

УДК 517.946

Асимптотика решения бисингулярной задачи для системы линейных параболических уравнений. I

Бутузова М. В.¹

Московский государственный университет, 119991, г. Москва, Ленинские горы

e-mail: m.butuzova@mail.ru

получена 20 ноября 2012

Ключевые слова: сингулярные возмущения, бисингулярные задачи, асимптотические разложения

Для решения бисингулярной начально-краевой задачи для системы линейных параболических уравнений построена асимптотика произвольного порядка по малому параметру без использования процедуры согласования асимптотических разложений.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sqrt{\varepsilon} b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = A(x, t)u + f(x, t), \quad (1)$$
$$(x, t) \in D = (0 < x < +\infty) \times (0 < t \leq T),$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = \Phi(x), \quad 0 \leq x < +\infty, \quad (2)$$

$$u(0, t, \varepsilon) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где $u(x, t, \varepsilon)$, $f(x, t)$ и $\Phi(x)$ — m -мерные вектор-функции с элементами $u^i(x, t, \varepsilon)$, $f^i(x, t)$ и $\Phi^i(x)$ соответственно, $A(x, t)$ — $m \times m$ -матрица с элементами $a_{ij}(x, t)$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр; функции $b(x, t)$, $a_{ij}(x, t)$, $f^i(x, t)$, $\Phi^i(x)$ — бесконечно дифференцируемые и ограниченные вместе с производными в $\bar{D}$; $b(x, t) > B_0 = \text{const} > 0$, $\Phi(0) = 0$. Данная задача является обобщением задачи, рассмотренной в [1], на случай системы уравнений.

В п. 2 построено асимптотическое разложение по малому параметру ε классического, ограниченного всюду в $\bar{D}$ решения $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1) – (3) в виде:

$$\begin{aligned} u(x, t, \varepsilon) &= \bar{u}(x, t, \varepsilon) + \Pi(\xi, t, \varepsilon) + V(\eta, t, \varepsilon) + W(\xi, t, \varepsilon) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} \bar{u}_k(x, t) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} \Pi_k(\xi, t, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/2} v_k(\eta, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/2} w_k(\xi, t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (4)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 12-01-00387)

где $\bar{u}_k(x, t)$ — регулярные члены асимптотики; $\Pi_k(\xi, t, \varepsilon)$ — функции пограничного слоя, описывающие поведение решения в окрестности боковой границы $x = 0$ полуполосы D , $\xi = x/\sqrt{\varepsilon}$; $v_k(\eta, t)$ — функции, описывающие внутренний переходный слой в окрестности линии $\xi = \xi_0(t, \varepsilon)$, которая является характеристикой уравнений для функций Π_k , выходящей из угловой точки $(\xi, t) = (0, 0)$, $\eta = [\xi - \xi_0(t, \varepsilon)]/\sqrt{\varepsilon}$; $w_k(\xi, t, \varepsilon)$ — функции, устраняющие невязки, вносимые функциями v_k в граничное условие (3). В п. 3 сформулирован основной результат.

Особенность задачи состоит в том, что функции пограничного слоя Π_k определяются из уравнений в частных производных первого порядка, вследствие чего оказываются негладкими и даже разрывными (при $k \geq 2$) на характеристике $\xi = \xi_0(t, \varepsilon)$, выходящей из угловой точки полуполосы D . Таким образом, данная задача относится к так называемым бисингулярным задачам, в которых одна особенность связана с сингулярной зависимостью решения от малого параметра, а другая — с негладкостью членов асимптотики. Для таких задач можно использовать метод согласования асимптотических разложений (см. [2]). Однако этот метод является достаточно сложным не только для обоснования построенного асимптотического разложения, но и для построения формальной асимптотики. Построение и обоснование асимптотических представлений нулевого и первого порядков можно выполнить с помощью более простой процедуры сглаживания негладких членов асимптотики (см. [3]). В данной работе предложен способ построения асимптотики произвольного порядка для решения бисингулярной задачи (1) – (3) без применения процедуры согласования. Этот способ является модификацией метода, использованного в работе [4].

2. Построение асимптотического разложения решения

1. Регулярная часть асимптотики

Задачи для регулярных членов асимптотики получаются стандартным способом — подстановкой регулярного ряда

$$\bar{u}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} \bar{u}_k(x, t)$$

в уравнение (1) и начальное условие (2).

Для $\bar{u}_0(x, t)$ имеем задачу (x входит как параметр, $0 < x < +\infty$):

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial t} = -A(x, t) \bar{u}_0 - f(x, t), \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t \leq T, \quad (5)$$

$$\bar{u}_0(x, 0) = \Phi(x). \quad (6)$$

Обозначим через $H(x, t)$ фундаментальную матрицу (зависящую от x , как от параметра) однородной системы уравнений, т.е.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -A(x, t) H(x, t),$$

причем $H(x, 0) = E$, где E — единичная матрица. Тогда решение системы (5), (6) можно записать в виде:

$$\bar{u}_0(x, t) = H(x, t)\Phi(x) - \int_0^t H(x, t)H^{-1}(x, \lambda)f(x, \lambda)d\lambda.$$

Очевидно, что $\bar{u}_0(x, t)$ — бесконечно дифференцируемая в полуполосе $\bar{D}$ функция.

Задачи для следующих членов $\bar{u}_k(x, t)$ ($k \geq 1$) регулярной части асимптотики имеют вид

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial t} = -A(x, t)\bar{u}_k + \bar{f}_k(x, t), \quad \bar{u}_k(x, 0) = 0,$$

где $\bar{f}_k(x, t) = -b(x, t)\frac{\partial \bar{u}_{k-1}}{\partial x} - \frac{\partial^2 \bar{u}_{k-4}}{\partial x^2}$, функции $\bar{u}_k$ с отрицательными индексами считаются равными нулю. Функцию $\bar{u}_k(x, t)$ можно записать в виде:

$$\bar{u}_k(x, t) = - \int_0^t H(x, t)H^{-1}(x, \lambda)\bar{f}_k(x, \lambda)d\lambda.$$

Очевидно, что функции $\bar{u}_k(x, t)$ также бесконечно дифференцируемы в $\bar{D}$.

