Модел. и анализ информ. систем. Т. **20**, № **1** (2013) 52–98

УДК 517.9

Релаксационные колебания в системе с запаздываниями, моделирующей задачу «хищник–жертва»

Кащенко С. А.[1]

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

получена 20 октября 2012

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с запаздыванием, большой параметр, асимптотика, периодическое решение

Предложен новый метод асимптотического исследования сложных релаксационных колебаний в системе с запаздыванием. Применяя его, удается задачу о динамике в системе «хищник–жертва» свести к анализу одномерного отображения. На основании асимптотического анализа сформулированы выводы биологического характера.

Введение

Известно, что логистическое дифференциальное уравнение с запаздыванием (уравнение Хатчинсона)

$$\dot{N}(t) = r\Big[1 - \frac{N(t-h)}{k}\Big]N(t)$$

хорошо описывает динамику изменения численности популяции, обитающей в однородной среде. Исследованию решений этого уравнения посвящены работы [1–8]. Для моделирования задачи хищник–жертва в [9] предложена система дифференциально разностных уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{N}_1(t) &= r_1\left[1 + a\left(1 - \frac{N_2(t)}{k_2}\right) - \frac{N_1(t-h_1)}{k_1}\right]N_1(t),\\
\dot{N}_2(t) &= r_2\left[\frac{N_1(t)}{k_1} - \frac{N_2(t-h_2)}{k_2}\right]N_2(t),
\end{aligned} \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.G34.31.0053 и при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 14.B37.21.0457).

где $N_1(t)$ — численность популяции жертв; $N_2(t)$ — хищников; k_1 и k_2 — соответственно их средние значения; h_1 и h_2 — возрасты половозрелости особей рассматриваемых популяций; r_1 и r_2 — их мальтузианские коэффициенты линейного роста; a — коэффициент «давления» хищника на жертву. Коэффициент k_i характеризует «емкость» среды обитания. Зависимость коэффициентов $k_1 = k_1(a)$ от параметра a имеет вид

$$k_1(a) = \frac{k_1^0}{1+a}, \tag{2}$$

где k_1^0 — средняя численность жертв при $a = 0$. Биологически это означает, что сопротивление внешней среды является некоторой биологической постоянной, которая не зависит от присутствия хищников.

Результаты локального анализа этой системы, использующие теорию бифуркаций, получены в работах [9–12]. Численными методами система (1) исследовалась в [13–16]. В данной работе рассмотрены вопросы о существовании, асимптотике и устойчивости нелокальных стационарных режимов системы (1) при условии, когда одна из рассматриваемых популяций является сильно плодовитой, т.е. один из коэффициентов r_i достаточно велик. Будет показано, в частности, что в фазовом пространстве системы (1) имеются аттракторы, поведение решений из которых определяется динамикой некоторых одномерных отображений отрезка в себя. Сразу отметим, что приводимый ниже анализ не является исчерпывающим. По-видимому, в фазовом пространстве исходной системы имеются аттракторы иной структуры.

Отметим, что, несмотря на ограниченность применения, полученные в этом параграфе утверждения хорошо описывают динамику задачи хищник–жертва на качественном уровне. Имеется в виду, что структура решений, сама их сложность, а также тенденции при варьировании коэффициентов системы (1) согласуются с выводами экологического характера.

Результаты исследования системы (1) опубликованы в работах автора [17–20].

Порядок изложения результатов такой. В § 1 изучены некоторые общие свойства системы (1), в § 2 сформулированы основные результаты. Подчеркнем, что из них следует возможность существования странных аттракторов в пространстве решений исходной системы. В § 3 включены промежуточные доказательства сформулированных в § 2 утверждений. Их обоснование завершается в § 4. В § 5 изучаются асимптотические разложения периодических решений, а § 6 посвящен исследованию их устойчивости. В § 7 система (1) рассматривается в предположении, что коэффициент r_2 достаточно велик, что соответствует задаче «паразит–хозяин». В § 8 в рамках обсуждения полученных результатов приведены биологические объяснения некоторых законов функционирования простейших экосистем, состоящих из популяций «хищник–жертва», «паразит–хозяин» в экстремальных случаях.

