Модел. и анализ информ. систем. Т. **20**, № **1** (2013) 18–29

УДК 517.9

Квазинормальные формы для уравнений Лэнга–Кобаяши с большим коэффициентом управления

Григорьева Е. В., Кащенко И. С., Кащенко С. А.[1]

Белорусский государственный экономический университет,
220070 Республика Беларусь, Минск, Партизанский проспект, 26
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: grigorieva@tut.by, iliyask@uniyar.ac.ru, kasch@uniyar.ac.ru

получена 25 января 2013

Ключевые слова: уравнение Лэнга–Кобаяши, большое управление, квазинормальная форма

Исследуется модель одномодового полупроводникового лазера с оптической обратной связью, основанная на уравнениях с запаздывающим аргументом (модель Лэнга–Кобаяши). Методами локального анализа построены континуальные семейства квазинормальных форм в окрестности бифуркационных значений параметров. Обсуждается возможность сосуществования большого числа установившихся осциллирующих режимов.

1. Введение

Полупроводниковые лазеры под действием внешней оптической обратной связи (ОС) часто обнаруживают сложную динамику, которая ассоциируется с возникновением хаотического аттрактора. Оптическая ОС может быть специально организована с помощью внешнего резонатора или может возникнуть самопроизвольно, например, при отражении излучения от торца оптического волокна. Поэтому для разработки эффективных методов контроля и стабилизации излучения необходимо глубокое понимание динамических явлений в таких лазерах.

Задача о динамике лазера с оптической ОС интересна также с точки зрения изучения универсальных аспектов неустойчивостей, индуцированных запаздыванием. В этой системе были обнаружены различные сценарии перехода к хаосу, включая квазипериодический [1, 2], каскад бифуркаций удвоения периода [3], сценарий Икеда

[1]Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 14.B37.21.0457), гранта РФФИ (соглашение №12-01-31128\12) и гранта Президента Российской Федерации (договор №14.124.13.5948-МК).

[4], кризис аттракторов [5]. Отмечалось, что такое сложное поведение связано прежде всего с бесконечным числом степеней свободы, доступных для систем с задержкой, а кроме того, с достаточно сильным нелинейным взаимодействием амплитуды и фазы электрического поля в полупроводниковых лазерах, которое обусловлено изменением показателя преломления при отклонении концентрации носителей от порогового значения.

Из экспериментов известно, что при очень малом коэффициенте ОС наблюдается генерация с постоянной частотой, близкой к частоте генерации лазера без ОС, а при усилении ОС происходит резкое уширение спектра генерации — "когерентный коллапс", — что и является проблемой на пути применения этих лазеров. В зависимости от величины накачки выделяются два основных сценария перехода к хаосу:

1) при накачке значительно выше пороговой в спектре сначала появляются пики на релаксационной частоте — возникают периодические пульсации интенсивности излучения, затем развивается неустойчивость с частотой порядка межмодовых колебаний внешнего резонатора — образуется двумерный тор, который разрушается с образованием хаотического аттрактора [6, 7];

2) вблизи порога генерации развитому хаосу предшествуют низкочастотные флуктуации интенсивности с характерным периодом более десяти времен обхода по внешнему резонатору. Природа этих флуктуаций до сих пор не вполне ясна [8]. Численное исследование [5] показало, что этот режим представляет собой хаотическое блуждание между руинами аттракторов (мод составного резонатора) с выделенным направлением от моды, ближайшей к моде уединенного лазера, к моде с максимальной интенсивностью, после чего система скачком возвращается в окрестность моды уединенного лазера. При дальнейшем увеличении накачки выделенное направление исчезает и система переходит в режим когерентного коллапса.