Построенная таким образом регулярная часть асимптотики $\bar{u}(x, t, \varepsilon)$ удовлетворяет формально уравнению (1), начальному условию (2), но не удовлетворяет, вообще говоря, граничному условию (3).

2. Функции пограничного слоя

Чтобы устранить невязку, внесенную в граничное условие функциями $\bar{u}_k$, строим погранслойную часть асимптотики ($\xi = x/\sqrt{\varepsilon}$)

$$\Pi(\xi, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} \Pi_k(\xi, t, \varepsilon). \quad (7)$$

Задача для ряда (7) имеет вид:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \xi^2} - b(\sqrt{\varepsilon}\xi, t) \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Pi}{\partial t} = A(\sqrt{\varepsilon}\xi, t)\Pi, \quad 0 < \xi < +\infty, \quad 0 < t \leq T, \quad (8)$$

$$\Pi(\xi, 0, \varepsilon) = 0, \quad \Pi(0, t, \varepsilon) = -\bar{u}(0, t, \varepsilon). \quad (9)$$

Разложим коэффициент $b(\sqrt{\varepsilon}\xi, t)$ и элементы матрицы $A(\sqrt{\varepsilon}\xi, t)$ в ряды Тейлора с центром разложения в точке $(0, t)$, оставим в левой части уравнения (8) члены

$$L_\pi \Pi := -[b_0(t) + \sqrt{\varepsilon}b_1(t)\xi] \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} - A_0(t)\Pi - \frac{\partial \Pi}{\partial t}$$

и перепишем его в виде:

$$L_\pi \Pi = [\varepsilon b_2(t)\xi^2 + \varepsilon^{3/2}b_3(t)\xi^3 + \dots] \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} + [\sqrt{\varepsilon}A_1(t)\xi + \varepsilon A_2(t)\xi^2 + \dots]\Pi - \varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \xi^2}, \quad (10)$$

где

$$b_k(t) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k b}{\partial x^k}(0, t), \quad A_k(t) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k A}{\partial x^k}(0, t), \quad k = 0, 1, \dots$$

Подставляя в уравнение (10) и условия (9) ряд (7), получаем задачи для нахождения функций $\Pi_k(\xi, t, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} L_\pi \Pi_k &= \pi_k(\xi, t, \varepsilon), \quad 0 < \xi < +\infty, \quad 0 < t \leq T, \\ \Pi_k(\xi, 0, \varepsilon) &= 0, \quad \Pi_k(0, t, \varepsilon) = -\bar{u}_k(0, t), \end{aligned}$$

где $\pi_k(\xi, t, \varepsilon)$ выражаются рекуррентно через Π_i с номерами $i < k$ и их производные, в частности $\pi_0(\xi, t, \varepsilon) \equiv 0$.

Заметим, что в оператор L_π включен член $\sqrt{\varepsilon}b_1(t)\xi(\partial/\partial\xi)$. Такая структура оператора L_π будет важна для построения функций внутреннего переходного слоя $v_k(\eta, t)$. Это не усложняет по существу процедуру построения функций Π_k , но дает возможность существенно упростить оператор L_v (см. ниже формулу (18)), с помощью которого строятся функции внутреннего переходного слоя $v_k(\eta, t)$.

Обозначим $H(0, t)$ через $H_0(t)$. Матрица $H_0(t)$ удовлетворяет уравнению $\partial H_0/\partial t = -A_0(t)H_0$. Делая замену переменных

$$\Pi_k(\xi, t, \varepsilon) = H_0(t)\tilde{\Pi}_k(\xi, t, \varepsilon),$$

приходим к задачам для функций $\tilde{\Pi}_k(\xi, t, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\pi \tilde{\Pi}_k &:= -[b_0(t) + \sqrt{\varepsilon}\xi b_1(t)]\frac{\partial \tilde{\Pi}_k}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{\Pi}_k}{\partial t} = H_0^{-1}(t)\pi_k(\xi, t, \varepsilon), \\ \tilde{\Pi}_k(\xi, 0, \varepsilon) &= 0, \quad \tilde{\Pi}_k(0, t, \varepsilon) = -H_0^{-1}(t)\bar{u}_k(0, t). \end{aligned}$$

Очевидно, что система уравнений для вектор-функции $\tilde{\Pi}_k$ распадается (в отличие от системы для Π_k) на m отдельных уравнений для ее компонент $\tilde{\Pi}_k^i$ ($1 \leq i \leq m$). Задача для $\tilde{\Pi}_k^i$ имеет вид,

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\pi \tilde{\Pi}_k^i &= \tilde{\pi}_k^i(\xi, t, \varepsilon), \quad 0 < \xi < +\infty, \quad 0 < t \leq T, \\ \tilde{\Pi}_k^i(\xi, 0, \varepsilon) &= 0, \quad \tilde{\Pi}_k^i(0, t, \varepsilon) = p_k^i(t), \end{aligned} \tag{11}$$

где $p_k^i(t)$ — i -я компонента вектор-функции $-H_0^{-1}(t)\bar{u}_k(0, t)$.

