

Large Chains of Delay Logistic Equations with Advective-Type Constraints: an Algorithm for Constructing Quasinormal Forms

E. A. Marushkina¹, E. I. Tolbey¹DOI: [10.18255/1818-1015-2026-2-256-265](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2026-2-256-265)¹P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

MSC2020: 39A11, 34K18

Research article

Full text in Russian

Received March 24, 2026

Revised May 15, 2026

Accepted May 19, 2026

The dynamics of large non-periodic chains with advective connections between elements is considered. The main assumption is that the number N of chain elements is sufficiently large, so a small parameter $\varepsilon = N^{-1}$ naturally arises. This assumption allows us to move from a system of N delayed equations to the study of a spatially distributed integro-differential equation containing a small parameter and use asymptotic methods to investigate the dynamic properties of this equation. The connections between the chain elements are a difference approximation of the advection operator, which is why they are called advective. Another assumption is that the chains are not circular, i.e., the boundary conditions for the systems under consideration do not have periodic properties. Non-classical boundary conditions are considered, which lead to the emergence of new dynamic effects. Critical cases in the problem of equilibrium stability are identified, and it is shown that they have infinite dimension in the sense that an infinite number of roots of the characteristic equation approach the imaginary axis as a small parameter approaches zero. In this situation, the known research methods based on the use of invariant integral manifolds and normal forms are not directly applicable. We use methods of quasi-normal forms, whose non-local dynamics determine the local behavior of the solutions of the considered chains. The main results consist in constructing quasi-normal forms using special asymptotic methods. This allows us to obtain the main approximations of the solutions of the original chain with respect to the parameter ε .

Keywords: dynamics; chains; bifurcations; stability; normal form; delay

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Marushkina, Elena A. (corresponding author)	ORCID iD: 0000-0001-9183-6484 . E-mail: marushkina-ea@yandex.ru PhD, Head of the Department of General Mathematics
Tolbey, Egor I.	ORCID iD: 0009-0005-3614-1766 . E-mail: e.tolbej@uniyar.ac.ru Student

Funding: Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-03-2026-305).

For citation: E. A. Marushkina and E. I. Tolbey, "Large chains of delay logistic equations with advective-type constraints: an algorithm for constructing quasinormal forms", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 33, no. 2, pp. 256–265, 2026. DOI: [10.18255/1818-1015-2026-2-256-265](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2026-2-256-265).

Большие цепочки из логистических уравнений с запаздыванием со связями адвективного типа: алгоритм построения квазинормальных форм

Е. А. Марушкина¹, Е. И. Толбей¹

DOI: 10.18255/1818-1015-2026-2-256-265

¹Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия

УДК 519.7

Научная статья

Полный текст на русском языке

Получена 24 марта 2026 г.

После доработки 15 мая 2026 г.

Принята к публикации 19 мая 2026 г.

Рассматривается динамика больших неперiodических цепочек с адвективными связями между элементами. Основное предположение состоит в том, что количество N элементов цепочки достаточно велико, поэтому естественным образом возникает малый параметр $\varepsilon = N^{-1}$. Это предположение дает возможность от системы N уравнений с запаздыванием перейти к исследованию пространственно-распределенного интегро-дифференциального уравнения, содержащего малый параметр и использовать асимптотические методы для исследования динамических свойств этого уравнения. Связи между элементами цепочек являются разностной аппроксимацией оператора адвекции (переноса), поэтому их называют адвективными. Еще одно предположение состоит в том, что цепочки не являются кольцевыми, т.е. краевые условия для рассматриваемых систем не обладают свойствами периодичности. Рассматриваются неклассические краевые условия, которые способствуют появлению новых динамических эффектов. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия и показано, что они имеют бесконечную размерность в том смысле, что бесконечно много корней характеристического уравнения стремятся к мнимой оси при стремлении к нулю малого параметра. В этой ситуации известные методы исследования, основанные на использовании инвариантных интегральных многообразий и нормальных форм, непосредственно не применимы. Используются методы квазинормальных форм, нелокальная динамика которых определяет локальное поведение решений рассматриваемых цепочек. Основные результаты состоят в построении квазинормальных форм с помощью специальных асимптотических методов. Это дает возможность получить главные приближения по параметру ε решений исходной цепочки.

Ключевые слова: динамика; цепочки; бифуркации; устойчивость; нормальная форма; запаздывание

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Марушкина, Елена Александровна
(автор для корреспонденции)

ORCID iD: [0000-0001-9183-6484](https://orcid.org/0000-0001-9183-6484). E-mail: marushkina-ea@yandex.ru
Канд. физ.-мат. наук, заведующий кафедрой общей математики

Толбей, Егор Иванович

ORCID iD: [0009-0005-3614-1766](https://orcid.org/0009-0005-3614-1766). E-mail: e.tolbej@uniyar.ac.ru
Студент

Финансирование: Министерство науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-02-2026-1331).

