambda_2 | \bar{z}^{(s+1)}, m_1^{(s+1)}, m_2^{(s+1)}, \tau^{(s+1)}, \lambda_1^{(s+1)}, \bar{y})$.

Вычисление апостериорных плотностей 2-6 за счёт сопряжённости априорных распределений параметров может быть сведено к обновлению гиперпараметров распределений по итеративным формулам. Плотности распределений m_1, m_2, τ обновляются по ранее найденным формулам (14). Статистики для обновления рассчитываются на основе вектора скрытых переменных $\bar{z}^{(s)}$. Для соответствия между вектором \bar{z} в формуле (14) и вектором скрытых переменных $\bar{z}^{(s)}$ положим $z_i = 1$, если $z_i^{(s)} = 1$, и $z_i = 0$, если $z_i^{(s)} = 2$.

Найдём итеративные формулы для обновления гиперпараметров распределений λ_1, λ_2 . По вектору $\bar{z}^{(s)}$ вычислим длительности $t_1^1, t_2^1, \dots, t_{k_1}^1$ состояния 1 и длительности $t_1^2, t_2^2, \dots, t_{k_2}^2$ состояния 2 как количество последовательных равных компонент вектора. Тогда правдоподобие относительно параметров λ_1, λ_2 и вычисленных статистик имеет вид

$$\mathcal{L}(\lambda_1, \lambda_2, t_1^1, t_2^1, \dots, t_{k_2}^2) = \text{Const} \cdot \prod_{i=1}^{k_1} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_i^1} \cdot \prod_{j=1}^{k_2} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_j^2}.$$

Перейдём к логарифму правдоподобия:

$$\ln \mathcal{L}(\lambda_1, \lambda_2, t_1^1, t_2^1, \dots, t_{k_2}^2) = \text{Const} + k_1 \ln \lambda_1 + k_2 \ln \lambda_2 - \lambda_1 dt \sum_{i=1}^{k_1} t_i^1 - \lambda_2 dt \sum_{j=1}^{k_2} t_j^2.$$

Найдём логарифм априорной плотности λ_1, λ_2 :

$$\begin{aligned} \ln f(\lambda_1, \lambda_2) &= \ln (\text{Gamma}(\lambda_1 | \gamma_1, \theta_1) \cdot \text{Gamma}(\lambda_2 | \gamma_2, \theta_2)) = \gamma_1 \ln \theta_1 + \gamma_2 \ln \theta_2 - \ln \Gamma(\gamma_1) - \ln \Gamma(\gamma_2) + \\ &+ (\gamma_1 - 1) \ln \lambda_1 + (\gamma_2 - 1) \ln \lambda_2 - \lambda_1 \theta_1 - \lambda_2 \theta_2 = \text{Const} + (\gamma_1 - 1) \ln \lambda_1 + (\gamma_2 - 1) \ln \lambda_2 - \lambda_1 \theta - \lambda_2 \theta_2. \end{aligned}$$

Спряжённость априорного распределения правдоподобию очевидна. Формулы для пересчёта параметров $\gamma_1, \gamma_2, \theta_1, \theta_2$ будут следующими:

$$\begin{aligned} \gamma_1' &= \gamma_1 + k_1, \\ \gamma_2' &= \gamma_2 + k_2, \\ \theta_1' &= \theta_1 + dt \sum_{i=1}^{k_1} t_i^1, \\ \theta_2' &= \theta_2 + dt \sum_{j=1}^{k_2} t_j^2. \end{aligned} \tag{24}$$

Итак, в сэмплинге по Гиббсу все апостериорные плотности 2-6 легко пересчитываются и трудность представляет только вычисление плотности $f(\bar{z} | m_1^{(s)}, m_2^{(s)}, \tau^{(s)}, \lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)}, \bar{y})$. На первый взгляд кажется, что для решения данной задачи необходимо вывести формулы плотности распределения для любой возможной конфигурации вектора \bar{z} , число которых равно 2^d . Но в теории скрытых марковских моделей существует алгоритм, эффективно решающий эту задачу за $O(d)$ операций. Он является модернизацией алгоритма Витерби [25] и в литературе часто именуется алгоритмом прямой фильтрации и обратного сэмплинга (*Forward-Filtering Backward-Sampling, FFBS*) [26]. Алгоритм был независимо получен разными исследователями, в числе которых [27] (в статье он назван «полностью байесовским методом сэмплинга»). Ранее в наиболее популярных моделях RTN для оценки параметров телеграфного процесса алгоритм FFBS уже использовался [28].