Характеристики уравнения (11) определяются уравнением

$$\frac{d\xi}{dt} = b_0(t) + \sqrt{\varepsilon}b_1(t)\xi,$$

откуда для характеристик, выходящих из точек $(\xi = 0, t = t_0)$ оси t , получается выражение

$$\xi = \xi(t, t_0, \varepsilon) := \int_{t_0}^t b_0(s) \exp\left(\sqrt{\varepsilon} \int_s^t b_1(\sigma) d\sigma\right) ds.$$

Угловая характеристика, соответствующая $t_0 = 0$ (будем обозначать её $\xi = \xi_0(t, \varepsilon)$), разбивает полуполосу $\bar{D}_\xi = (0 \leq \xi < +\infty) \times (0 \leq t \leq T)$ на две части $\bar{D}_1 = (0 \leq \xi \leq \xi_0(t, \varepsilon)) \times (0 \leq t \leq T)$ и $\bar{D}_2 = (\xi_0(t, \varepsilon) \leq \xi < +\infty) \times (0 \leq t \leq T)$. В D_2 все функции $\tilde{\Pi}_k^i$ тождественно равны нулю в силу нулевого начального условия $\tilde{\Pi}_k^i(\xi, 0, \varepsilon) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. В D_1 функции $\tilde{\Pi}_k^i(\xi, t, \varepsilon)$ на характеристике $\xi = \xi(t, t_0, \varepsilon)$ можно представить в виде

$$\tilde{\Pi}_k^i(\xi(t, t_0, \varepsilon), t, \varepsilon) = p_k^i(t_0) - \int_{t_0}^t \tilde{\pi}_k^i(\xi(s, t_0, \varepsilon), s, \varepsilon) ds.$$

Производные $\frac{\partial \tilde{\Pi}_k^i}{\partial \xi}$ при $k \geq 0$ и сами функции $\tilde{\Pi}_k^i$ при $k \geq 2$ имеют на угловой характеристике скачки, которые несложно вычислить, используя явные выражения для этих функций.

Таким образом, построенная сумма $\bar{u} + \Pi$ удовлетворяет формально исходному уравнению (1) всюду в D , за исключением точек угловой характеристики, а также начальному и граничному условиям (2) и (3). При этом погранслоная составляющая построенного разложения является разрывной на угловой характеристике $\xi = \xi_0(t, \varepsilon)$. В то же время решение $u(x, t, \varepsilon)$ исходной задачи (1) – (3) является сколь угодно гладким во всей области D , и, следовательно, сумма $\bar{u} + \Pi$ не может представлять собой асимптотическое разложение решения $u(x, t, \varepsilon)$ во всей области $\bar{D}$.

3. Функции внутреннего переходного слоя

Чтобы устранить скачки функций Π_k и их производных $\partial \Pi_k / \partial \xi$ на угловой характеристике, строим функции внутреннего переходного слоя $v_k(\eta, t, \varepsilon)$, $\eta = [\xi - \xi_0(t, \varepsilon)] / \sqrt{\varepsilon}$.

С этой целью представим скачки функций Π_k и $\partial \Pi_k / \partial \xi$ в виде рядов по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ и подставим эти ряды в разложения (скачок функции Π_k обозначим $[\Pi_k]_{\xi=\xi_0(t, \varepsilon)}$)

$$\begin{aligned} [\Pi]_{\xi=\xi_0(t, \varepsilon)} &= \varepsilon [\Pi_2]_{\xi=\xi_0(t, \varepsilon)} + \varepsilon^{3/2} [\Pi_3]_{\xi=\xi_0(t, \varepsilon)} + \dots, \\ \left[\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} \right]_{\xi=\xi_0(t, \varepsilon)} &= \left[\frac{\partial \Pi_0}{\partial \xi} \right]_{\xi=\xi_0(t, \varepsilon)} + \sqrt{\varepsilon} \left[\frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi} \right]_{\xi=\xi_0(t, \varepsilon)} + \dots \end{aligned}$$

Сгруппировав слагаемые при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$, приходим к равенствам:

$$[\Pi]_{\xi=\xi_0(t, \varepsilon)} = \varepsilon \alpha_2(t) + \varepsilon^{3/2} \alpha_3(t) + \dots, \quad (12)$$

$$\left[\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} \right]_{\xi=\xi_0(t, \varepsilon)} = \beta_0(t) + \sqrt{\varepsilon} \beta_1(t) + \dots, \quad (13)$$

где функции $\alpha_k(t)$ и $\beta_k(t)$ выражаются через известные функции $b(x, t)$, $A(x, t)$, $\bar{u}_i(x, t)$ ($i \leq k$) и их производные, например, $\beta_0(t) = H_0(t) f(0, 0) b_0^{-1}(0)$.

Задача для ряда

$$V(\eta, t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/2} v_k(\eta, t)$$

имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} - \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} b(\sqrt{\varepsilon} \xi_0(t, \varepsilon) + \varepsilon \eta, t) - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} b_0(t) - b_1(t) \xi_0(t, \varepsilon) \right] \frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial t} = \\ = A(\sqrt{\varepsilon} \xi_0(t, \varepsilon) + \varepsilon \eta, t) V. \end{aligned} \quad (14)$$

$$[V(\eta, t, \varepsilon)]_{\eta=0} = -[\Pi(\xi, t, \varepsilon)]_{\xi=\xi_0(t, \varepsilon)}, \quad (15)$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} = -\sqrt{\varepsilon} \left[\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} \right]_{\xi=\xi_0(t, \varepsilon)}, \quad (16)$$

$$V(\eta, 0, \varepsilon) = 0. \quad (17)$$

Разложим коэффициент b и элементы матрицы A в ряды Тейлора с центром разложения в точке $(0, t)$, оставим в левой части уравнения (14) члены

$$L_v V := \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} - A_0(t)V - \frac{\partial V}{\partial t} \quad (18)$$

и перепишем его в виде:

$$\begin{aligned} L_v V = & \left\{ \sqrt{\varepsilon} [b_1(t)\eta + b_2(t)\xi_0^2(t, \varepsilon)] + \varepsilon [2b_2(t)\eta \xi_0(t, \varepsilon) + b_3(t)\xi_0^3(t, \varepsilon)] + \dots \right\} \frac{\partial V}{\partial \eta} + \\ & + \left\{ \sqrt{\varepsilon} \xi_0(t, \varepsilon) A_1(t) + \varepsilon [\eta A_1(t) + \xi_0^2(t, \varepsilon) A_2(t)] + \dots \right\} V. \end{aligned} \quad (19)$$

Заметим, что в уравнении (19) коэффициент при $\partial V / \partial \eta$ является величиной порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$. Это достигнуто за счет того, что в оператор L_π , с помощью которого строились функции Π_k , был включен член $\sqrt{\varepsilon} b_1(t) \xi(\partial / \partial \xi)$. Если бы это не было сделано, то коэффициент при $\partial V / \partial \eta$ в уравнении (19) был бы величиной порядка (1), и тогда оператор L_v содержал бы слагаемое $\partial / \partial \eta$ с коэффициентом, зависящим от времени. Это значительно усложнило бы процедуру построения функций v_k , поскольку их нельзя было бы найти в явном виде.