Для цитирования: Е. А. Marushkina and E. I. Tolbey, “Large chains of delay logistic equations with advective-type constraints: an algorithm for constructing quasnormal forms”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 33, no. 2, pp. 256–265, 2026. DOI: 10.18255/1818-1015-2026-2-256-265.

Постановка задачи

Рассматриваются цепочки, состоящие из одинаковых элементов, динамика которых описывается логистическим уравнением с запаздыванием

$$\dot{u} + ru(t-1)[1+u] = 0, \quad (1)$$

где

$$0 < r < \frac{\pi}{2}.$$

Локальная — в окрестности нулевого состояния равновесия — динамика (1) тривиальна: все решения из достаточно малой окрестности нуля стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ [1, 2].

Исследуем цепочку связанных элементов вида

$$\dot{u}_j + ru_j(t-1)[1+u_j] = b[u_{j+1} - u_{j-1}], \quad (2)$$

где $b \neq 0$, $j = 1, \dots, N-1$, а для крайних элементов выполнены краевые условия

$$u_0 = 0, \quad u_N = \gamma u_M, \quad (3)$$

причем $\gamma \neq 0$ и $0 < M < N$.

Связь $u_{j+1} - u_{j-1}$ называют адвективной, поскольку ее можно интерпретировать как стандартную разностную аппроксимацию оператора адвекции $\partial v / \partial x$: $\partial v / \partial x \sim (2\Delta x)^{-1}(v(x + \Delta x) - v(x - \Delta x))$.

Обратим внимание, что цепочка (2), (3) не является периодической по индексу j . В работах [3–8] рассматривалась динамика периодических цепочек, для которых выполнено условие $u_{j+N} = u_j$. В работах [9, 10] рассматривались непериодические цепочки с односторонними и двусторонними связями.

Основное предположение, открывающее путь к применению асимптотических методов, состоит в том, что количество $N-1$ элементов цепочки является достаточно большим: $N \gg 1$. Поэтому естественным образом возникает малый параметр

$$\varepsilon = N^{-1} \ll 1. \quad (4)$$

При этом условии будем исследовать вопрос о локальной — в окрестности нулевого состояния равновесия — динамике цепочки (2), (3).

При условии (4) часто используют переход к непрерывной пространственной переменной. Для этого функцию $u_j(t)$ ассоциируют с функцией двух переменных $u(t, x_j)$, где $x_j = \varepsilon j$ — равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$ точки, причем $x_0 = 0$, $x_N = 1$. Тогда краевая задача (2), (3) при $x = x_j$ принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + ru(t-1, x)[1+u] = b[u(t, x+\varepsilon) - u(t, x-\varepsilon)], \quad (5)$$

с краевыми условиями

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = \gamma u|_{x=\alpha}. \quad (6)$$

Здесь $\alpha = MN^{-1}$. Для того, чтобы ниже использовать аналитические методы, ограничимся изучением наиболее интересного случая, когда значение N — четное и $M = N/2$, а значит, $\alpha = 1/2$.

Цепочки являются важными объектами для исследований. Им уделяется особое внимание. Такие цепочки возникают при моделировании многих прикладных задач в радиофизике [3–5, 11–14], лазерной физике [15, 16], математической экологии [7], теории нейронных сетей [6, 8, 17, 18], оптике [4, 13], биофизике [19] и др.

Хотя большинство работ посвящено изучению относительно небольших цепочек, т. е. цепочек, состоящих из небольшого числа элементов [20–24], в ряде работ [20–27] особо подчеркивалась необходимость изучения цепочек с большим количеством элементов.

В настоящей работе рассматриваются цепочки с достаточно большим количеством элементов N , поэтому естественным образом возникает малый параметр $\varepsilon = N^{-1}$. Наличие малого параметра позволяет воспользоваться аналитическими (асимптотическими) методами исследования и понять тенденции изменения динамических свойств цепочек при увеличении количества элементов.

При рассмотрении цепочек с односторонними или с двусторонними связями важную роль играют краевые условия на одном или на двух концах соответствующих цепочек. Как правило изучались цепочки с «классическими» краевыми условиями, когда эти условия периодические, что характерно для кольцевых цепочек, либо с краевыми условиями типа Дирихле, либо с дискретным аналогом краевого условия Неймана. В настоящей работе рассматриваются интересные и важные для приложений «неклассические» краевые условия. Для них характерно выполнение определенных соотношений между крайними элементами цепочки и здесь предпринят систематический анализ динамики цепочек при неклассических связях.