Метод FFBS опирается на условную независимость точек в скрытой марковской модели и реализуется в два прохода. На прямом проходе для каждого момента времени $t = 1, \dots, d$ рекурсивно вычисляются вспомогательные величины $\alpha_t(i)$, пропорциональные вероятностям $\mathbb{P}(Z_t = i | y_1, y_2, \dots, y_t, m_1^{(s)}, m_2^{(s)}, \tau^{(s)}, \lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)})$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(i) &\propto \pi_i \cdot f_{Y_1|Z_1}(y_1 | Z_1 = i), \\ \alpha_t(i) &\propto f_{Y_t|Z_t}(y_t | Z_t = i) \sum_{j=1}^2 \alpha_{t-1}(j) p_{ji}(dt), \quad t = 2, \dots, d. \end{aligned}$$

Числа $p_{ji}(dt)$ — вероятности перехода из состояния j в состояние i за время dt . Они определяются формулами (19), (20). Для перехода к истинным значениям вероятностей на каждом вычислительном шаге t вектор α_t нормируется таким образом, чтобы сумма его компонент равнялась единице: $\alpha_t(1) + \alpha_t(2) = 1$.

При обратном проходе цепи осуществляется последовательное сэмплирование элементов вектора $\bar{z}^{(s+1)}$. Для последнего отсчёта d состояние z_d сэмплируется из дискретного распределения

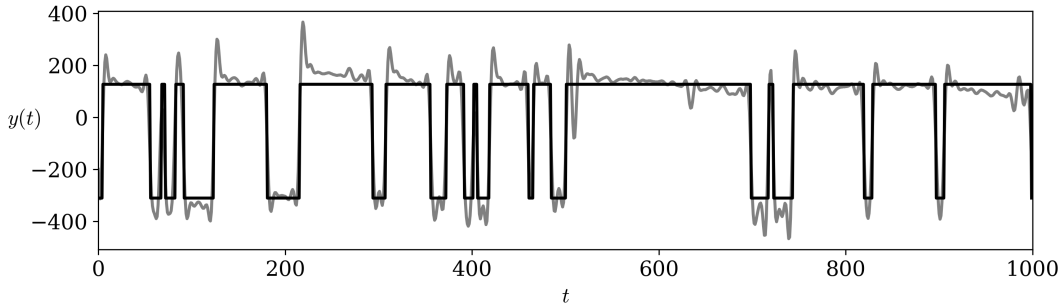


Fig. 14. The last sampled trajectory $z(t)$ in the FFBS algorithm for learning the parameters of the process Y_t

Рис. 14. Последняя сэмплированная траектория $z(t)$ в FFBS алгоритме обучения параметров процесса Y_t

с вероятностями $\alpha_d(1), \alpha_d(2)$. Для каждого предшествующего момента времени $t = d - 1, d - 2, \dots, 1$ состояние z_t сэмплируется с учётом уже порождённого будущего состояния z_{t+1} :

$$\mathbb{P}\left(Z_t = i \mid Z_{t+1} = j, y_1, y_2, \dots, y_t, m_1^{(s)}, m_2^{(s)}, \tau^{(s)}, \lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)}\right) = \frac{\alpha_t(i)p_{ij}(dt)}{\alpha_t(1)p_{1j}(dt) + \alpha_t(2)p_{2j}(dt)}. \quad (25)$$

Полученный таким образом вектор $\bar{z}^{(s+1)}$ является точной выборкой из условного распределения $f(\bar{z} | m_1^{(s)}, m_2^{(s)}, \tau^{(s)}, \lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)}, \bar{y})$.

На рис. 14 представлена траектория $z(t)$ последнего шага сэмплирования по Гиббсу для обучения параметров процесса Y_t по прямоугольному шуму на вихретоковых дефектограммах рельсов с длиной 1000 отсчётов и $dt = 1$. Производилось 2000 итераций, 1000 из которых использовалась для «разогрева» (время, необходимое марковской цепи для входа в стационарный режим). Общая дисперсия обученных параметров упала до значения $1e-6$ уже на 1500-й итерации сэмплирования, то есть оценки параметров достаточно быстро сходятся. Даже наличие переходного процесса между нижним и верхним импульсами прямоугольного шума не приводит к значимому смещению предсказываемой марковской траектории (рис. 14). Тем не менее, значения m_1 и m_2 кажутся заниженными и завышенными соответственно. Это происходит из-за амплитуд переходного процесса, которые вынуждены относиться к одному из марковских состояний и вносят смещение в оценку m_1, m_2 .

Заключение

Алгоритмы машинного обучения для обнаружения и подавления прямоугольного шума требуют наличия качественной модели порождения шума. В настоящей работе проведено комплексное исследование классических моделей прямоугольного шума на основе прямоугольного сигнала и телеграфного процесса.