Теоретические результаты о предельном цикле во втором сценарии представлены в работе [9], где на основе построенных нормальных форм получены амплитуда и частота осцилляций вблизи точки, соответствующей минимальному буфуркационному коэффициенту обратной связи. Для лазеров класса B с некогерентной запаздывающей ОС характер бифуркации Хопфа меняется с суперкритической на субкритическую вдоль границы устойчивости неограниченное число раз. При этом возможно не только мягкое рождение цикла, но и жесткий переход к нелокальным пульсациям (периодическим или хаотическим), а также образование 2- и 3-мерных торов вблизи границы потери устойчивости.

Бифуркационный анализ устойчивости отдельных мод внешнего резонатора выполнялся и в других работах, в частности, в [10] показано, что по крайней мере одна мода (с максимальной интенсивностью) всегда остается устойчивой, однако на практике это состояние достигается редко. Отметим также работу [11] о бифуркациях коразмерности три, приводящих к сложной динамике в окрестности отдельной моды. Другой тип решений, соответствующий режиму биений двух мод внешнего резонатора, описан аналитически в работе [12, 13].

Таким образом, ранее сложная динамика аналитически изучалась в локальной окрестности выделенных мод. Режимы, образованные большим числом неустойчивых мод внешнего резонатора, исследовались в основном численно. В этой работе мы представляем асимптотический анализ системы в случае большого коэффициента управления, что предполагает неустойчивость множества мод. Целью работы является вывод квазинормальных форм для медленной огибающей электрического поля и обсуждения свойств возможных решений.

2. Модель

Рассматривается система уравнений Лэнга–Кобаяши [14] для комплексной амплитуды электрического поля $E(t)$ и инверсии носителей $y(t)$:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}v(1+i\alpha)(y-1)E + \gamma_0 e^{i\varphi_0}E(t-T), \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = q - y - y \mid E \mid^2, \tag{2}$$

где

t — текущее время, нормированное на время релаксации инверсии населенностей;

v — скорость затухания фотонов в резонаторе, нормированная на скорость релаксации инверсии населенностей;

q — скорость накачки (пропорциональна току накачки);

α — коэффициент уширения линии, ответственный за нелинейное взаимодействие между амплитудой и фазой поля, обычно $\alpha \sim 6$, но специальным образом может быть уменьшено до нуля;

T — время прохода по внешнему резонатору, нормированное на время релаксации инверсии населенностей;

$\varphi_0 = T\omega_0$, ω_0 — частота генерации уединенного лазера (без внешней обратной связи);

γ_0 — коэффициент обратной связи, пропорциональный коэффициенту отражения излучения от внешнего зеркала.

Типичные значения времени затухания фотонов в резонаторе полупроводниковых лазеров составляют 1–2 пикосекунды, а время релаксации инверсии носителей — 1–2 наносекунды, поэтому $v \sim 10^3$ является большим параметром. При изменении длины внешнего резонатора от 30 до 300 см нормированное время задержки τ изменяется от 1 до 10.

Введем обозначения

$$w = \frac{1}{2}v(1+i\alpha), \quad c = \frac{2\gamma_0}{v(1+\alpha^2)^{1/2}}, \quad \gamma = \frac{1}{2}cv, \quad e^{i\varphi} = \frac{1-i\alpha}{(1+\alpha^2)^{1/2}}e^{i\varphi_0}.$$

Тогда система (1), (2) может быть записана в стандартном для задач с управлением виде

$$\frac{dE}{dt} = w(y-(1-c))E + \gamma(1+i\alpha)[e^{i\varphi}E(t-T) - E], \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = q - y - y \mid E \mid^2 . \tag{4}$$

В данной работе выдвигаем предположение, открывающее путь к применению асимптотических методов для исследования динамических свойств системы (3), (4). Оно состоит в том, что коэффициент γ, называемый коэффициентом управления, предполагается достаточно большим

$$\gamma \gg 1. \tag{5}$$

Отметим, что хотя для лазеров это предположение не является вполне естественным, тем не менее результаты, полученные при условии (5), позволяют лучше понимать тенденции изменения динамики при увеличении γ (усилении оптической ОС).

