Модел. и анализ информ. систем. Т. **20**, № **2** (2013) 121–128

УДК 519.6:517.955.8

Асимптотика решения бисингулярной задачи для системы линейных параболических уравнений. II

Бутузова М.В.[1]

Московский государственный университет, 119991, г. Москва, Ленинские горы

e-mail: m.butuzova@mail.ru

получена 3 февраля 2013

Ключевые слова: сингулярные возмущения, бисингулярные задачи, асимптотические разложения

Для решения бисингулярной начально-краевой задачи для системы параболических уравнений, содержащей малый параметр ε^2 при второй производной по пространственной переменной и $\sqrt{\varepsilon}$ при первой производной, обоснована асимптотика произвольного порядка по малому параметру без использования процедуры согласования асимптотических разложений. Для обоснования асимптотики применен асимптотический метод дифференциальных неравенств. Суть его состоит в том, что при построении нижнего и верхнего решений исходной задачи используется формальная асимптотика решения (она построена в предыдущей работе). Модифицируя определенным образом последние члены (порядка $\varepsilon^{n/2}$) частичной суммы формальной асимптотики, удается построить нижнее и верхнее решения, между которыми и заключено точное решение исходной задачи.

Рассматривается задача

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sqrt{\varepsilon}\, b\,(x,t)\, \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = A(x,t)u + f\,(x,t), \tag{1}$$

$$(x,t) \in D = (0 < x < +\infty) \times (0 < t \le T),$$

$$u\,(x,0,\varepsilon) = \Phi\,(x),\ 0 \le x < +\infty, \tag{2}$$

$$u\,(0,t,\varepsilon) = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

где $u(x,t,\varepsilon)$, $f(x,t)$ и $\Phi(x)$ — m-мерные вектор-функции с элементами $u^i(x,t,\varepsilon)$, $f^i(x,t)$ и $\Phi^i(x)$ соответственно, $A(x,t)$ — $m \times m$-матрица с элементами $a_{ij}(x,t)$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр; функции $b\,(x,t)$, $a_{ij}(x,t)$, $f^i(x,t)$, $\Phi^i(x)$ – бесконечно дифференцируемые и ограниченные вместе с производными в $\overline{D}$; $b\,(x,t) > B_0 = const > 0$, $\Phi\,(0) = 0$.

[1]Работа поддержана РФФИ (проект 12-01-00387)

В статье [1] было построено асимптотическое разложение по малому параметру ε классического, ограниченного всюду в $\overline{D}$ решения $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1) – (3) в виде:

$$u(x,t,\varepsilon) = \overline{u}(x,t,\varepsilon) + \Pi(\xi,t,\varepsilon) + V(\eta,t,\varepsilon) + W(\xi,t,\varepsilon) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2}\overline{u}_k(x,t) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2}\Pi_k(\xi,t,\varepsilon) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/2}v_k(\eta,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/2}w_k(\xi,t,\varepsilon), \quad (4)$$

где $\overline{u}_k(x,t)$ — регулярные члены асимптотики; $\Pi_k(\xi,t,\varepsilon)$ — функции пограничного слоя, описывающие поведение решения в окрестности боковой границы $x = 0$ полуполосы D, $\xi = x/\sqrt{\varepsilon}$; $v_k(\eta,t)$ — функции, описывающие внутренний переходный слой в окрестности линии $\xi = \xi_0(t,\varepsilon)$, которая является характеристикой уравнений для функций Π_k, выходящей из угловой точки $(\xi,t) = (0,0)$, $\eta = [\xi - \xi_0(t,\varepsilon)]/\sqrt{\varepsilon}$; $w_k(\xi,t,\varepsilon)$ — функции, устраняющие невязки, вносимые функциями v_k в граничное условие (3).