Сделаем в уравнении (19) замену переменных

$$V(\eta, t, \varepsilon) = H_0(t) \tilde{V}(\eta, t, \varepsilon). \quad (20)$$

Уравнение для ряда $\tilde{V}(\eta, t, \varepsilon)$ будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = & \left\{ \sqrt{\varepsilon} [b_1(t)\eta + b_2(t)\xi_0^2(t, \varepsilon)] + \dots \right\} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \eta} + \\ & + \left\{ \sqrt{\varepsilon} \xi_0(t, \varepsilon) H_0^{-1}(t) A_1(t) H_0(t) + \dots \right\} \tilde{V}. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставим в уравнение (21) ряд

$$\tilde{V}(\eta, t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \tilde{v}_i(\eta, t), \quad (22)$$

представим функцию $\xi_0(t, \varepsilon)$ в виде ряда по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в правой и левой частях (21). В результате получим для функций $\tilde{v}_k(\eta, t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_k}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t} = \tilde{f}_k(\eta, t), \quad k \geq 1, \quad (23)$$

где $\tilde{f}_1(\eta, t) \equiv 0$, $\tilde{f}_k(\eta, t)$ при $k \geq 2$ рекуррентно выражаются через функции $\tilde{v}_i(\eta, t)$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$) и их производные $\partial \tilde{v}_i / \partial \eta$. Например,

$$\tilde{f}_2(\eta, t) = [b_1(t)\eta + b_2(t)\xi_0^2(t, 0)] \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \eta} + \xi_0(t, 0) H_0^{-1}(t) A_1(t) H_0(t) \tilde{v}_1. \quad (24)$$

При переходе от переменных (x, t) к переменным (η, t) полуполоса $\overline{D} = (0 \leq x < +\infty) \times (0 \leq t \leq T)$ на плоскости (x, t) переходит во множество

$\overline{D}_\eta = (-\xi_0(t, \varepsilon)/\sqrt{\varepsilon} \leq \eta < +\infty) \times (0 \leq t \leq T)$ на плоскости (η, t) . Будем строить функции $v_k(\eta, t)$ в полосе $D_\eta^\infty = (-\infty < \eta < +\infty) \times (0 \leq t \leq T)$, содержащей множество $\overline{D}_\eta$.

Делая в равенствах (15) – (17) замену переменной (20), представляя $\tilde{V}$ в виде (22) и учитывая разложения (12), (13), получаем дополнительные условия для функций $\tilde{v}_k(\eta, t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_k(+0, t) - \tilde{v}_k(-0, t) &= -H_0^{-1}(t)\alpha_k(t), \quad \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial \eta}(+0, t) - \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial \eta}(-0, t) = -H_0^{-1}(t)\beta_{k-1}(t), \\ \tilde{v}_k(\eta, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Заметим, что $\alpha_1(t) \equiv 0$, $\alpha_k(0) = 0$ ($k \geq 2$), но, вообще говоря, $\beta_k(0) \neq 0$ ($k \geq 0$).

Из (23), (25) получаются задачи для функций $\tilde{v}_k$ ($k = 1, 2, \dots$), причем, как нетрудно видеть, задача для вектор-функции $\tilde{v}_k$ распадается на m отдельных задач для ее компонент $\tilde{v}_k^i$. Это дает возможность строить функции $\tilde{v}_k^i$ точно так же, как скалярные функции v_k в статье [1]. Опишем построение для $k = 1$ и $k = 2$.

Из равенств (23), (25) при $k = 1$ получаем задачи для функций $\tilde{v}_1^i(\eta, t)$. Их решения имеют вид:

$$\tilde{v}_1^i(\eta, t) = \frac{f^i(0, 0)}{2\sqrt{\pi}b_0(0)} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\lambda}} \exp\left[-\frac{\eta^2}{4(t-\lambda)}\right] d\lambda, \quad -\infty < \eta < +\infty, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Нетрудно получить следующие оценки (при $\eta \neq 0$, $0 < t \leq T$):

$$|\tilde{v}_1^i(\eta, t)| \leq C\sqrt{t} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4t}\right), \quad \left|\frac{\partial \tilde{v}_1^i}{\partial \eta}(\eta, t)\right| \leq C \exp\left(-\frac{\eta^2}{4t}\right), \quad \left|\frac{\partial \tilde{v}_1^i}{\partial t}(\eta, t)\right| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4t}\right). \quad (26)$$

Буквой C здесь и далее обозначаются положительные постоянные, не зависящие от ε (вообще говоря, разные в разных оценках). Очевидно, оценки вида (26) имеют место и для функций $v_1^i(\eta, t)$.