§1. Предварительные сведения

Количество параметров в системе (1) можно уменьшить с помощью замен

$$t = h_1\tau, \qquad N_i(h_1\tau) = k_i M_i(\tau) \qquad (i = 1, 2). \tag{3}$$

Переобозначив τ через t и $M_i(\tau)$ через $N_i(\tau)$, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned}\dot N_1(t) &= \frac{\lambda_1}{1+a}\left[1 + a\,(1 - N_2(t)) - N_1(t-1)\right] N_1(t),\\ \dot N_2(t) &= \lambda_2\left[N_1(t) - N_2(t-h)\right] N_2(t),\end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\lambda_1 = r_1 h_1; \quad \lambda_2 = r_2 h_2; \quad h = h_2/h_1.$$

Обозначим через $C_{[-\gamma,0]}$ пространство непрерывных на отрезке $[-\gamma,0]$ функций. Напомним, что заданием начальных условий $N_1(s) \in C_{[-1,0]}$ и $N_2(s) \in C_{[-h,0]}$ однозначно определяется для всех $t > 0$ решение $N(t) = (N_1(t), N_2(t))$ системы (4).

Решения (4), положительные хотя бы при одном $t = t_0 \geqslant 0$, остаются положительными при всех $t \geqslant t_0$. Поэтому (и из биологического смысла $N_1(t)$ и $N_2(t)$) в дальнейшем будем исследовать лишь положительные решения. Здесь же, для полноты картины, отметим, что если при всех $t \geqslant t_0$, ненулевые функции $N_1(t)$ и $N_2(t)$ не являются одновременно положительными, то их асимптотика находится без труда: одна из функций стремится к $-\infty$, а другая — либо к нулю, либо к ∞ при $t \to \infty$. Термином «решение» в дальнейшем будем называть лишь такое решение (4), обе координаты которого положительны. Важное свойство совокупности решений (4) заключается в том, что рассматриваемая система диссипативна. Сформулируем соответствующее утверждение более точно.

Лемма 1. *Для каждого решения $N(t) = (N_1(t), N_2(t))$ системы (4) найдется такой момент времени t_0, что при $t \geqslant t_0$ выполняются неравенства*

$$N_1(t) \leqslant (1+a)\exp\lambda, \tag{5}$$

$$N_2(t) \leqslant (1+a)\exp\left[\lambda_1 + \lambda_2 h(1+a)\exp\lambda_1\right]. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $N_1(t_0) = 1 + a$ в некоторой точке $t = t_0$. Тогда для значений t из отрезка $[t_0, t_0+1]$ имеют место неравенства

$$N_1(t) \leqslant (1+a)\exp\left[\lambda_1(t-t_0)\right] \leqslant \exp(\lambda_1)(1+a).$$

Этот вывод следует из соотношений

$$N_1(t) = N_1(t_0)\exp\left[\lambda_1(t-t_0) - \frac{\lambda_1 a}{1+a}\int\limits_{t_0}^{t} N_2(s)ds - \frac{\lambda_1}{1+a}\int\limits_{t_0-1}^{t-1} N_1(s)ds\right] \leqslant N_1(t_0)\exp\lambda_1(t-t_0).$$

Предположим затем, что на некотором интервале (α,β) $(\beta \geqslant \alpha+1)$ выполнено неравенство

$$N_1(t) \geqslant 1 + a.$$

Тогда для $t \in [\alpha+1, \beta]$ имеем

$$N_1(t) \leqslant N_1(\alpha+1).$$

Для того, чтобы убедиться в справедливости последнего неравенства, достаточно заметить, что $\dot N_1(t) \leqslant 0$ на промежутке $[\alpha+1, \beta]$.