Отметим, что, как правило, индивидуальный элемент цепочек описывается в цитированных выше работах с помощью дифференциального уравнения второго (или более высокого) порядка, причем обладающего собственной нетривиальной динамикой. В настоящей работе для того, чтобы подчеркнуть роль неклассических краевых условий, рассмотрен наиболее простой случай, когда индивидуальные элементы цепочки обладают простейшей динамикой. Они описываются нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка, причем все его решения из окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Будет показано, что уже в таких «простейших» цепочках могут возникнуть нетривиальные критические в задаче об устойчивости случаи и их описание сводится к анализу специальных нелинейных уравнений типа Гинзбурга–Ландау. Асимптотические формулы, которые удастся получить для решений исходной системы позволяют выявить роль коэффициента связей между элементами и роль коэффициента, входящего в краевые условия. Отметим, что динамика «больших» непериодических цепочек оказывается существенно сложнее, чем для кольцевых цепочек.

При изучении «больших» цепочек удастся свести соответствующую дискретную систему к пространственно-распределённому уравнению.

Представленное в настоящей работе исследование – необходимый этап перед переходом к изучению «больших» цепочек, элементы которых описываются уравнениями более высоких порядков.

При исследовании локальной динамики важную роль играет поведение решений линеаризованной краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + ru(t-1, x) = b[u(t, x + \varepsilon) - u(t, x - \varepsilon)], \tag{7}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = \gamma u|_{x=1/2}. \tag{8}$$

Выпишем характеристическое уравнение для (7), (8). Для этого рассмотрим в (7) решения Эйлера $u = \exp(\lambda t)\rho^{xN}$. Тогда для функции $P(\lambda) = \lambda + r \exp(-\lambda)$ получаем, что $P(\lambda)b^{-1} = \rho - \rho^{-1}$, а значит,

$$\rho = \rho(\lambda) = \frac{1}{2} \left[P(\lambda)b^{-1} + (P^2(\lambda)b^{-2} + 4)^{1/2} \right].$$

Из краевых условий (8) находим, что $u(t, x_j) = \rho^{ix_jN} - \rho^{-ix_jN}$ и

$$\rho^N(\lambda) - \rho^{-N}(\lambda) = \gamma \left(\rho^{\frac{1}{2}N}(\lambda) - \rho^{-\frac{1}{2}N}(\lambda) \right). \tag{9}$$

Положим $b_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - r \right)$. Сформулируем важный результат, простое, но громоздкое обоснование которого здесь приводить не будем.

Теорема 1. Пусть выполнено условие $|b| > b_0$. Тогда при всех достаточно малых ε характеристическое уравнение (9) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественной частью. Если же $|b| < b_0$, то все корни (9) при достаточно малых ε имеют отрицательные и отделенные от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественные части.

Отсюда следует, что локальная динамика краевой задачи (5), (6) нуждается в изучении только в случае, когда значение $|b|$ при малых ε близко к b_0 . В этом случае асимптотически большое (при малых ε) количество корней (9) стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это означает, что критический случай в задаче об устойчивости нулевого решения имеет бесконечную размерность. Стандартные методы анализа, основанные на использовании инвариантных интегральных многообразий и нормальных форм [28, 29], оказываются непосредственно неприменимы. Будем использовать методы так называемых квазинормальных форм, развитые в работах [8, 9, 30]. В качестве основных результатов будут построены специальные нелинейные краевые задачи параболического типа, нелокальная динамика которых описывает локальное поведение решений исходной цепочки. Отметим, что в работе существенно используются полученные в [31] результаты о динамике пространственно-распределенных логистических уравнений с запаздыванием.

В разделе 1 изучается случай, когда для произвольно фиксированного значения b_1 выполнено равенство

$$b = b_0 + \varepsilon^2 b_1, \quad (10)$$

а в разделе 2 предполагаем, что

$$b = -\left(b_0 + \varepsilon^2 b_1\right). \quad (11)$$

Обратим внимание, что решением уравнения (7) без учета краевых условий является функция

$$\exp(\lambda t + i\delta y),$$

где $y = x\varepsilon^{-1}$, причем выполнено равенство

$$P(\lambda) = 2ib \sin \delta.$$

Условие отсутствия экспоненциально растущих по t решений и существование периодических по t решений состоит в выполнении равенства $|b| = b_0$. В этом случае

$$\lambda = i\frac{\pi}{2} \text{ и } \delta = \pi/2 \text{ при } b = b_0, \quad \delta = -\pi/2 \text{ при } b = -b_0.$$