Задачи для функций $\tilde{v}_2^i(\eta, t)$ ($1 \leq i \leq m$) получаются из равенств (23), (25) при $k = 2$. Функцию $\tilde{v}_2^i$ представим в виде

$$\tilde{v}_2^i(\eta, t) = \tilde{\tilde{v}}_2^i(\eta, t) + \bar{v}_2^i(\eta, t),$$

где $\tilde{\tilde{v}}_2^i(\eta, t)$ — решение задачи (однородное уравнение с неоднородным условием для скачка функции и ее производной):

$$\frac{\partial^2 \tilde{\tilde{v}}_2^i}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \tilde{\tilde{v}}_2^i}{\partial t} = 0, \quad -\infty < \eta < +\infty, \quad 0 < t \leq T,$$

$$\tilde{\tilde{v}}_2^i(+0, t) - \tilde{\tilde{v}}_2^i(-0, t) = -\left(H_0^{-1}(t)\alpha_2(t)\right)^i, \quad \frac{\partial \tilde{\tilde{v}}_2^i}{\partial \eta}(+0, t) - \frac{\partial \tilde{\tilde{v}}_2^i}{\partial \eta}(-0, t) = -\left(H_0^{-1}(t)\beta_1(t)\right)^i,$$

$$\tilde{\tilde{v}}_2^i(\eta, 0) = 0,$$

$\bar{v}_2^i(\eta, t)$ — решение задачи

$$\frac{\partial^2 \bar{v}_2^i}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \bar{v}_2^i}{\partial t} = \tilde{f}_2^i(\eta, t), \quad -\infty < \eta < +\infty, \quad 0 < t \leq T,$$

$$\bar{v}_2^i(\eta, 0) = 0,$$

функция $\tilde{f}_2^i(\eta, t)$ — i -я компонента функции $\tilde{f}_2(\eta, t)$, (см.(24)).

Для функций $\tilde{v}_2^i$ имеют место оценки:

$$\begin{aligned} |\tilde{v}_2^i(\eta, t)| &\leq C\sqrt{t}Q_1(\eta) \exp\left(-\frac{\eta^2}{4t}\right), \quad \left|\frac{\partial \tilde{v}_2^i}{\partial \eta}(\eta, t)\right| \leq CQ_2(\eta) \exp\left(-\frac{\eta^2}{4t}\right), \\ \left|\frac{\partial \tilde{v}_2^i}{\partial t}(\eta, t)\right| &\leq \frac{C}{\sqrt{t}} Q_2(\eta) \exp\left(-\frac{\eta^2}{4t}\right), \end{aligned}$$

где

$$Q_j(\eta) = \sum_{i=0}^j |\eta|^i, \quad j = 1, 2, \dots \quad (27)$$

В силу равенства (20) такие же оценки имеют место и для функций $v_2^i(\eta, t)$.

Функции $v_k^i(\eta, t)$ ($1 \leq i \leq m$) с номерами $k \geq 3$ определяются так же, как функции $v_2^i(\eta, t)$, и в отношении них справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Функции $v_k^i(\eta, t)$ бесконечно дифференцируемы при $\eta \neq 0$ и для них имеют место оценки*

$$\begin{aligned} |v_k^i(\eta, t)| &\leq C\sqrt{t}Q_l(\eta) \exp\left(-\frac{\eta^2}{4t}\right), \quad \left|\frac{\partial v_k^i}{\partial \eta}(\eta, t)\right| \leq CQ_q(\eta) \exp\left(-\frac{\eta^2}{4t}\right), \\ \left|\frac{\partial v_k^i}{\partial t}(\eta, t)\right| &\leq \frac{C}{\sqrt{t}} Q_n(\eta) \exp\left(-\frac{\eta^2}{4t}\right), \end{aligned}$$

где l, q, n — некоторые натуральные числа, зависящие от k .

Доказательство леммы проводится так же, как аналогичной леммы в [1].

Итак, построенная часть асимптотики $\bar{u}(x, t, \varepsilon) + \Pi(\xi, t, \varepsilon) + V(\eta, t, \varepsilon)$ удовлетворяет формально исходному уравнению (1) всюду в D , начальному условию (2), но не удовлетворяет граничному условию (3), т.к. $v_k|_{x=0} = v_k(-\xi_0(t, \varepsilon)/\sqrt{\varepsilon}, t) \neq 0$.

4. Функции $w_k(\xi, t, \varepsilon)$

Для устранения невязок, вносимых в граничное условие функциями v_k , строим функции $w_k(\xi, t, \varepsilon)$.

Задачу для ряда

$$W(\xi, t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{\varepsilon})^k w_k(\xi, t, \varepsilon)$$

запишем в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - b\left(\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t, \varepsilon) + \varepsilon \frac{\xi - \xi_0(t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}, t\right) \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{\partial W}{\partial t} = \\ = A\left(\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t, \varepsilon) + \varepsilon \frac{\xi - \xi_0(t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}, t\right) W, \quad 0 < \xi < +\infty, \quad 0 < t \leq T, \end{aligned} \quad (28)$$

$$W(0, t, \varepsilon) = -V\left(-\frac{\xi_0(t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}, t, \varepsilon\right), \quad W(\xi, 0, \varepsilon) = 0. \quad (29)$$

Разложим коэффициент b и элементы матрицы A в ряды Тейлора с центром разложения в точке $(0, t)$, оставим в левой части уравнения (28) члены

$$L_w W \equiv \varepsilon \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - [b_0(t) + \sqrt{\varepsilon} b_1(t) \xi_0(t, \varepsilon)] \frac{\partial W}{\partial \xi} - A_0(t) W - \frac{\partial W}{\partial t}$$

и перепишем его в виде:

$$L_w W = \left\{ \varepsilon \left[b_1(t) \frac{\xi - \xi_0(t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} + b_2(t) \xi_0^2(t, \varepsilon) \right] + \varepsilon^{3/2} \left[2b_2(t) \xi_0(t, \varepsilon) \frac{\xi - \xi_0(t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} + b_3(t) \xi_0^3(t, \varepsilon) \right] + \dots \right\} \frac{\partial W}{\partial \xi} + \left\{ \sqrt{\varepsilon} \xi_0(t, \varepsilon) A_1(t) + \varepsilon \left[\frac{\xi - \xi_0(t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} A_1(t) + \xi_0^2(t, \varepsilon) A_2(t) \right] + \dots \right\} W. \quad (30)$$

Сделаем в уравнении (30) замену переменной

$$W(\xi, t, \varepsilon) = H_0(t) \widetilde{W}(\xi, t, \varepsilon). \quad (31)$$

Для $\widetilde{W}(\xi, t, \varepsilon)$ получим уравнение:

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_w \widetilde{W} &:= \varepsilon \frac{\partial^2 \widetilde{W}}{\partial \xi^2} - [b_0(t) + \sqrt{\varepsilon} b_1(t) \xi_0(t, \varepsilon)] \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \xi} - \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial t} = \\ &= \left\{ \varepsilon \left[b_1(t) \frac{\xi - \xi_0(t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} + b_2(t) \xi_0^2(t, \varepsilon) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{3/2} \left[2b_2(t) \xi_0(t, \varepsilon) \frac{\xi - \xi_0(t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} + b_3(t) \xi_0^3(t, \varepsilon) \right] + \dots \right\} \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \xi} + \\ &\quad + \left\{ \sqrt{\varepsilon} \xi_0(t, \varepsilon) H_0^{-1}(t) A_1(t) H_0(t) + \varepsilon \left[\frac{\xi - \xi_0(t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} H_0^{-1}(t) A_1(t) H_0(t) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \xi_0^2(t, \varepsilon) H_0^{-1}(t) A_2(t) H_0(t) \right] + \dots \right\} \widetilde{W}. \end{aligned} \quad (32)$$

Подставим в уравнение (32) ряд

$$\widetilde{W}(\xi, t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{\varepsilon})^k \widetilde{w}_k(\xi, t, \varepsilon). \quad (33)$$

Учитывая, что функция $\xi_0(t, \varepsilon)$ при каждом значении t есть величина порядка $O(1)$, и предполагая априори, что для значений $q > 0$ функции

$$\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \widetilde{w}_k}{\partial \xi}, \quad \left[\frac{\xi - \xi_0(t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} \right]^q \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \widetilde{w}_k}{\partial \xi}, \quad \left[\frac{\xi - \xi_0(t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} \right]^q \widetilde{w}_k$$

также являются величинами порядка $O(1)$, переписываем уравнение (32), группируя вместе слагаемые одного порядка малости по отношению к ε :

$$\begin{aligned} & \sqrt{\varepsilon} \tilde{L}_w \tilde{w}_1 + \varepsilon \tilde{L}_w \tilde{w}_2 + \dots = \\ & = \varepsilon \left\{ \left[b_1(t) \frac{\xi - \xi_0(t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} + b_2(t) \xi_0^2(t, \varepsilon) \right] \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial \xi} + \xi_0(t, \varepsilon) H_0^{-1}(t) A_1(t) H_0(t) \tilde{w}_1 \right\} + \\ & + \varepsilon^{3/2} \left\{ \left[b_1(t) \frac{\xi - \xi_0(t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} + b_2(t) \xi_0^2(t, \varepsilon) \right] \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial \xi} + \xi_0(t, \varepsilon) H_0^{-1}(t) A_1(t) H_0(t) \tilde{w}_2 + \right. \\ & + \left[2b_2(t) \xi_0(t, \varepsilon) \frac{\xi - \xi_0(t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} + b_3(t) \xi_0^3(t, \varepsilon) \right] \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial \xi} + \\ & + \left. \left[\frac{\xi - \xi_0(t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} H_0^{-1}(t) A_1(t) H_0(t) + \xi_0^2(t, \varepsilon) H_0^{-1}(t) A_2(t) H_0(t) \right] \tilde{w}_1 \right\} + \dots \equiv \\ & \equiv \varepsilon \chi_2(\xi, t, \varepsilon) + \varepsilon^{3/2} \chi_3(\xi, t, \varepsilon) + \dots \end{aligned} \quad (34)$$

Заметим, что функции $\chi_k(\xi, t, \varepsilon)$ ($k \geq 2$) при нашем априорном предположении в каждой точке полуполосы D_ξ будут величинами порядка $O(1)$.

Сделаем в равенствах (29) замены переменных (31) и (20) и представим $\tilde{W}$ в виде (33), а $\tilde{V}$ в виде (22). Тогда первое равенство из (29) примет вид:

$$\sqrt{\varepsilon} \tilde{w}_1(0, t, \varepsilon) + \varepsilon \tilde{w}_2(0, t, \varepsilon) + \dots = -\sqrt{\varepsilon} \tilde{v}_1 \left(-\frac{\xi_0(t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}, t \right) - \varepsilon \tilde{v}_2 \left(-\frac{\xi_0(t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}, t \right) - \dots, \quad (35)$$

а из второго равенства (29) получим:

$$\tilde{w}_k(\xi, 0, \varepsilon) = 0, \quad k \geq 1. \quad (36)$$

Из (34) – (36) получаются задачи для $\tilde{w}_k$ ($k = 1, 2, \dots$), причем, как нетрудно видеть, задача для вектор-функции $\tilde{w}_k$ распадается на m отдельных задач для ее компонент $\tilde{w}_k^i$. При $k = 1$ для компоненты $\tilde{w}_1^i$ ($1 \leq i \leq m$) из (34) – (36) получается задача

$$\tilde{L}_w \tilde{w}_1^i = 0, \quad \tilde{w}_1^i(0, t, \varepsilon) = -\tilde{v}_1^i(-\xi_0(t, \varepsilon)/\sqrt{\varepsilon}, t), \quad \tilde{w}_1^i(\xi, 0, \varepsilon) = 0. \quad (37)$$

Решение этой задачи не имеет явного представления, поэтому определим функцию $\tilde{w}_1^i$ иначе. Возьмем в качестве $\tilde{w}_1^i(\xi, t, \varepsilon)$ функцию

$$\tilde{w}_1^i(\xi, t, \varepsilon) = -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\pi}} \int_0^t \frac{\tilde{v}_1^i(-\xi_0(\lambda, \varepsilon)/\sqrt{\varepsilon}, \lambda)}{(t - \lambda)^{3/2}} \xi \exp \left\{ -\frac{[\xi - \xi_0(t, \varepsilon) + \xi_0(\lambda, \varepsilon)]^2}{4\varepsilon(t - \lambda)} \right\} d\lambda.$$