Из приведенных здесь двух утверждений немедленно вытекает обоснование неравенства (5). Используя подобные рассуждения и оценку (5) в нижнем уравнении системы (4), приходим к обоснованию неравенства (6). Лемма доказана.

Оценки (5) и (6) можно существенно улучшить. Путь, следуя которому это удается сделать, описан ниже при доказательстве леммы 4. Следующее свойство также является важной характеристикой решений системы (4).

Лемма 2. *Каждое решение системы (4) имеет точное среднее, причем*

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_0}^{\tau}N_1(t)dt=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_0}^{\tau}N_2(t)dt=1.$$

Для доказательства леммы достаточно первое и второе уравнения системы (4) поделить на $N_1(t)$ и $N_2(t)$ соответственно, проинтегрировать их левые и правые части от t_0 до τ и воспользоваться результатом леммы 1.

Как следствие утверждений леммы 2 получаем, что для периодического с периодом T_0 решения $N_0(t)=(N_{10}(t),N_{20}(t))$ системы (4) имеют место равенства

$$\frac{1}{T_0}\int\limits_0^{T_0}N_{10}(t)dt=\frac{1}{T_0}\int\limits_0^{T_0}N_{20}(t)dt=1. \tag{7}$$

Лемма 3. *Пусть при всех достаточно больших значениях t выполняется одно из неравенств: $N_1(t)>1$, или $N_1(t)<1$, или $N_2(t)>1$, или $N_2(t)<1$.*

Тогда верны предельные равенства

$$\lim_{t\to\infty}N_1(t)=\lim_{t\to\infty}N_2(t)=1.$$

Действительно, из леммы 2 получаем, что в условии леммы 3 хотя бы одна из функций $N_1(t)$ или $N_2(t)$ стремится к единице при $t\to\infty$. Тот факт, что и другая функция имеет тот же предел, вытекает непосредственно из самой системы (4).

Из леммы 3 следует, что в изучении нуждаются лишь осциллирующие около состояния равновесия $N_1\equiv N_2(t)\equiv 1$ решения системы (4).

Рассматриваемая система уравнений имеет три состояния равновесия. Два из них ($N_1\equiv N_2(t)\equiv 0$ и $N_1\equiv 1+a, N\equiv 0$) при всех положительных значениях параметров системы неустойчивы, а третье ($N_1\equiv N_2\equiv 1$) в зависимости от выбора параметров может быть как устойчивым, так и неустойчивым. При достаточно малых значениях λ_1 и λ_2 все корни характеристического квазиполинома линеаризованной в состоянии равновесия $N_1\equiv N_2\equiv 1$ системы (4) имеют отрицательные вещественные части. Поэтому решение здесь будет экспоненциально устойчиво (локально). Следующее утверждение о глобальной асимптотической устойчивости этого стационара обобщает результат Райта, полученный им для уравнения Хатчинсона [2].

Прежде чем его сформулировать, введем обозначения. Положим

$$\gamma_0 = \lambda_2 h(1+a)\exp\lambda_1;$$

$$\gamma_1 = \lambda_1(1+\gamma_0)\exp(\lambda_1+\gamma_0)\left[a + \tfrac{\lambda_1}{1+a}\left(a(1+\gamma_0)+\exp(-\gamma_0)\right)\right];$$

$$\gamma_2 = \lambda_2 h \exp\gamma_0\left[a(1+\lambda_1)(1+\gamma_0)\exp\lambda_1+\gamma_0\right];$$

$$\gamma_3 = [1+\lambda_1\lambda_2 h(1+\gamma_0)]\exp(\lambda_1+\gamma_0)\Big[\lambda_1(1+\lambda_1)\frac{a}{1+a}\exp\lambda_1+ \\ + a(1+\frac{\lambda_1}{1+a})\exp(\lambda_1+\gamma_0)(a(1+\lambda_1)(1+\gamma_0)+(1+a)\lambda_2 h)\Big].$$

Лемма 4. *Пусть выполнены условия*

$$\gamma_1 \leqslant 1, \qquad \gamma_2 \leqslant 1, \qquad \gamma_1\gamma_2 \geqslant \gamma_3. \tag{8}$$

Тогда все решения системы (4) стремятся к состоянию равновесия (3).