1. Динамика краевой задачи (5), (6) при условии (10)

При условии (10) сначала изучим те решения краевой задачи (7), (8), которые в некотором смысле «близки» к периодической по t функции $\exp(i\frac{\pi}{2}t + i\pi(2\varepsilon)^{-1}x)$. Через $E_0(t, x)$ обозначим функцию

$$E_0(t, x) = \exp\left(i\frac{\pi}{2}t + i\left(\frac{\pi}{2\varepsilon} + \theta\right)x\right).$$

Здесь через $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ обозначена величина, которая дополняет выражение $\pi(2\varepsilon)^{-1}$ до целого кратного 2π . Отметим, что в случае, когда N кратно 4 имеем $\theta(\varepsilon) = 0$, а если четное N не кратно 4, то $\theta(\varepsilon) = \pi$.

Решение линейной краевой задачи (7), (8) ищем в виде

$$u = E_0(t, x)\xi(\tau, x), \quad \tau = \varepsilon^2 t, \quad (12)$$

где $\xi(\tau, x)$ — подлежащая определению функция, регулярно зависящая от x . Напомним, что функцию $v(x)$ называют регулярной, если

$$v(x + \varepsilon) = v(x) + \varepsilon v'(x) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 v''(x) + O(\varepsilon^3). \quad (13)$$

Подставим выражение (12) в (7), (8). Используя (13) и отбрасывая слагаемые более высокого порядка малости по ε , получаем, что

$$(1 + ir) \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = b_0 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2i\theta \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + (b_1 - \theta^2 b_0) \xi, \quad (14)$$

$$\xi|_{x=0} = 0, \quad \xi|_{x=1} = \gamma_0 \xi|_{x=1/2}, \quad (15)$$

где

$$\gamma_0 = \gamma \begin{cases} (-1)^K, & \text{если } N = 4K, \\ (-1)^{K+1}, & \text{если } N = 4K + 2. \end{cases}$$

На следующем этапе решения нелинейной краевой задачи (5), (6) ищем в виде

$$u = \varepsilon \left(\xi(\tau, x) E_0(t, x) + \overline{c\bar{c}} \right) + \varepsilon^2 u_2(t, \tau, x, y) + \varepsilon^3 u_3(t, \tau, x, y) + \dots \quad (16)$$

Здесь и ниже через $\overline{c\bar{c}}$ обозначаем слагаемое, комплексно сопряженное к предыдущему. Зависимость от t в (16) — 4-периодическая, $y = x\varepsilon^{-1}$, $\tau = \varepsilon^2 t$.

Подставим (16) в (5), (6). Собирая коэффициенты при ε^2 , получим уравнение относительно u_2 , из которого находим, что

$$u_2 = \frac{r}{r - i\pi} E^2(t, x) \xi^2(\tau, x).$$

На следующем шаге соберем коэффициенты при ε^3 . Получим уравнение для определения u_3 . Условие его разрешимости состоит в отсутствии гармоник $\exp(\pm i \frac{\pi}{2} t)$ в получившемся неоднородном линейном уравнении. Применяя его, приходим к краевой задаче для нахождения амплитуды $\xi(\tau, x)$:

$$(1 + ir) \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = b_0 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2i\theta \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + (b_1 - \theta^2 b_0) \xi + \sigma \xi |\xi|^2, \quad (17)$$

$$\xi|_{x=0} = 0, \quad \xi|_{x=1} = \gamma_0 \xi|_{x=1/2}, \quad (18)$$

где $\sigma = 2r^2(1 + i) / i\pi + r$.

Из приведенных построений вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнено условие (10) и пусть $\xi(\tau, x)$ — ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$, $x \in [0, 1]$ решение краевой задачи (17), (18). Тогда функция (16) удовлетворяет краевой задаче (5), (6) с точностью до $o(\varepsilon^3)$.

Замечание 1. Конструкция (12) может быть существенно обобщена. Будем предполагать, что функция ξ из (12) и из (16) дополнительно зависит еще и от аргумента $y = x\varepsilon^{-1}$ и является по нему 1-периодической функцией. Тогда вся формульная часть, включая краевую задачу (17), (18), а также утверждение теоремы 2, остается без изменений. Аргумент y для $\xi(\tau, x, y)$ выступает, как параметр. Это может приводить к тому, что краевая задача (17), (18) может обладать такими решениями, которые при $\tau \rightarrow \infty$ будут стремиться к разрывным по пространственной переменной функциям.