Обозначим через $U_n(x,t,\varepsilon)$ частичную сумму n-го порядка ряда (4):

$$U_n(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^{k/2}\overline{u}_k(x,t) + \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^{k/2}\Pi_k(\xi,t,\varepsilon) + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^{k/2}v_k(\eta,t) + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^{k/2}w_k(\xi,t,\varepsilon).$$

Теорема. *Функция $U_n(x,t,\varepsilon)$ является равномерным в полуполосе $\overline{D}$ асимптотическим приближением для решения $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1) – (3) с точностью порядка $O\left((\sqrt{\varepsilon})^{n+1}\right)$, т.е. при достаточно малом ε имеет место неравенство*

$$\|u - U_n\| \le C(\sqrt{\varepsilon})^{n+1}, \ (x,t) \in \overline{D},$$

где постоянная C не зависит от ε, а под нормой вектора понимается его евклидова норма.

Доказательство. Для доказательства теоремы применим метод дифференциальных неравенств. В связи с этим введем понятия упорядоченных верхнего и нижнего решений задачи (1) – (3). С этой целью запишем векторное уравнение (1) покомпонентно:

$$M_\varepsilon^i u^i - \sum_{\substack{j=1,\\ j\ne i}}^{m} a_{ij}(x,t)u^j - f^i(x,t) = 0, \ \ i = 1,\dots,m,$$

где

$$M_\varepsilon^i u^i := \varepsilon^2\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} - \sqrt{\varepsilon}\, b(x,t)\frac{\partial u^i}{\partial x} - \frac{\partial u^i}{\partial t} - a_{ii}(x,t)u^i.$$

Определение. *Ограниченные вектор-функции $\overline{U}(x,t,\varepsilon)$ и $\underline{U}(x,t,\varepsilon)$ с компонентами $\overline{U}^i$ и $\underline{U}^i$ ($i = 1,\dots,m$) называются упорядоченными верхним и нижним решениями задачи*
(1) – (3), если для каждого $i = 1,2,\dots,\ m$ они удовлетворяют условиям:

1°. $\underline{U}^i(x,t,\varepsilon) \le \overline{U}^i(x,t,\varepsilon),\ \ (x,t) \in \overline{D}.$
2°. $M_\varepsilon^i\underline{U}^i - \sum_{\substack{j=1,\\ j\ne i}}^{m} a_{ij}(x,t)u^j - f^i(x,t) \ge 0, \quad M_\varepsilon^i\overline{U}^i - \sum_{\substack{j=1,\\ j\ne i}}^{m} a_{ij}(x,t)u^j - f^i(x,t) \le 0$ *при* $(x,t) \in D,\ \ \underline{U}^j(x,t,\varepsilon) \le u^j \le \overline{U}^j(x,t,\varepsilon),\ \ j = 1,\dots,m,\ j \ne i.$

3°. $\underline{U}^i(x,0,\varepsilon) \le \Phi^i(x) \le \overline{U}^i(x,0,\varepsilon),\ 0 \le x \le +\infty.$

4°. $\underline{U}^i(0,t,\varepsilon) \le 0 \le \overline{U}^i(0,t,\varepsilon),\ 0 \le t \le T.$

Известно (см. [2]), что если существуют упорядоченные верхнее и нижнее решения задачи (1) – (3), то решение этой задачи $u(x,t,\varepsilon)$ с компонентами $u^i(x,t,\varepsilon)$ удовлетворяет неравенствам:

$$\underline{U}^i(x,t,\varepsilon) \le u^i(x,t,\varepsilon) \le \overline{U}^i(x,t,\varepsilon),\ (x,t) \in \overline{D},\ i = 1,\dots,m.$$

Для построения верхнего и нижнего решений будем использовать частичную сумму $U_n(x,t,\varepsilon)$ ряда (4), которая в соответствии с её построением всюду в полуполосе D, за исключением кривой $x = \sqrt{\varepsilon}\,\xi_0(t,\varepsilon)$, удовлетворяет уравнению (1) с точностью до величин порядка $O(\varepsilon^{(n+1)/2})$, т.е.

$$L_\varepsilon U_n := \varepsilon^2\frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} - \sqrt{\varepsilon}\,b(x,t)\frac{\partial U_n}{\partial x} - \frac{\partial U_n}{\partial t} - A(x,t)U_n = f(x,t) + \widetilde{f}(x,t,\varepsilon),$$