Поставим задачу исследовать поведение решений системы (3), (4) при условии (5).

3. Сведение к параболической краевой задаче

Разделим (3) на γ, получаем

$$\varepsilon\frac{dE}{dt} = \varepsilon w(y-(1-c))E + (1+i\alpha)[e^{i\varphi}E(t-T) - E], \tag{6}$$

где $\quad \varepsilon = \gamma^{-1} \ll 1.$

Рассмотрим сначала одно квазилинейное уравнение

$$\varepsilon\frac{dE}{dt} = \varepsilon f(\tau, E) + (1+i\alpha)[e^{i\varphi}E(t-T) - E], \tag{7}$$

в котором $\tau = \varepsilon t$ и $f(\tau, E)$ — произвольная достаточно гладкая и ограниченная при каждом значении E и $\tau \to \infty$ функция, для которой выполняются условия:

$$f(\tau, 0) \equiv 0 \quad \text{и} \quad \forall\psi \quad f(\tau, e^{i\psi}E) \equiv e^{i\psi}f(\tau, E). \tag{8}$$

Динамика такого типа уравнений изучалась в [15].

Сформулируем основные результаты из [15] применительно к (7). Начнем с простого утверждения.

Утверждение 1. *При каждом фиксированном $\alpha \neq 0$ для любого r найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ в шаре $S(0, r)$ (радиуса r с центром в нуле) фазового пространства $C_{[-T,0]}$ не существует аттрактора уравнения* (7).

Тем самым установившиеся решения (7) неограничены по ε при $\varepsilon \to 0$. Отсюда следует естественное ограничение на параметр α. Этот параметр при условии (5) должен быть достаточно мал. Фактор уширения линии α играет важную роль в таких динамических процессах, как модуляционный отклик и чипирование частоты. Как уже отмечалось, для полупроводниковых лазеров $\alpha \sim 6$ и длина волны излучения рассматриваются как фиксированные параметры. Однако, сканируя длину волны излучения в пределах линии усиления уединенного лазера без изменения профиля линии, может быть достигнуто существенное уменьшение α [16] (даже отрицательные значения α) при длине волны значительно короче длины волны, соответствующей максимуму усиления.

Таким образом, ниже будем полагать, что для некоторого фиксированного значения α_1 имеем

$$\alpha = \varepsilon^{1/2}\alpha_1. \tag{9}$$

Далее введем несколько обозначений. Фиксируем произвольно вещественное значение $z \neq 0$. Через $\theta = \theta(\varepsilon, z)$ обозначим такую величину из полуинтервала $[0, 1)$, которая дополняет значение $z\varepsilon^{-1/2}$ до целого. Также через $\upsilon(\tau, x)$ будем обозначать T-периодическую по второму аргументу комплекснозначную функцию.

В [15] показано, что для каждого $z \neq 0$ имеется асимптотическое по невязке решение уравнения (7) вида

$$E(t, \varepsilon) = \exp(i\frac{\varphi}{T}(1 - \frac{\varepsilon}{T})t)\upsilon(\tau, x) + O(\varepsilon^{1/2}),$$

где $\tau = \varepsilon t$, $x = [(z\varepsilon^{-1/2} + \theta) - (z\varepsilon^{1/2} + \varepsilon\theta)T^{-1}]t$ и функция $\upsilon(\tau, x)$ является решением краевой задачи параболического типа:

$$T\frac{\partial \upsilon}{\partial \tau} = \frac{1}{2}z^2\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + i\alpha_1 z\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + f(\tau, \upsilon), \tag{10}$$

$$\upsilon(\tau, x + T) = \upsilon(\tau, x). \tag{11}$$

После того, как некоторое ограниченное при $\tau \to \infty$ решение $\upsilon(\tau, x)$ этой краевой задачи определено, рассмотрим уравнение (4), в котором вместо $E(t, \varepsilon)$ принимаем $\exp(i\frac{\varphi}{T}(1 - \frac{\varepsilon}{T})t)\upsilon\left(\varepsilon t, (z\varepsilon^{-1/2} + \theta)(1 - \frac{\varepsilon}{T})t\right)$:

$$\frac{dy}{dt} = q - y(1 + \mid \upsilon \mid^2). \tag{12}$$

Воспользуемся известными результатами об усреднении в обыкновенных дифференциальных уравнениях с быстро осциллирующими периодическими коэффициентами.