В связи со сказанным, краевые условия (18) можно дополнить соотношением

$$\xi(\tau, x, y + 1) \equiv \xi(\tau, x, y). \quad (19)$$

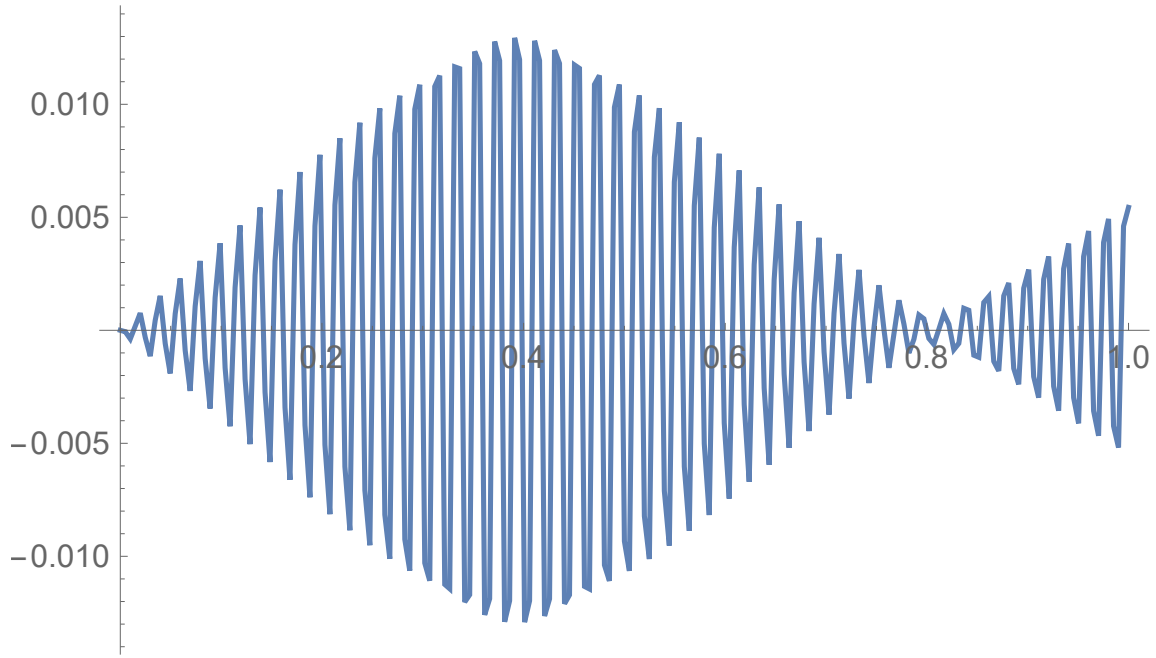


Fig. 1. Graph of the solution $u(t, x)$ of the boundary value problem (5), (6) for $N = 202, t = 3 \cdot 10^5, b = b^-(a), b_1 = 20, \gamma = 0.5$

Рис. 1. График решения $u(t, x)$ краевой задачи (5), (6) при $N = 202, t = 3 \cdot 10^5, b = b^-(a), b_1 = 20, \gamma = 0.5$

2. Динамика краевой задачи (5), (6) при условии (11)

Используем результаты предыдущего раздела. Будем искать в том же виде (16) решения нелинейной краевой задачи (5), (6) при условии (11)

$$u = \varepsilon \left(\xi(\tau, x, y) E_0(t, x) + \overline{c\bar{c}} \right) + \varepsilon^2 u_2(t, \tau, x, y) + \varepsilon^3 u_3(t, \tau, x, y) + \dots, \quad (20)$$

но лишь с тем отличием, что зависимость функций $\xi(\tau, x, y)$ и $u_3(t, \tau, x, y)$ от аргумента y здесь является 1-антипериодической

$$\xi(\tau, x, y + 1) \equiv -\xi(\tau, x, y). \quad (21)$$

Подставим (20) в (5), (6). Производя стандартные действия, для $\xi(\tau, x, y)$ получаем то же самое уравнение (14), но краевые условия будут отличаться:

$$\xi|_{x=0} = 0, \quad \xi|_{x=1} = -\gamma_0 \xi|_{x=1/2}. \quad (22)$$

В аналоге теоремы 2 – итоговом результате в рассматриваемом случае – только краевые условия (18), (19) меняются на (21) и (22).