где $\widetilde{f}(x,t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{(n+1)/2})$, или в покомпонентном виде

$$M^i_\varepsilon U^i_n - \sum_{\substack{j=1,\\ j\ne i}}^{m} a_{ij}(x,t)U^i_n - f^i(x,t) = \widetilde{f}^i(x,t,\varepsilon),\ i = 1,\dots,m, \tag{5}$$

где $\widetilde{f}^i(x,t,\varepsilon)$ — i-я компонента вектор-функции $\widetilde{f}(x,t,\varepsilon)$. Очевидно, что $\widetilde{f}^i(x,t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{(n+1)/2}),\ i = 1,\dots,m.$

На кривой $x = \sqrt{\varepsilon}\,\xi_0(t,\varepsilon)$ функция $U_n(x,t,\varepsilon)$ и ее производные имеют разрывы (скачки), в силу чего и функция $\widetilde{f}(x,t,\varepsilon)$ имеет разрыв на этой кривой. Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
&U_n(\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)+0,t,\varepsilon) - U_n(\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)-0,t,\varepsilon) =: \varphi_1(t,\varepsilon),\\
&\frac{\partial U_n}{\partial x}(\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)+0,t,\varepsilon) - \frac{\partial U_n}{\partial x}(\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)-0,t,\varepsilon) =: \varphi_2(t,\varepsilon),\ i = 1,\dots,m.
\end{aligned}$$

Из структуры функций U_n следует, что для вектор-функций φ_1 и φ_2 имеют место равенства:

$$\varphi_1(t,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{(n+1)/2}\right),\ \varphi_1'(t,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{(n+1)/2}\right),\ \varphi_2(t,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{(n-1)/2}\right).$$

Подправим частичную сумму U_n таким образом, чтобы новая вектор-функция $\widetilde{U}_n$ была непрерывна всюду в D вместе с первой производной по t и производными по x до второго порядка включительно и, кроме того, ее компоненты $\widetilde{U}^i_n$ удовлетворяли соотношениям (5) всюду в полуполосе D. Функцию $\widetilde{U}_n$ определим следующим образом:

$$\widetilde{U}_n(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} U_n(x,t,\varepsilon),\ 0 \le x \le \sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon),\\ U_n(x,t,\varepsilon) + z(\eta,t)v_\delta(x - \sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)),\ \sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon) \le x < +\infty,\end{cases}$$

где

$$z(\eta,t) = \sum_{j=0}^{2} a_j(t)\eta^j\exp(-\eta),\quad \eta = \frac{x - \sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)}{\varepsilon},$$

$a_j(t)$ — пока неизвестные вектор-функции с компонентами a_j^i $(i = 1, \ldots, m)$, которые будут также зависеть от ε, но для краткости записи эту зависимость опускаем; v_δ — срезающая функция, а именно, $v_\delta(y) = 1$ при $0 \le y \le \delta/2$; $0 < v_\delta(y) < 1$ при $\delta/2 < y < \delta$; $v_\delta(y) = 0$ при $y \ge \delta$. Покажем, что можно выбрать функции $a_i(t)$ так, что они будут величинами порядка $O(\varepsilon^{(n+1)/2})$, а функция $\widetilde{U}_n$ будет непрерывна вместе с первой производной по t и производными по x до второго порядка включительно на кривой $x = \sqrt{\varepsilon}\xi_0(t, \varepsilon)$.

Заметим, что в правой $\delta/2$-полуокрестности кривой $x = \sqrt{\varepsilon}\xi_0(t, \varepsilon)$ имеет место равенство $\widetilde{U}_n = U_n + z(\eta, t)$. Поэтому, выбрав $a_0(t)$ и $a_1(t)$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\varphi_1(t, \varepsilon) + a_0(t) = 0, \quad \varphi_2(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\Big[a_1(t) - a_0(t)\Big] = 0, \tag{6}$$

мы сделаем функцию $\widetilde{U}_n$ непрерывной на кривой $x = \sqrt{\varepsilon}\xi_0(t, \varepsilon)$ вместе с первой производной по x. Из равенств (6) получаем:

$$\begin{aligned}&a_0(t) = -\varphi_1(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{(n+1)/2}), \quad a_1(t) = a_0(t) - \varepsilon\varphi_2(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{(n+1)/2}),\\ &a_0'(t) = O(\varepsilon^{(n+1)/2}).\end{aligned}$$