На основании этих результатов заключаем, что с точностью до величины порядка $O(\varepsilon^{1/2})$ решение $y(t, \varepsilon)$ уравнения (12) совпадает с решением $y_0(t, \varepsilon)$ (с теми же начальными условиями) более простого уравнения

$$\frac{dy_0}{dt} = q - y_0\left(1 + \frac{1}{T}\int_0^T \mid \upsilon(\varepsilon t, s) \mid^2 ds\right). \tag{13}$$

На следующем этапе воспользуемся тоже хорошо известными результатами (см., например [17]) о поведении решений уравнений с медленно меняющимися коэффициентами. В правой части (13) фигурирует функция $g(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \mid \upsilon(\varepsilon t, s) \mid^2 ds$, которая зависит от медленно меняющейся переменной $\tau = \varepsilon t$. Отсюда приходим к выводу, что решения (13) с точностью до $O(\varepsilon^{1/2})$ совпадают при достаточно больших τ (порядка ε^{-1}) с функцией

$$y_1(\tau) = q\left(1 + \frac{1}{T}\int_0^T \mid \upsilon(\tau, s) \mid^2 ds\right)^{-1}.$$

Наконец, полагаем в (10)

$$f(\tau,\upsilon) = w\upsilon\left[q\left(1+\frac{1}{T}\int_0^T \mid \upsilon(\tau,s)\mid^2 ds\right)^{-1} - (1-c)\right].$$

Основной результат состоит в следующем.

Утверждение 2. *Пусть при некотором $z \neq 0$ функция $\upsilon(\tau,x)$ является ограниченным при $\tau\to\infty$ решением краевой задачи*

$$T\frac{\partial\upsilon}{\partial\tau} = \frac{1}{2}z^2\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2} + i\alpha_1 z\frac{\partial\upsilon}{\partial x} + w\upsilon\left[q\left(1+\frac{1}{T}\int_0^T \mid \upsilon(\tau,s)\mid^2 ds\right)^{-1} - (1-c)\right], \quad (14)$$

$$\upsilon(\tau,x+T) = \upsilon(\tau,x). \quad (15)$$

Тогда система уравнений (3), (4) имеет такое асимптотическое по невязке решение $E(t,\varepsilon)$, $y(t,\varepsilon)$, для которого

$$E(t,\varepsilon) = \exp(i\frac{\varphi}{T}(1-\frac{\varepsilon}{T})t)\upsilon(\tau,x) + O(\varepsilon^{1/2}), \quad (16)$$

$$y(t,\varepsilon) = q\left(1+\frac{1}{T}\int_0^T \mid \upsilon(\tau,s)\mid^2 ds\right)^{-1} + O(\varepsilon^{1/2}), \quad (17)$$

где $\tau = \varepsilon t$, $x = (z\varepsilon^{-1/2}+\theta)(1-\dfrac{\varepsilon}{T})t$.