На рисунках 1 и 2 в качестве примера представлены полученные численно графики решения $u(t, x)$ краевой задачи (5), (6). На рисунке 1 при фиксированном значении $t = 3 \cdot 10^5$ приведен график зависимости от $x \in [0, 1]$ функции $u(t, x)$, а на рисунке 2 фиксировано значение $x = 0.5$ и на отрезке $t \in [3 \cdot 10^5 - 10, 3 \cdot 10^5]$ приведен график $u(t, x)$. Изображенные на рисунке 1 осцилляции функции $u(t, x)$ отражают тот факт, что $E_\theta(t, x)$ содержит быстро осциллирующую по пространственной переменной составляющую $(\pi / 2\varepsilon + \theta) x$.

Заключение

Рассмотрена локальная динамика больших цепочек с адвективными связями. Выделены критические случаи ((10) и (11)) в задаче об устойчивости нулевого решения. Показано, что они имеют

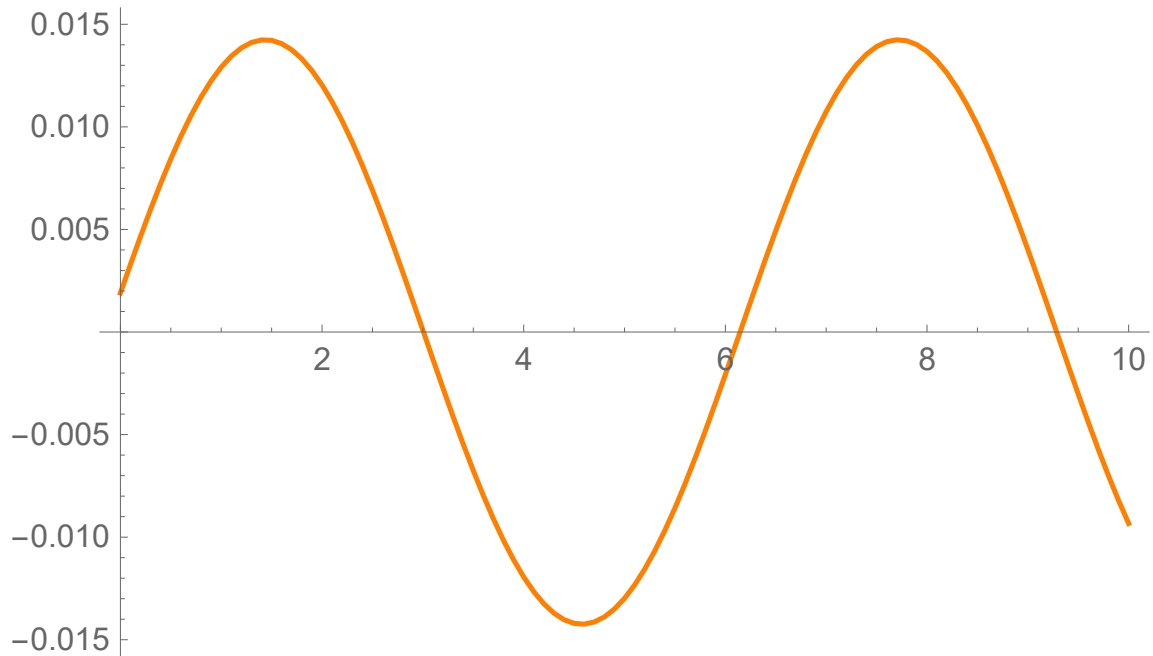


Fig. 2. Graph of the solution $u(t, x)$ of the boundary value problem (5), (6) for $x = 0.5$ and $N = 202, t = 3 \cdot 10^5, b = b^-(a), b_1 = 20, \gamma = 0.5$

Рис. 2. График решения $u(t, x)$ краевой задачи (5), (6) при $x = 0.5$ и $N = 202, t = 3 \cdot 10^5, b = b^-(a), b_1 = 20, \gamma = 0.5$

бесконечную размерность. Построена асимптотика решений и аналоги нормальных форм — квазинормальные формы, динамика которых описывает поведение решений исходной системы.

Поскольку квазинормальные формы являются уравнениями типа Гинзбурга—Ландау, можно утверждать, что их динамика может быть сложной и нерегулярной [32, 33]. Важно, что при различных сценариях стремления N к бесконечности, могут существенно меняться краевые условия, а значит, и динамика исходной системы.

Это следует из того, что в квазинормальной форме (17), (18) присутствует параметр θ , который при стремлении $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. при стремлении $N \rightarrow \infty$ может принимать различные значения. Отсюда в свою очередь следует, что динамические свойства краевой задачи (17), (18) могут меняться.

Отметим еще, что неклассические краевые условия могут усложнить динамические свойства решений [9]. Представляет интерес рассмотрение других типов связей для цепочек из уравнений (1): односторонние связи, двусторонние связи, диффузионные связи, полновязные системы и др. Важно рассмотреть и иные краевые условия (например, классические краевые условия Дирихле, Неймана, различные неклассические краевые условия).