Итак, функции $a_0(t)$ и $a_1(t)$ выбраны так, что функции $\widetilde{U}_n$ и $\dfrac{\partial \widetilde{U}_n}{\partial x}$ непрерывны на кривой $x = \sqrt{\varepsilon}\xi_0(t, \varepsilon)$, т.е. скачки этих функций на кривой $x = \sqrt{\varepsilon}\xi_0(t, \varepsilon)$ равны нулю (скачок функции $\widetilde{U}_n$ обозначаем так: $[U_n]_{x=\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)}$):

$$\Big[\widetilde{U}_n\Big]_{x=\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)} = 0, \tag{7}$$

$$\left[\frac{\partial \widetilde{U}_n}{\partial x}\right]_{x=\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)} = 0. \tag{8}$$

Дифференцируя равенство (7) по t получаем:

$$\left[\frac{\partial \widetilde{U}_n}{\partial t}\right]_{x=\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)} + \sqrt{\varepsilon}\,\frac{d\xi_0}{dt}\left[\frac{\partial \widetilde{U}_n}{\partial x}\right]_{x=\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)} = 0.$$

Отсюда в силу (8) следует, что

$$\left[\frac{\partial \widetilde{U}_n}{\partial t}\right]_{x=\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)} = 0,$$

т.е. на кривой $x = \sqrt{\varepsilon}\xi_0(t, \varepsilon)$ функция $\widetilde{U}_n$ непрерывна вместе со своими первыми производными по x и по t.

Подействуем на функцию $\widetilde{U}_n$ оператором L_ε. Тогда получим:

$$L_\varepsilon \widetilde{U}_n = \begin{cases} f(x,t) + \widetilde{f}(x,t,\varepsilon), \ 0 \le x \le \sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon), \\ f(x,t) + \widetilde{f}(x,t,\varepsilon) + L_\varepsilon z, \ \sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon) \le x \le \sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon) + \delta/2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\left[L_\varepsilon \widetilde{U}_n\right]_{x=\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)} = \left[\widetilde{f}\right]_{x=\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)} + L_\varepsilon z\Big|_{\eta=0}.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}
&\left[\widetilde{f}\right]_{x=\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)} = O(\varepsilon^{(n+1)/2}),\\
&L_\varepsilon z\Big|_{\eta=0} = 2a_2(t) - 2a_1(t) + a_0(t) - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\xi_0^2(t,\varepsilon) b_{xx}(\sqrt{\varepsilon}\theta\xi_0(t,\varepsilon),t)\Big[a_1(t) - a_0(t)\Big] -\\
&\qquad -A\Big(\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon),t\Big)a_0(t) - a_0'(t) \equiv 2a_2(t) + \widehat{f}(t,\varepsilon), \quad 0<\theta<1,
\end{aligned}$$

причем $\widehat{f}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{(n+1)/2})$, получаем:

$$\left[L_\varepsilon \widetilde{U}_n\right]_{x=\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)} = 2a_2(t) + \left[\widetilde{f}\right]_{x=\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)} + \widehat{f}(t,\varepsilon) \equiv 2a_2(t) + \varphi(t,\varepsilon),$$

где $\varphi(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{(n+1)/2})$ — известная вектор-функция.

С другой стороны,

$$\left[L_\varepsilon \widetilde{U}_n\right]_{x=\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)} = \varepsilon^2 \left[\frac{\partial^2 \widetilde{U}_n}{\partial x^2}\right]_{x=\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)}.$$