4. Общая конструкция

Введем еще несколько обозначений. Фиксируем произвольно целое n и набор ненулевых вещественных чисел $z_1, z_2, ..., z_n$. Через $\theta_j = \theta_j(\varepsilon, z_j) \in [0,1)$ обозначим такие величины, для которых значение $z_j\varepsilon^{-1/2}+\theta_j$ является целым. На основании результатов из [15, 18] приведем более общие по сравнению с (16), (17) краевые задачи, определяющие в главном решения уравнений (3), (4):

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial\tau} = \frac{1}{2}\left(z_1\frac{\partial}{\partial x_1}+...+z_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2\upsilon + i\alpha_1\left(z_1\frac{\partial}{\partial x_1}+...+z_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\upsilon +$$
$$+w\upsilon\left[q\left(1+\frac{1}{T^n}\int_0^T...\int_0^T \mid \upsilon(\tau,s_1,...,s_n)\mid^2 ds_1...ds_n\right)^{-1} - (1-c)\right], \quad (18)$$

с T-периодическими условиями по каждому из аргументов $x_1, x_2, ..., x_n$. Соответственно роль формул (16), (17) играют соотношения

$$E(t,\varepsilon) = \exp(i\frac{\varphi}{T}(1-\frac{\varepsilon}{T})t)\upsilon(\tau,x_1,x_2,...,x_n) + O(\varepsilon^{1/2}), \quad (19)$$

$$y(t,\varepsilon) = q\left(1+\frac{1}{T^n}\int_0^T...\int_0^T \mid \upsilon(\tau,s_1,...,s_n)\mid^2 ds_1...ds_n\right)^{-1}, \quad (20)$$

где $\tau = \varepsilon t$, $x_j = [(z_j\varepsilon^{-1/2}+\theta_j) + z_j\varepsilon^{1/2} + \varepsilon\theta_j]t$.

Отметим, что уравнения типа (19) являются вырожденными параболическими задачами. Поясним это свойство в случае двух быстрых переменных x_1, x_2. Оказывается, что действие оператора

$$\Big(z_1\frac{\partial}{\partial x_1}+z_2\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)^2$$

на функции вида $\exp(i\omega_1 x_1+i\omega_2 x_2)$ равно нулю на характеристиках $\omega_1 z_1=-\omega_2 z_2$, т.е. в фазовом пространстве существуют выделенные направления, по которым фазовые траектории не сжимаются. Другая особенность уравнения (19) состоит в том, что оно зависит от континуальных параметров z_j. Это, в частности, означает, что может существовать множество различных установившихся состояний, которым в исходной системе (3), (4) соответствуют многочастотные торы вида (19), (20).

5. О решениях квазинормальной формы

Изучим теперь вопрос о поведении решений квазинормальной формы (14), (15). Рассмотрим периодическое по τ решение этой системы. Положим

$$\upsilon=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\upsilon_k(\tau)\exp[i\frac{2\pi}{T}kx].$$

В результате уравнение (14) распадается на бесконечное число обыкновенных дифференциальных уравнений

$$T\frac{d\upsilon_k}{d\tau}=\left[F\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\upsilon_n(\tau)|^2\Big)+p(zk)\right]\upsilon_k, \tag{21}$$

где

$$F(u)=w\left[\frac{q}{1+u}-(1-c)\right],\quad p(u)=-\frac{2\pi^2}{T^2}u^2-u\frac{2\pi}{T}\alpha_1.$$

Функция $p(u)$, как легко видеть, имеет ровно один максимум в точке $-\dfrac{T\alpha_1}{2\pi}$. Значит, при каждом $z\neq 0$ последовательность $p(zk)$ принимает наибольшее значение при ближайших к $-\dfrac{T\alpha_1}{2\pi z}$ целых значениях k. Как правило, такое значение одно — обозначим его k_0; но в ситуации, когда $\dfrac{\alpha_1 T}{2\pi z}+\dfrac{1}{2}$ является целым, таких значений два — обозначим наименьшее через k_0, тогда второе равно $k_1=k_0+1$.