References

- [1] J. Wu, *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*. New York: Springer New York, 1996, 432 pp. doi: [10.1007/978-1-4612-4050-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4050-1)
- [2] S. A. Kashchenko, *Dinamika modelei na osnove logisticheskogo uravneniia s zapazdyvaniem*. Moscow: KRASAND, 2021, 576 pp., in Russian.
- [3] G. V. Osipov, A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, and J. Kurths, “Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical rössler oscillators”, *Physical Review E*, vol. 55, no. 3, pp. 2353–2361, 1997. doi: [10.1103/PhysRevE.55.2353](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.55.2353)

- [4] A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press, 2001, 411 pp.
- [5] C. R. S. Williams, F. Sorrentino, T. E. Murphy, and R. Roy, “Synchronization states and multistability in a ring of periodic oscillators: Experimentally variable coupling delays”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 23, no. 4, p. 43 117, 2013. DOI: [10.1063/1.4829626](https://doi.org/10.1063/1.4829626)
- [6] V. Klinshov and V. Nekorkin, “Synchronization in networks of pulse oscillators with time-delay coupling”, *Cybernetics and Physics*, vol. 1, no. 2, pp. 106–112, 2012.
- [7] S. A. Kashchenko, “Quasnormal forms for chains of coupled logistic equations with delay”, *Mathematics*, vol. 10, no. 15, p. 2648, 2022. DOI: [10.3390/math10152648](https://doi.org/10.3390/math10152648)
- [8] S. A. Kashchenko, “Dynamics of advectively coupled van der pol equations chain”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 31, no. 3, p. 033 147, 2021. DOI: [10.1063/5.0040689](https://doi.org/10.1063/5.0040689)
- [9] S. A. Kashchenko, “Dynamics of non-periodic chains with one-sided and two-sided couplings”, *Mathematics*, vol. 13, no. 23, p. 3746, 2025. DOI: [10.3390/math13233746](https://doi.org/10.3390/math13233746)
- [10] S. A. Kashchenko, “Local dynamics of aperiodic chains with unidirectional couplings”, *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, vol. 34, no. 1, pp. 9–33, 2026. DOI: [10.18500/0869-6632-003197](https://doi.org/10.18500/0869-6632-003197)
- [11] A. P. Kuznetsov, S. P. Kuznetsov, I. R. Sataev, and L. V. Turukina, “About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators”, *Physics Letters A*, vol. 377, no. 45, pp. 3291–3295, 2013. DOI: [10.1016/j.physleta.2013.10.013](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2013.10.013)
- [12] R. Rao, Z. Lin, X. Ai, and J. Wu, “Synchronization of epidemic systems with neumann boundary value under delayed impulse”, *Mathematics*, vol. 10, no. 12, p. 2064, 2022. DOI: [10.3390/math10122064](https://doi.org/10.3390/math10122064)
- [13] V. V. Klinshov and V. I. Nekorkin, “Synchronization of delay-coupled oscillator networks”, *Physics–Uspekhi*, vol. 56, no. 12, pp. 1217–1229, 2013. DOI: [10.3367/UFNe.0183.201312c.1323](https://doi.org/10.3367/UFNe.0183.201312c.1323)
- [14] V. V. Klinshov, “Collective dynamics of networks of active units with pulse coupling: Review”, *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, vol. 28, no. 5, pp. 465–490, 2020, in Russian. DOI: [10.18500/0869-6632-2020-28-5-465-490](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-465-490)
- [15] M. Zhang, G. S. Wiederhecker, S. Manipatruni, A. Barnard, P. McEuen, and M. Lipson, “Synchronization of micromechanical oscillators using light”, *Physical Review Letters*, vol. 109, no. 23, p. 233 906, 2012. DOI: [10.1103/PhysRevLett.109.233906](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.233906)
- [16] E. V. Grigorieva, H. Haken, and S. A. Kashchenko, “Complexity near equilibrium in model of lasers with delayed optoelectronic feedback”, in *Proceedings of the 1998 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications*, Crans-Montana, Switzerland, 1998, pp. 495–498.
- [17] I. Kanter, M. Zigzag, A. Englert, F. Geissler, and W. Kinzel, “Synchronization of unidirectional time delay chaotic networks and the greatest common divisor”, *Europhysics Letters*, vol. 93, no. 6, p. 60 003, 2011. DOI: [10.1209/0295-5075/93/60003](https://doi.org/10.1209/0295-5075/93/60003)
- [18] S. Yanchuk, P. Perlikowski, O. V. Popovych, and P. A. Tass, “Variability of spatio-temporal patterns in non-homogeneous rings of spiking neurons”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 21, no. 4, p. 47 511, 2011. DOI: [10.1063/1.3665200](https://doi.org/10.1063/1.3665200)
- [19] A. S. Karavaev et al., “A model of human cardiovascular system containing a loop for the autonomic control of mean blood pressure”, *Human Physiology*, vol. 43, no. 1, pp. 61–70, 2017. DOI: [10.1134/S0362119716060098](https://doi.org/10.1134/S0362119716060098)
- [20] M. Nixon, E. Ronen, A. A. Friesem, and N. Davidson, “Observing geometric frustration with thousands of coupled lasers”, *Physical Review Letters*, vol. 110, no. 18, p. 184 102, 2013. DOI: [10.1103/PhysRevLett.110.184102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.184102)