Доказательство. В системе (4) произведем замены

$$N_1 = 1+x, \qquad N_2 = 1+y, \qquad (x,y>-1). \tag{9}$$

В итоге получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\frac{\lambda_1}{1+a}\left[x(t-1)+ay(t)\right]\cdot\left[1+x(t)\right], \\ \dot{y}(t) &= \lambda_2\left[x(t)-y(t-h)\right]\cdot\left[1+y(t)\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Фиксируем произвольно решения $x(t)$ и $y(t)$ этой системы. Предположим, что для всех $t \geqslant t_0$ выполнены неравенства

$$x(t) \geqslant -\alpha, \qquad y(t) \geqslant -\beta, \tag{11}$$

где $0<\alpha, \quad \beta \leqslant 1$.

Достаточно рассмотреть тот случай, когда функции $x(t)$ и $y(t)$ осциллируют (имеют нули на каждом промежутке $(t_0+n,\infty), n=1,2,\ldots$).

Обозначим через ξ и η некоторые точки локального максимума этих функций соответственно. Без потери общности можно считать, что

$$x(\xi) = \max_{\xi-1\leqslant t\leqslant\xi} x(t), \qquad\qquad y(\eta) = \max_{\eta-h\leqslant t\leqslant\eta} y(t).$$

Полагая в верхнем уравнении (10) $t=\xi$, а в нижнем $t=\eta$, находим, что

$$x(\xi-1) = -ay(\xi) \leqslant \beta a, \qquad\qquad y(\eta-h) = x(\eta). \tag{12}$$

Для функций $x(t)$, $y(t)$ и произвольных t, τ справедливы равенства

$$1+x(t) = [1+x(\tau)]\exp\left[-\frac{\lambda_1}{1+a}\int\limits_{\tau-1}^{t-1}x(s)ds - \frac{\lambda_1 a}{1+a}\int\limits_{\tau}^{t}y(s)ds\right], \tag{13}$$

$$1+y(t)=[1+y(\tau)]\exp\left[\lambda_2\int\limits_{\tau}^{t}x(s)ds-\lambda_2\int\limits_{\tau-h}^{t-h}y(s)ds\right]. \tag{14}$$

Положим в (13) $t=\xi$, $\tau=\xi-1$ и воспользуемся первым соотношением (12). В результате получим неравенство

$$1+x(t)<[1+\beta a]\exp\left[\frac{\lambda_1\alpha}{1+a}+\frac{\lambda_1 a\beta}{1+a}\right]=M_1(\alpha,\beta). \tag{15}$$

Положим затем в (14) $t=\eta$, $\tau=\eta-h$. Тогда, используя (12) и (15), приходим к неравенству

$$1+y(t)<M_2(\alpha,\beta), \tag{16}$$

где

$$M_2(\alpha,\beta)=[1+\beta\alpha]\exp\left[\frac{\lambda_1}{1+a}(\alpha+\beta a)+\lambda_2 h(M_1(\alpha,\beta)-1+\beta)\right].$$

Пусть теперь ξ_1, η_1 — точки локального минимума функций $x(t)$, $y(t)$ соответственно и пусть $x(\xi_1)=-\alpha_1$, $y(\eta_1)=-\beta_1$. Полагая в (13) $t=\xi_1$, $\tau=\xi_1-1$ и учитывая соотношения (12), (15), (16), получаем оценку

$$1-\alpha_1>[1+a-aM_2(\alpha,\beta)]\left[\lambda_1\left(1-\frac{1}{1+a}M_1(\alpha,\beta)-\frac{a}{1+a}M_2(\alpha,\beta)\right)\right]. \tag{17}$$