Нетрудно показать, что функция $\tilde{w}_1^i$ удовлетворяет начальному и граничному условиям из (37), но не удовлетворяет уравнению из (37) точно. Для невязки $\tilde{L}_w \tilde{w}_1^i$ несложно получить выражение:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_w \tilde{w}_1^i &= -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\pi}} \int_0^t \frac{\tilde{v}_1^i(-\xi_0(\lambda, \varepsilon)/\sqrt{\varepsilon}, \lambda)}{(t - \lambda)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{[\xi - \xi_0(t, \varepsilon) + \xi_0(\lambda, \varepsilon)]^2}{4\varepsilon(t - \lambda)} \right\} \times \\ & \times \frac{\xi_0(t, \varepsilon) - \xi_0(\lambda, \varepsilon) - b_0(t)(t - \lambda) - \sqrt{\varepsilon} b_1(t)(t - \lambda) \xi_0(t, \varepsilon)}{t - \lambda} d\lambda \equiv g_1^i(\xi, t, \varepsilon). \end{aligned}$$

Лемма 2. Функции $\tilde{w}_1^i(\xi, t, \varepsilon)$ и $g_1^i(\xi, t, \varepsilon)$ удовлетворяют неравенствам

$$|\tilde{w}_1^i(\xi, t, \varepsilon)| \leq C(\sqrt{t})^p Q_l \left(\frac{\xi - \xi_0(t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon t}} \right) \exp \left\{ -\frac{[\xi - \xi_0(t, \varepsilon)]^2}{4\varepsilon t} \right\}, \quad (38)$$

$$\left| \frac{\partial \tilde{w}_1^i}{\partial \xi}(\xi, t, \varepsilon) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} (\sqrt{t})^{p-1} Q_q \left(\frac{\xi - \xi_0(t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon t}} \right) \exp \left\{ -\frac{[\xi - \xi_0(t, \varepsilon)]^2}{4\varepsilon t} \right\}, \quad (39)$$

$$\left| \frac{\partial^2 \tilde{w}_1^i}{\partial \xi^2}(\xi, t, \varepsilon) \right| \leq \frac{C}{\varepsilon} (\sqrt{t})^{p-2} Q_n \left(\frac{\xi - \xi_0(t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon t}} \right) \exp \left\{ -\frac{[\xi - \xi_0(t, \varepsilon)]^2}{4\varepsilon t} \right\}, \quad (40)$$

$$|g_1^i(\xi, t, \varepsilon)| \leq C\sqrt{\varepsilon} Q_r \left(\frac{\xi - \xi_0(t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon t}} \right) \exp \left\{ -\frac{[\xi - \xi_0(t, \varepsilon)]^2}{4\varepsilon t} \right\}, \quad (41)$$

$$\left| \frac{\partial g_1^i}{\partial \xi}(\xi, t, \varepsilon) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} Q_s \left(\frac{\xi - \xi_0(t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon t}} \right) \exp \left\{ -\frac{[\xi - \xi_0(t, \varepsilon)]^2}{4\varepsilon t} \right\}, \quad (42)$$

где $p = 1, l = 1, q = 2, n = 3, r = 2, s = 3$, а функция Q_j определена равенством (27).

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3 из [1].

Итак, $g_1^i(\xi, t, \varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon})$, т.е. функция $\tilde{w}_1^i(\xi, t, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению из (37) с точностью до величин порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$. Иначе говоря, слагаемое $\sqrt{\varepsilon} \tilde{L}_w \tilde{w}_1$ в левой части уравнения (34) является величиной порядка $O(\varepsilon)$. Перенесем это слагаемое в правую часть уравнения (34) и включим в уравнение для вектор-функции $\tilde{w}_2$.

Таким образом, для компонент $\tilde{w}_2^i(\xi, t, \varepsilon)$ ($1 \leq i \leq m$) из (34) – (36) получаем задачи

$$\begin{aligned} \tilde{L}_w \tilde{w}_2^i &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} g_1^i(\xi, t, \varepsilon) + \chi_2^i(\xi, t, \varepsilon), \\ \tilde{w}_2^i(0, t, \varepsilon) &= -\tilde{v}_2^i \left(-\frac{\xi_0(t, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}, t \right), \quad \tilde{w}_2^i(\xi, 0, \varepsilon) = 0, \end{aligned} \quad (43)$$

где χ_2^i – i -я компонента функции χ_2 из равенства (34).

Функцию $\tilde{w}_2^i$ возьмем в виде:

$$\tilde{w}_2^i(\xi, t, \varepsilon) = \bar{w}_2^i(\xi, t, \varepsilon) + \tilde{\tilde{w}}_2^i(\xi, t, \varepsilon) + \hat{w}_2^i(\xi, t, \varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{w}_2^i(\xi, t, \varepsilon) &= -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\pi}} \int_0^t \frac{\tilde{v}_2^i(-\xi_0(\lambda, \varepsilon)/\sqrt{\varepsilon}, \lambda)}{(t-\lambda)^{3/2}} \xi \exp \left\{ -\frac{[\xi - \xi_0(t, \varepsilon) + \xi_0(\lambda, \varepsilon)]^2}{4\varepsilon(t-\lambda)} \right\} d\lambda, \\ \tilde{\tilde{w}}_2^i(\xi, t, \varepsilon) &= \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\lambda}{\sqrt{t-\lambda}} \int_0^{+\infty} g_1^i(s, \lambda, \varepsilon) \exp \left\{ -\frac{[\xi - \xi_0(t, \varepsilon) + \xi_0(\lambda, \varepsilon) - s]^2}{4\varepsilon(t-\lambda)} \right\} ds, \\ \hat{w}_2^i(\xi, t, \varepsilon) &= -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\pi}} \int_0^t \frac{d\lambda}{\sqrt{t-\lambda}} \int_0^{+\infty} \chi_2^i(s, \lambda, \varepsilon) \exp \left\{ -\frac{[\xi - \xi_0(t, \varepsilon) + \xi_0(\lambda, \varepsilon) - s]^2}{4\varepsilon(t-\lambda)} \right\} ds. \end{aligned}$$

Можно доказать, что

1) Функция $\bar{w}_2^i$ удовлетворяет начальным и граничным условиям (43), и для функций $\bar{w}_2^i(\xi, t, \varepsilon)$ и $g_2^i(\xi, t, \varepsilon) := \tilde{L}_w \bar{w}_2^i$ имеют место оценки типа (38) – (42) с $p = 1, l = 2, q = 3, n = 4, r = 3, s = 4$. Таким образом, $\varepsilon \tilde{L}_w \bar{w}_2^i = O(\varepsilon^{3/2})$. Этот член будет включен в правую часть уравнения для функции $\tilde{w}_3^i$.