Положим

$$a_2(t) = -\frac{1}{2}\,\varphi(t,\varepsilon).$$

Тогда скачок $\partial^2 \widetilde{U}_n/\partial x^2$ на кривой $x = \sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)$ станет равным нулю. Таким образом, построенная вектор-функция $\widetilde{U}_n$ непрерывна всюду в полуполосе D вместе с первой производной по t и производными по x до второго порядка включительно. Кроме того, $\widetilde{U}_n$ удовлетворяет всюду в D соотношению

$$L_\varepsilon \widetilde{U}_n = f(x,t) + F_n(x,t,\varepsilon)$$

или в покомпонентном виде

$$M_\varepsilon^i \widetilde{U}_n^i - \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{m} a_{ij}(x,t)\widetilde{U}_n^j - f^i(x,t) = F_n^i(x,t,\varepsilon), \tag{9}$$

где $F_n(x,t,\varepsilon)$ — непрерывная вектор-функция с компонентами $F_n^i(x,t,\varepsilon)$ и

$$|F_n(x,t,\varepsilon)| \le A_1 \varepsilon^{(n+1)/2}, \tag{10}$$

A_1 — положительная постоянная.

Кроме того, несложно проверить, что для компонент вектор-функции $\widetilde{U}_n$ при достаточно малых ε имеют место неравенства:

$$\left|\widetilde{U}_n^i(0,t,\varepsilon)\right| = \left|U_n^i(0,t,\varepsilon)\right| \le A_2\,\varepsilon^{(n+1)/2}, \tag{11}$$

$$\left|\widetilde{U}_n^i(x,0,\varepsilon) - \Phi(x)\right| = \left|z^i(\eta,0)v_\delta(x)\right| \le A_3\,\varepsilon^{(n+1)/2}, \tag{12}$$

где $A_2,\ A_3$ — положительные постоянные.

Введем вектор-функции $\overline{U}(x,t,\varepsilon)$ и $\underline{U}(x,t,\varepsilon)$ с компонентами

$$\overline{U}^i(x,t,\varepsilon) = \widetilde{U}_n^i(x,t,\varepsilon) + A\,\varepsilon^{(n+1)/2}\exp(kt), \tag{13}$$

$$\underline{U}^i(x,t,\varepsilon) = \widetilde{U}_n^i(x,t,\varepsilon) - A\,\varepsilon^{(n+1)/2}\exp(kt),\ i=1,\ldots,m, \tag{14}$$

где A и k — пока произвольные положительные постоянные, которые будут определены так, чтобы выполнялись условия 1° – 4° из определения упорядоченных верхнего и нижнего решений задачи (1) – (3).

Очевидно, что при любых положительных A и k функции $\overline{U}^i$ и $\underline{U}^i$ удовлетворяют условию 1°, а если взять A столь большим, что $A > A_2$ и $A > A_3$, где A_2 и A_3 — постоянные из оценок (11) и (12), то будут выполнены также условия 3° и 4°.

Покажем, что при достаточно большом k будет выполнено условие 2°. Рассмотрим для каждого i от 1 до m выражения вида

$$M_\varepsilon^i\overline{U}^i - \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^m a_{ij}(x,t)u^j - f^i(x,t)$$

при $(x,t)\in D,\ \underline{U}^j(x,t,\varepsilon) \le u^j \le \overline{U}^j(x,t,\varepsilon),\ j=1,\ldots,m,\ j\neq i$. Учитывая равенство (9), получаем:

$$M_\varepsilon^i\overline{U}^i - \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^m a_{ij}(x,t)u^j - f^i(x,t) = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^m a_{ij}(x,t)\left[\widetilde{U}_n^j - u^j\right] -$$

$$-a_{ii}(x,t)A\,\varepsilon^{(n+1)/2}\exp(kt) - A\,k\,\varepsilon^{(n+1)/2}\exp(kt) + F_n^i(x,t,\varepsilon). \tag{15}$$

По условию задачи функции $a_{ij}(x,t)$ являются ограниченными в $\overline{D}$. Пусть A_4 — константа, ограничивающая функции a_{ij}, т.е.

$$\max_{1\le i,j\le m}\ \sup_{\overline{D}}|a_{ij}(x,t)| \le A_4.$$

Тогда из (15) с учетом оценки (10) и неравенства $|\widetilde{U}_n^j - u^j| \le A\,\varepsilon^{(n+1)/2}\exp(kt)$ имеем:

$$M_\varepsilon^i\overline{U}^i - \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^m a_{ij}(x,t)u^j - f^i(x,t) \le$$

$$\le \Big[m\,A_4A - A\,k + A_1\exp(-kt)\Big]\varepsilon^{(n+1)/2}\exp(kt) \tag{16}$$