Модели на основе прямоугольного сигнала предполагают постоянство периода и скважности, что на практике никогда не соблюдается. Это является существенным недостатком моделей, который не позволяет использовать их на практике.

Телеграфный процесс с белым шумом устраняет указанные недостатки за счёт введения стохастической длительности импульсов. Однако сохранение дискретного характера переключений между состояниями не позволяет учитывать непрерывность переходных фронтов и наличие осцилляций (эффекта Гиббса), характерных для реальных электромагнитных сигналов. В работе продемонстрировано, что игнорирование динамики переходных процессов приводит к статистическому смещению мод теоретической функции плотности распределения относительно эмпирического распределения. Кроме того, автокорреляционная функция такой модели лишена осциллирующей

компоненты, что снижает её адекватность при описании спектральных свойств реального прямоугольного шума.

Важным научным результатом исследования является разработка и реализация полностью байесовского подхода к оценке параметров телеграфного процесса с белым шумом. Применение современных МСМС-методов позволило получить точные оценки апостериорных распределений параметров, обеспечив высокую статистическую эффективность и надёжность предложенного метода в сравнении с классическими частотными подходами.

Главным итогом исследования является экспериментальное подтверждение гипотезы о значимости непрерывного и осциллирующего характера переходных фронтов для построения адекватных моделей прямоугольного шума. Обосновано, что существующие базовые модели нуждаются в качественном обобщении. Дальнейшее развитие работы предполагает создание модифицированных стохастических моделей, интегрирующих механизмы плавного переключения состояний.

References

- [1] L. Y. Bystrov, A. N. Gladkov, and E. V. Kuzmin, “Detection of square wave impulse interference in eddy current rail defectograms”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 32, no. 2, pp. 172–205, 2025, in Russian. DOI: [10.18255/1818-1015-2025-2-172-205](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2025-2-172-205)
- [2] Z. F. M. Apandi, R. Ikeura, S. Hayakawa, and S. Tsutsumi, “An analysis of the effects of noisy electrocardiogram signal on heartbeat detection performance”, *Bioengineering (Basel)*, vol. 7, no. 2, p. 53, 2020. DOI: [10.3390/bioengineering7020053](https://doi.org/10.3390/bioengineering7020053)
- [3] G. Li et al., “Improved shift-invariant sparse coding for noise attenuation of magnetotelluric data”, *Earth, Planets and Space*, vol. 72, p. 45, 2020. DOI: [10.1186/s40623-020-01173-7](https://doi.org/10.1186/s40623-020-01173-7)
- [4] L. Y. Bystrov, A. N. Gladkov, and E. V. Kuzmin, “Sliding-window SW-criterion for square wave noise segmentation in eddy current rail defectograms”, in *Proceedings of the 2026 28th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA)*, 2026, pp. 1–6. DOI: [10.1109/DSPA69176.2026.11476746](https://doi.org/10.1109/DSPA69176.2026.11476746)
- [5] L. Y. Bystrov, A. N. Gladkov, and E. V. Kuzmin, “Suppression of additive periodic low-frequency interference on eddy-current defectograms”, *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 59, no. 7, pp. 895–909, 2025. DOI: [10.3103/S0146411625700269](https://doi.org/10.3103/S0146411625700269)
- [6] A. N. Gladkov, L. Y. Bystrov, and E. V. Kuzmin, “Application of YOLO family neural networks for useful signals detection on eddy current rail defectograms”, *Proceedings of the Institute for System Programming of the RAS*, vol. 37, no. 6, pp. 131–150, 2025, in Russian. DOI: [10.15514/ISPRAS-2025-37\(6\)-25](https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2025-37(6)-25)
- [7] S. I. Nikolenko, *Mashinnoe obuchenie: osnovy*. Piter, 2025, 608 pp., in Russian.
- [8] A. W. Van der Vaart, *Asymptotic Statistics*. Cambridge University Press, 1998, 443 pp.
- [9] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 3rd ed. John Wiley & Sons, 1970, vol. 1, 509 pp.
- [10] Z. Shang, X. Zhang, S. Yan, and K. Zhang, “Suppression of strong cultural noise in magnetotelluric signals using particle swarm optimization-optimized variational mode decomposition”, *Applied Sciences*, vol. 14, no. 24, p. 11 719, 2024. DOI: [10.3390/app142411719](https://doi.org/10.3390/app142411719)
- [11] R. Zhou, J. Han, Z. Guo, and T. Li, “De-noising of magnetotelluric signals by discrete wavelet transform and SVD decomposition”, *Remote Sensing*, vol. 13, no. 23, p. 4932, 2021. DOI: [10.3390/rs13234932](https://doi.org/10.3390/rs13234932)
- [12] J. Falk, M. Mendler, and B. Drossel, “A minimal model of burst-noise induced bistability”, *PLOS ONE*, vol. 12, no. 4, pp. 1–15, 2017. DOI: [10.1371/journal.pone.0176410](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0176410)