Рассмотрим сначала случай, когда максимальный элемент у последовательности $p(zk)$ в точности один. Изучим при $k=k_0$ уравнение (21). Его решение можно представить в виде

$$\upsilon_{k_0}(\tau)=\upsilon_{k_0}(0)\exp\left[\frac{1}{T}\int\limits_0^{\tau}F\big(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\upsilon_n(s)|^2\big)+p(zk_0)\,ds\right].$$

В силу периодичности υ, подынтегральная функция является периодической. Если среднее значение действительной части этой функции будет положительно, то интеграл станет больше любого положительного числа. Это будет означать, что υ_{k_0} неограничена, но т.к. она периодическая, этого быть не может. Следовательно, либо $\upsilon_{k_0}(0) = 0$, что даст нам в конечном итоге неустойчивое решение (14), (15), либо

$$Re \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau F(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\upsilon_n(s)|^2) + p(zk_0)\, ds \le 0.$$

В силу выбора k_0 это означает, что при всех целых $k \ne k_0$

$$Re \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau F(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\upsilon_n(s)|^2) + p(zk)\, ds < 0. \tag{22}$$

Отсюда заключаем, что все элементы υ_k с номерами $k \ne k_0$ стремятся к нулю. В силу их периодичности получаем, что $\upsilon_k \equiv 0$ (при $k \ne k_0$). Значит, каждое устойчивое периодическое по τ решение задачи (14), (15) имеет вид

$$\upsilon(\tau, x) = \upsilon_{k_0}(\tau) \exp[i\frac{2\pi}{T}k_0 x].$$

Определим теперь $\upsilon_{k_0}(\tau)$. В уравнении (21) при $k = k_0$ положим $u_{k_0}(\tau) = \rho(\tau)e^{i\varphi(\tau)}$, затем разделим действительные и мнимые части в получившемся соотношении. Получим

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau} &= [Re\, F(\rho^2) + p(zk_0)]\rho, \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= Im\, F(\rho^2). \end{aligned}$$

Поведение решений первого из этих уравнений очень простое: $\rho(\tau)$ стремится к устойчивому состоянию равновесия. Состояниями равновесия являются ноль и

$$\rho_* = \sqrt{\frac{wq}{w - wc - p(zk_0)} - 1},$$

при условии, что оно существует. При этом, если ρ_* существует, то оно устойчиво, в противном случае устойчив ноль.

Ситуация, когда $\rho(\tau) \to 0$, нам не интересна, поэтому будем считать, что параметры таковы, что $\rho(\tau) \to \rho_*$. Тогда, с точностью до константы

$$\varphi_*(\tau) = Im\, F(\rho_*^2)\tau.$$

Итак, получаем, что орбитально устойчивое периодическое решение (14), (15) имеет с точностью до сдвига по фазе вид

$$\upsilon(\tau, x) = \rho_* \exp[iIm\, F(\rho_*^2)\tau + i\frac{2\pi}{T}k_0 x]. \tag{23}$$

Изучим теперь случай, когда существуют два целых значения $k = k_0$ и $k = k_1$, при которых последовательность $p(zk)$ достигает максимума. Аналогично предыдущему случаю получим, что при $k \neq k_0, k_1$ выполнено неравенство (22). Значит, искомое периодическое решение имеет вид

$$\upsilon(\tau, x) = \upsilon_{k_0}(\tau)\exp[i\frac{2\pi}{T}k_0x] + \upsilon_{k_1}(\tau)\exp[i\frac{2\pi}{T}k_1x].$$

Представляя $\upsilon_{k_0}(\tau) = \rho_0(\tau)e^{i\varphi_0(\tau)}$ и $\upsilon_{k_1}(\tau) = \rho_1(\tau)e^{i\varphi_1(\tau)}$ из уравнений (21) получаем

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_0}{d\tau} &= [ReF(\rho_0^2 + \rho_1^2) + p(zk_0)]\rho_0,\\
\frac{d\rho_1}{d\tau} &= [ReF(\rho_0^2 + \rho_1^2) + p(zk_1)]\rho_1,\\
\frac{d\varphi_0}{d\tau} &= Im\,F(\rho_0^2 + \rho_1^2),\\
\frac{d\varphi_1}{d\tau} &= Im\,F(\rho_0^2 + \rho_1^2).
\end{aligned}$$