Аналогично этому получаем неравенство

$$1-\beta_1>(1-\alpha)\exp\left[-\lambda_2 h(\alpha+M_2(\alpha,\beta)-1)\right]. \tag{18}$$

Ясно, что при всех (достаточно больших) t имеют место оценки

$$x(t)\geqslant-\min(\alpha,\alpha_1)=\alpha_0,\qquad y(t)\geqslant-\min(\beta,\beta_1)=\beta_0,$$

поэтому для стремления к нулю $x(t)$ и $y(t)$ (при $t\to\infty$) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\alpha_0+\beta_0<\alpha+\beta, \tag{19}$$

из (17) и (18) заключаем, что эти оценки будут заведомо выполнены, если

$$\frac{\partial F_1(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}>0,\quad \frac{\partial F_2(\alpha,\beta)}{\partial\beta}>0,\quad \frac{\partial F_1(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial F_2(\alpha,\beta)}{\partial\beta}>\frac{\partial F_1(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial F_2(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}, \tag{20}$$

где

$$F_1(\alpha,\beta)=\alpha-1+(1+a-aM_2(\alpha,\beta))\exp\left[\lambda_1\left(1-\frac{M_1(\alpha,\beta)}{1+a}-\frac{aM_2(\alpha,\beta)}{1+a}\right)\right];$$

$$F_2(\alpha,\beta)=\beta-1+(1-\alpha)\exp\left[-\lambda_2 h\left(\alpha+M_2(\alpha,\beta)-1\right)\right].$$

В заключение остается заметить, что неравенства (18) достаточны для выполнения условий (20). Лемма доказана.

Отметим, что путем некоторой модификации доказательства леммы 4 [4, 21] область значений параметров, при которых нулевое решение (10) глобально устойчиво, может быть расширена.

§2. Результаты для случая $\lambda_1 \gg 1$

Важным моментом при построении асимптотики периодического решения в [6, 17, 20, 21] являлось выделение в фазовом пространстве исходного уравнения некоторого специального множества начальных условий и последующее изучение решений с начальными условиями из этого множества. Напомним, что было удобно начальные условия выбирать так, чтобы момент времени $t = 0$ совпадал с началом всплеска решений, а на некотором интервале времени, примыкающем слева к точке $t = 0$, значения начальной функции были «близки» к нулю. Для рассматриваемой здесь системы уравнений выделение подобного множества начальных условий наталкивается на значительные трудности. Дело в том, что моменты начала всплесков N_1 и N_2 заведомо различны. Тем самым возникла бы необходимость как-то описывать множество начальных условий для функций, находящихся на «всплеске». Это привело бы к необходимости иметь довольно точную априорную информацию об асимптотике решений. Для преодоления указанных трудностей ниже используется один технический прием, связанный с изменением понятия решения. Суть его в том, что начальные условия и для N_1, и для N_2 задаются в моменты начала их всплесков, т.е. в различные моменты времени, а в промежутке между началами всплесков исходная система уравнений специальным и естественным образом доопределяется. Сразу отметим, что с помощью этого приема удалось рассмотреть и гораздо более сложные системы уравнений.

В дальнейшем индекс у параметра λ_1 будем опускать.

Введем несколько обозначений. Через S_1 обозначим множество таких функций $\varphi(s) \in C_{[-1,0]}$, для которых выполнены следующие условия: во-первых,

$$\varphi(s) = -1 + \exp(\lambda s)[1 + q(s)], \tag{21}$$

где $q(s)$ — монотонно не возрастающая на отрезке $[-1, 0]$ функция, во-вторых, $\varphi(0) = 0$ (следовательно, $q(0) = 0$), в-третьих,

$$q(s) \leqslant \lambda^{-1}. \tag{22}$$

Фиксируем параметр γ так, чтобы $\gamma > 1 + h$. Введем в рассмотрение еще одно множество S_2, таких функций $\psi(s) \in C_{[-\gamma,0]}$, для которых выполнены три условия: во-первых, $\psi(s)$ — монотонно не убывающая функция, во-вторых, $\psi(0) = 0$, в-третьих, имеют место неравенства