- [21] A. Pando, S. Gadasi, E. Bernstein, N. Stroeve, A. Friesem, and N. Davidson, “Synchronization in coupled laser arrays with correlated and uncorrelated disorder”, *Physical Review Letters*, vol. 133, no. 11, p. 113 803, 2024. DOI: [10.1103/PhysRevLett.133.113803](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.133.113803)
- [22] M. Nixon, M. Fridman, E. Ronen, A. A. Friesem, N. Davidson, and I. Kanter, “Controlling synchronization in large laser networks”, *Physical Review Letters*, vol. 108, no. 21, p. 214 101, 2012. DOI: [10.1103/PhysRevLett.108.214101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.214101)
- [23] A. A. Emelianova, O. V. Maslennikov, and V. I. Nekorkin, “Disordered quenching in arrays of coupled bautin oscillators”, *Chaos*, vol. 32, no. 6, p. 063 126, 2022. DOI: [10.1063/5.0093947](https://doi.org/10.1063/5.0093947)
- [24] D. V. Kasatkin, A. A. Emelianova, and V. I. Nekorkin, “Nonlinear phenomena in kuramoto oscillatory networks with dynamic connections”, *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, vol. 29, no. 4, pp. 635–675, 2021, in Russian. DOI: [10.18500/0869-6632-2021-29-4-635-675](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-4-635-675)
- [25] J. Shena, Y. Kominis, A. Bountis, and V. Kovanis, “Spatial control of localized oscillations in arrays of coupled laser dimmers”, *Physical Review E*, vol. 102, no. 1, p. 012 201, 2020. DOI: [10.1103/PhysRevE.102.012201](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.102.012201)
- [26] M. Mehrabbeik, S. Jafari, R. Meucci, and M. Perc, “Synchronization and multistability in a network of diffusively coupled laser models”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 125, p. 107 380, 2023. DOI: [10.1016/j.cnsns.2023.107380](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107380)
- [27] V. I. Nekorkin and V. A. Makarov, “Spatial chaos in a chain of coupled bistable oscillators”, *Physical Review Letters*, vol. 74, no. 24, pp. 4819–4822, 1995. DOI: [10.1103/PhysRevLett.74.4819](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.4819)
- [28] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*. New York: Wiley, 1965, 624 pp. DOI: [10.1137/1.9780898719222](https://doi.org/10.1137/1.9780898719222)
- [29] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Heidelberg: Springer Berlin, 1981, 350 pp. DOI: [10.1007/BFb0089647](https://doi.org/10.1007/BFb0089647)
- [30] S. A. Kashchenko, “Normalization in the systems with small diffusion”, *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, vol. 6, no. 6, pp. 1093–1109, 1996. DOI: [10.1142/S021812749600059X](https://doi.org/10.1142/S021812749600059X)
- [31] D. S. Kashchenko, D. O. Loginov, and A. O. Tolbey, “Algorithm for studying the dynamics of a spatially distributed logistic equation with delay and taking into account migration”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 32, no. 3, pp. 242–251, 2025. DOI: [10.18255/1818-1015-2025-3-242-251](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2025-3-242-251)
- [32] T. S. Akhromeeva, S. P. Kurdyumov, G. G. Malinetskii, and A. A. Samarskii, *Nestacionarnye struktury i diffuzionnyj haos*. Moscow: Nauka, 1992, 544 pp., in Russian.
- [33] V. Garcia-Morales and K. Krischer, “The complex Ginzburg–Landau equation: An introduction”, *Contemporary Physics*, vol. 53, no. 2, pp. 79–95, 2012. DOI: [10.1080/00107514.2011.642554](https://doi.org/10.1080/00107514.2011.642554)