Первые два уравнения выделяются в отдельную систему, все решения которой стремятся к одному из негрубых состояний равновесия, образующих дугу окружности $\rho_0^2 + \rho_1^2 = \rho_*^2$, $\rho_{0,1} \geq 0$. Таким образом, решение задачи (14), (15) имеет вид (φ_0^* и φ_1^* — некоторые произвольные постоянные)

$$\upsilon(\tau, x) = \rho_0\exp[i\varphi_0^* + iIm\,F(\rho_*^2)\tau + i\frac{2\pi}{T}k_0x] + \rho_1\exp[i\varphi_1^* + iIm\,F(\rho_*^2)\tau + i\frac{2\pi}{T}k_1x]. \quad (24)$$

Таким образом, при уменьшении параметра z квазинормальная форма (14), (15) проходит череду следующих бифуркаций. При $z = z_n = \dfrac{\alpha_1 T}{2\pi(n - 1/2)}$ $(n \in \mathbb{Z})$ решение (23), где $k_0 = n$, теряет экспоненциальную орбитальную устойчивость, появляется бесконечное число периодических решений вида (24), которые захватывают следующую пространственную моду. Затем опять появляется одно экспоненциально орбитально устойчивое решение (23), но вместо k_0 стоит уже $n + 1$.

Таким образом, для каждого целого k можно выбрать подходящее $z_k \neq 0$, что у квазинормальной формы будет устойчиво периодическое решение на k-й моде. Тогда, согласно утверждению 2, исходное уравнение (3), (4) имеет множество решений вида $(k \in \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned}
E_k(t, \varepsilon) &= \rho_*\exp\left[i\frac{2\pi}{T}k(z_k\varepsilon^{-1/2} + \theta + o(1))t + i\frac{\varphi}{T}(1 + o(1))t\right] + O(\varepsilon^{1/2}),\\
y_k(t, \varepsilon) &= \frac{1}{1 + \rho_*} + O(\varepsilon^{1/2}).
\end{aligned}$$

6. Заключение

В работе для системы с запаздыванием (3), (4) при условии большого коэффициента управления получены квазинормальные формы в виде уравнений в частных производных с периодическими граничными условиями. Квазинормальные формы имеют преимущества при численном исследовании, поскольку исключают быстроосциллирующие компоненты решений исходной системы.

Зависимость квазинормальных форм от континуальных параметров z_j предполагает существование множества различных решений. Мы показали, что при различных параметрах z_j квазинормальная форма имеет разлиные устойчивые периодические режимы, формирующиеся на различных пространственных модах. Следовательно, можно ожидать и мультистабильность циклов и многомерных торов с частотами $\omega_j,\ j = 1, ..., n$. Это заключение подтверждает численный пример сосуществования более десяти аттракторов (циклов и торов), приведенный в работе [19].

Список литературы

1. *Mork J., Tromborg B., Mark J.* Chaos in semiconductor lasers with optical feedback: theory and experiment // IEEE J.Quant.Electr. 1992. V. 28. P. 93–108.

2. *Tartwijk G., Lenstra D.* Semiconductor lasers with optical injection and feedback // Quantum. Semiclass. Opt. 1995. V. 7. P. 87–143.

3. *Ye J, Li H., McInerny J. M.* Period-doubling route to chaos in a semiconductor laser with weak optical feedback // Phys. Rev. A. 1993. V. 47. P. 2249–2252.

4. *Fischer I., Hess O., Elsasser W., Gobel E.* High-dimensional chaotic dynamics of an external cavity semiconductor laser // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 73. P. 2188–2191.

5. *Sano T.* Antimode dynamics and chaotic itinerancy in the coherent collapse of semiconductor lasers with optical feedback // Phys. Rev. A. 1994. V. 50. P. 2719–2726.

6. *Ritter A., Haug H.* Theory of laser diodes with weak optical feedback. I. Small-signal analysis and side-mode spectra // JOSA B. 1993. V. 10. P. 130–144.