при $(x,t)\in D,\ \underline{U}^j(x,t,\varepsilon) \le u^j \le \overline{U}^j(x,t,\varepsilon),\ j=1,\ldots,\ m,\ j\neq i.$

Возьмем в качестве k число, удовлетворяющее неравенству

$$A\ (k - m\,A_4)\ >\ A_1,$$

где A_1 — постоянная из неравенства (10). Тогда из (16) получим:

$$M_\varepsilon^i\overline{U}^i - \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^m a_{ij}(x,t)u^j - f^i(x,t) \le$$

$$\le \Big[A_1 - A\,(k - m\,A_4)\Big]\varepsilon^{(n+1)/2}\exp(kt) < 0$$

при $(x,t) \in D,\ \underline{U}^j(x,t,\varepsilon) \le u^j \le \overline{U}^j(x,t,\varepsilon),\ j = 1, \dots,\ m,\ j \ne i.$

Аналогично доказывается, что функции $\underline{U}^i$ $(i = 1, \dots, m)$ удовлетворяют неравенствам

$$M_\varepsilon^i \underline{U}^i - \sum_{\substack{j=1,\\ j\ne i}}^{m} a_{ij}(x,t)u^j - f^i(x,t) \,>\, 0$$

при $(x,t) \in D,\ \ \underline{U}^j(x,t,\varepsilon) \le u^j \le \overline{U}^j(x,t,\varepsilon),\ \ j = 1, \dots,\ j \ne i.$

Таким образом, вектор-функции $\overline{U}(x,t,\varepsilon)$ и $\underline{U}(x,t,\varepsilon)$ с компонентами $\overline{U}^i$ и $\underline{U}^i$, заданными формулами (9) и (10), являются упорядоченными верхним и нижним решениями задачи (1) – (3). Следовательно, решение $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1) – (3) удовлетворяет неравенствам

$$\underline{U}^i(x,t,\varepsilon) \,\le\, u^i(x,t,\varepsilon) \,\le\, \overline{U}^i(x,t,\varepsilon), \quad (x,t) \in \overline{D}\ i = 1, \dots,\ m,$$

в силу которых, очевидно,

$$\|u - U_n\| \,\le\, C\varepsilon^{(n+1)/2},\ (x,t) \in \overline{D},$$

где постоянная C не зависит от ε.
Теорема доказана.

Список литературы

1. *Бутузова М.В.* Асимптотика решения бисингулярной задачи для системы линейных параболических уравнений. I // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т 20, № 1. С. 5–17 (Butuzova M. V. Asymptotics of the Solution of Bisingular Problem for a System of Linear Parabolic Equations. I // MAIS. 2013. V. 20, № 1. P. 5–17 [in Russian]).

2. *Pao C.V.* Nonlinear parabolic and elliptic equations. Plenum Press, New York and London, 1992.

Asymptotics of the Solution of the Bisingular Problem for a System of Linear Parabolic Equations. II

Butuzova M.V.

M.V. Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia

Keywords: singular perturbations, bisingular problems, asymptotic expansions

Suppose we are given a bisingular initial boundary-value problem for a system of parabolic equations that contains a small parameter ε^2 at the second derivative and $\sqrt{\varepsilon}$ at the first derivative with respect to the spatial variable. We prove an asymptotics of any order for the solution of the problem with respect to the small parameter, without using the joining of asymptotic expansions. To this end, we apply an asymptotic method of differential inequalities. The essence of the method is to use the formal asymptotics (given in the previous paper) for constructing lower and upper solutions of the problem. By modifying the last terms of order $\varepsilon^{n/2}$ in the partial sum of the formal asymptotics, we construct the lower and the upper solutions, between which the exact solution of the problem lies.

Сведения об авторе:
Бутузова Мария Валентиновна,
МГУ им. М. В. Ломоносова, физический факультет,
научный сотрудник