2) Функция $\tilde{w}_2^i(\xi, t, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$L_w \tilde{w}_2^i = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} g_1^i(\xi, t, \varepsilon),$$

т.е. устраняет невязку $\tilde{L}_w \tilde{w}_1^i$, внесенную в уравнение (34) функцией $\tilde{w}_1^i$. Для функции $\tilde{w}_2^i$ справедливы оценки типа (38) – (40) с $p = 2, l = 2, q = 3, n = 4$.

3) Функция $\hat{w}_2^i$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{L}_w \hat{w}_2^i = \chi_2^i(\xi, t, \varepsilon)$$

и для нее имеют место оценки типа (38) – (40) с $p = 3, l = 3, q = 4, n = 5$.

При $\xi = 0$ функции $\tilde{w}_2^i$ и $\hat{w}_2^i$ отличны от нуля, т.е. вносят невязки в граничное условие (35). Из оценок функций $\tilde{w}_2^i$ и $\hat{w}_2^i$ следует, что эти невязки являются, соответственно, величинами порядка $O(\varepsilon^{3/2})$ и $O(\varepsilon^2)$. Мы устраним их при построении функций $\tilde{w}_3^i$ и $\tilde{w}_4^i$. Отметим также, что функции $\tilde{w}_2^i$ и $\hat{w}_2^i$ удовлетворяют нулевому начальному условию.

Таким образом, функция $\sqrt{\varepsilon} \tilde{w}_1(\xi, t, \varepsilon) + \varepsilon \tilde{w}_2(\xi, t, \varepsilon)$ удовлетворяет нулевому начальному условию, уравнению (32) с точностью до величин порядка $O(\varepsilon^{3/2})$, граничному условию (35) с точностью до величин порядка $O(\varepsilon^{3/2})$, и для функции $\tilde{w}_2(\xi, t, \varepsilon)$ (и следовательно, для функции $w_2(\xi, t, \varepsilon) = H_0(t) \tilde{w}_2(\xi, t, \varepsilon)$) имеют место оценки типа (38) – (40) при $p = 1, l = 3, q = 4, n = 5$.

Функции $\tilde{w}_k$ при $k \geq 3$ определяются аналогично $\tilde{w}_2$. Так же, как в [1], можно доказать следующее утверждение.

Лемма 3. Для функций $\bar{w}_k(\xi, t, \varepsilon)$, $\tilde{w}_k(\xi, t, \varepsilon)$, $\hat{w}_k(\xi, t, \varepsilon)$ и $g_k(\xi, t, \varepsilon) \equiv L_w \bar{w}_k$ имеют место оценки типа (38) – (40) и (41), (42) соответственно, где $p = 1$ для функций $\bar{w}_k$, $p = 2$ для функций $\tilde{w}_k$, $p = 3$ для функций $\hat{w}_k$; l, q, n, r, s – некоторые натуральные числа, зависящие от k .

3. Основной результат

Обозначим через $U_n(x, t, \varepsilon)$ частичную сумму n -го порядка построенного ряда (4).

Теорема. Функция $U_n(x, t, \varepsilon)$ является равномерным в полуполосе $\bar{D}$ асимптотическим приближением для решения $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1) – (3) с точностью порядка $O((\sqrt{\varepsilon})^{n+1})$, т.е. при достаточно малом ε имеет место неравенство

$$\|u - U_n\| \leq C(\sqrt{\varepsilon})^{n+1}, \quad (x, t) \in \bar{D},$$

где постоянная C не зависит от ε , а под нормой вектора понимается его евклидова норма.

Доказательство теоремы будет приведено в следующей статье.

Список литературы

1. *Бутузова М. В.* Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной параболической задачи с негладкими пограничными функциями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 8. С. 1176–1191. (English transl.: *Butuzova M. V.* Construction of the asymptotics of the solution of a singularly perturbed parabolic problem with nonsmooth boundary functions // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2000. 40:8. P. 1129–1144.)
2. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 334 с. (English transl.: *Ilin A. M.* Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems (Translations of Mathematical Monographs. Volume 102). American Mathematical Society, 1992.)
3. *Бутузов В. Ф., Нестеров А. В.* Об асимптотике решения уравнения параболического типа с малыми параметрами при старших производных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1982. Т. 22. № 4. С. 865–870. (English transl.: *Butuzov V. F., Nesterov A. V.* On the asymptotic behaviour of the solution of a parabolic equation with small parameters in the highest derivatives // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1982. V. 22. No 4. P. 100 – 105.)
4. *Булычева О. Н., Сушко В. Г.* Построение приближенного решения для одной сингулярно возмущенной параболической задачи с негладким вырождением // Фундаментальная и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 4. С. 881–905. (*Bulychëva O. N. and Sushko V. G.* Construction of the approximative solution for a singularly perturbed parabolic problem with nonsmooth degeneration // Fundam. Prikl. Mat. 1995. V. 1. No 4. P. 881–905.)

Asymptotics of the Solution of Bisingular Problem for a System of Linear Parabolic Equations. I

Butuzova M. V.

M. V. Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia

Keywords: singular perturbations, bisingular problems, asymptotic expansions

Given a bisingular parabolic problem for a system of linear parabolic equations, we construct an asymptotics for the solution of any order with respect to a small parameter, without using the joining procedure for asymptotic expansions.

Сведения об авторе: Бутузова Мария Валентиновна,
МГУ им. М. В. Ломоносова, физический факультет,
научный сотрудник