7. *Ritter A., Haug H.* Theory of laser diodes with weak optical feedback. II. Limit-cycle behavior, quasi-periodicity, frequency locking, and route to chaos // JOSA B. 1993. V. 10. P. 145–154.

8. *Huyet G., Balle S., Giudici M. et. al.*Low frequency fluctuations and multimode operation of a semiconductor laser with optical feedback // Opt. Commun. 1999. V. 149. P. 341–347.

9. *Grigorieva E. V.* Quasiperiodicity in Lang-Kobayashi model of lasers with delayed optical feedback // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2001. V. 4. P. 333–340.

10. *Levine A. M., Tartwijk GHM, Lenstra D., Erneux T.* Diode lasers with optical feedback: Stability of the maximum gain mode // Phys. Rev. A. 1995. V. 52. P. R3436–R3439.

11. *Green K.* Stability near threshold in a semiconductor laser subject to optical feedback: A bifurcation analysis of the Lang-Kobayashi equations // Phys. Rev. E. 2009. V. 79. P. 036210.

12. *Tager A. A., Petermann K.* High-frequency oscillations and self-mode locking in short external-cavity laser diodes // IEEE J. Quantum Electron. 1994. V. 30, № 7. P. 1553–1561.

13. *Erneux T., Gavrielides A., Sciamanna M.* Stable microwave oscillations due to external-cavity-mode beating in laser diodes subject to optical feedback // Phys. Rev. A. 2002. V. 66. P. 033809.

14. *Lang R., Kobayashi K.* External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties // IEEE J. Quantum. Electron. 1980. V. QE-16. P. 347–355.

15. *Кащенко И. С.* Динамика уравнения с большим коэффициентом запаздывающего управления // Доклады Академии наук. 2011. Т. 437, № 6. С. 743–747. (English transl.: *Kashchenko I.S.* Dynamics of an Equation with a Large Coefficient of Delay Control // Doklady Mathematics, 2011. ISSN 1064-5624. V. 83. No. 2. P. 258 – 261. DOI: 10.1134/S1064562411020402.)

16. *Heil T., Fischer I., Elsasser W.* Influence of amplitude-phase coupling on the dynamics of semiconductor lasers subject to optical feedback // Phys. Rev. A. 1999. V. 60. P. 634–640.

17. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973. (*Vasilyeva A.B. and Butuzov V.F.* Asymptotic Expansions of Solutions of Singularly Perturbed Equations. Moskva: Nauka, 1973 [in Russian].)

18. *Кащенко И. С.* Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 12. С. 2141–2150. (English transl.: *Kashchenko I.S.* Local Dynamics of Equations with Large Delay // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2008. V. 48. No. 12. P. 2172–2181.)

19. *Masoller C., Abraham N.B.* Stability and dynamical properties of the coexisting attractors of an external-cavity semiconductor laser // Phys. Rev. A. 1998. V. 57. P. 1313–1322.

Quasinormal Forms for Lang–Kobayashi Equations with a Large Control Coefficient

Grigorieva E.V., Kashchenko I.S., Kaschenko S.A.

Belarus State Economical University, Partizanskii av., 26, Minsk, 220070, Belarus;
P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: Lang–Kobayashi equation, large control, quasinormal form

We study a model of single-mode semiconductor laser with the optical feedback. This model bases on DDE (Lang–Kobayashi model). With the help of local analysis methods we built a continuous set of quasinormal forms in the neighbourhood of critical values. The ability of coexistence of a large number of steady oscillating states is discussed.

Сведения об авторах:
Григорьева Елена Викторовна,
Белорусский государственный экономический университет
доктор физ.-мат. наук, профессор.
Кащенко Илья Сергеевич,
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
канд.-физ. мат. наук, доцент.
Кащенко Сергей Александрович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
доктор физ.-мат. наук, профессор,
зав. кафедрой математического моделирования.