- [13] L. Chen, J. Fernandez-de-Castro, J. Giusti, H. Fang, and M. Hurben, “Telegraph noise mechanism and LLG noise model”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 36, no. 5, pp. 3195–3198, 2000. DOI: [10.1109/20.908735](https://doi.org/10.1109/20.908735)
- [14] A. Aharony, O. Entin-Wohlman, D. Chowdhury, and S. Dattagupta, “Is telegraph noise a good model for the environment of mesoscopic systems?”, *Journal of Statistical Physics*, vol. 175, no. 3, pp. 704–724, 2018. DOI: [10.1007/s10955-018-2215-6](https://doi.org/10.1007/s10955-018-2215-6)
- [15] D. S. Kosov, “Telegraph noise in Markovian master equation for electron transport through molecular junctions”, *The Journal of Chemical Physics*, vol. 148, no. 18, p. 184 108, 2018. DOI: [10.1063/1.5033354](https://doi.org/10.1063/1.5033354)
- [16] A. Varanasi, R. Degraeve, P. Roussel, and C. Merckling, “RTNinja: A generalized machine learning framework for analyzing random telegraph noise signals in nanoelectronic devices”, *APL Machine Learning*, vol. 3, no. 4, p. 046 109, 2025. DOI: [10.1063/5.0295457](https://doi.org/10.1063/5.0295457)
- [17] L. Dan, W. Xue, W. Guiqin, and Q. Zhihong, “A methodological approach for detecting burst noise in the time domain”, *International Journal of Electronics and Communication Engineering*, vol. 3, no. 10, pp. 1883–1887, 2009.
- [18] O. Gauthier, “Characterization and modeling of low-frequency noise and random telegraph noise in advanced CMOS imaging technologies”, Ph.D. dissertation, Université Grenoble Alpes, 2024. [Online]. Available: <https://theses.hal.science/tel-05008737>
- [19] S. M. Iacus and N. Yoshida, “Estimation for the discretely observed telegraph process”, *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, vol. 78, pp. 37–47, 2009. DOI: [10.1090/S0094-9000-09-00760-1](https://doi.org/10.1090/S0094-9000-09-00760-1)
- [20] I. S. Gonorovskiy, *Radiotekhnicheskie cepi i signaly*, 4th ed. Radio i svyaz’, 1986, 512 pp., in Russian.
- [21] H. S. Carslaw, *Introduction to the Theory of Fourier’s Series and Integrals*, 2nd ed. Macmillan and co., 1921, 323 pp.
- [22] V. I. Klyatskin, *Lectures on Dynamics of Stochastic Systems*, 1st ed. Elsevier Inc., 2011, 396 pp.
- [23] V. Balakrishnan, *Mathematical Physics: Applications and Problems*, 1st ed. Springer Cham, 2020, 781 pp. DOI: [10.1007/978-3-030-39680-0](https://doi.org/10.1007/978-3-030-39680-0)
- [24] A. N. Shiryaev, *Veroyatnost’*, 3rd ed. MCNMO, 2004, vol. 2, 408 pp., in Russian.
- [25] C. P. Robert and G. Casella, *Monte Carlo Statistical Methods*, 2nd ed. Springer New York, 2004, 649 pp. DOI: [10.1007/978-1-4757-4145-2](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4145-2)
- [26] P. Congdon, *Applied Bayesian Modeling*. John Wiley & Sons, 2003, 457 pp. DOI: [10.1002/0470867159](https://doi.org/10.1002/0470867159)
- [27] S. Chib, “Calculating posterior distributions and modal estimates in Markov mixture models”, *Journal of Econometrics*, vol. 75, no. 1, pp. 79–97, 1996. DOI: [10.1016/0304-4076\(95\)01770-4](https://doi.org/10.1016/0304-4076(95)01770-4)
- [28] F. M. Puglisi and P. Pavan, “Factorial hidden Markov model analysis of random telegraph noise in resistive random access memories”, *ECTI Transactions on Electrical Engineering, Electronics, and Communications*, vol. 12, no. 1, pp. 24–29, 2014. DOI: [10.37936/ecti-eeec.2014121.170814](https://doi.org/10.37936/ecti-eeec.2014121.170814)