$$-1 \leqslant \psi(s) \leqslant -1 + 2\exp(\lambda^2 s). \tag{23}$$

Положим $S = (S_1, S_2)$. Соответствующие исследования будем проводить в терминах решений системы уравнений (10). Как уже говорилось выше, понятие решения этой системы удобно временно несколько видоизменить. Для этого фиксируем значение δ_0 так, чтобы $0 < \delta_0 < \min(1, h, \gamma - 1 - h)$. Пусть ξ — некоторый параметр из интервала $(0, 1 + \delta_0)$ (ниже интервал изменения ξ будет несколько сужен), а $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ — две произвольные функции из множеств S_1 и S_2 соответственно. Для значений $t \in [0, \xi]$ через $x_\xi(t)$ обозначим решение (в обычном смысле) уравнения

$$\dot{x}(t) = -\frac{\lambda}{1 + a}\left[x(t - 1) + a\psi(t - \xi)\right]\left[1 + x(t)\right]$$

с начальным условием $\varphi(s)$, задаваемым при $t = 0$. Для значений $t \geqslant \xi$ через $x_\xi(t)$ и $y_\xi(t)$ будем обозначать решения (в обычном смысле) системы (10) с начальными условиями $x_\xi(\xi + s)$ и $\psi(s)$ соответственно, задаваемыми при $t = \xi$. Определенную таким образом пару функций $x_\xi(t)$ и $y_\xi(t)$ будем называть решением системы уравнений (10). Отметим сразу, что видоизменение понятия решения не является существенным. Оно удобно лишь в чисто техническом плане.

Ниже будет изучено поведение функций $x_\xi(t)$ и $y_\xi(t)$.

Формулировка результатов. Структуру решений $x_\xi(t)$, $y_\xi(t)$ можно описать в терминах некоторого отображения отрезка $[0, 1]$ в себя. Опишем сначала соответствующее отображение, которое обозначим $f_\Delta(z)$. Введем в рассмотрение функцию

$$f(z, \Delta) = \Delta \cdot z \cdot \ln z,$$

где

$$\Delta = \frac{r_2 h_2(1 + a)}{a} = \frac{\lambda_2 h(1 + a)}{a}.$$

Для тех значений z, для которых $0 \leqslant f(z, \Delta) + k \leqslant 1 \quad (k = 1, 2, \ldots)$, положим

$$f_\Delta(z) = f(z, \Delta) + k.$$

Таким образом, отображение $f_\Delta(z)$ определено на $[0, 1]$ и действует в него же. Для каждой точки $z \in [0, 1]$ значение $f_\Delta(z)$ определяется однозначно, за исключением тех точек, для которых $f(z, \Delta) + k = 0$. Последнее, однако, не существенно, поскольку рассматриваемое отображение переводит концы отрезка [0,1] в точку $z = 1$.

Отображение $f_\Delta(z)$ при условии $\Delta < e$ непрерывно, а при $\Delta \geqslant e$ — разрывно и состоит из конечного числа непрерывных ветвей, количество которых слева и справа от точки $z = e^{-1}$ одинаково (и равно наименьшему целому числу, превосходящему $e^{-1}\Delta$). Прообразы таких крайней левой и крайней правой ветвей этого отображения обозначим через d_1, прообразы следующих за ними крайней левой и крайней правой ветвей — через d_2 и т.д. Каждой точке $z \in [0, 1]$ припишем номер q_z, означающий, что $z \in d_{q_z}$ (в том случае, когда этот номер определяется неоднозначно, т.е. $z \in d_{q_{z_1}} \bigcap d_{q_{z_2}}$ через q_z обозначим наименьшее из чисел q_{z_1} и q_{z_2}). Напомним, что траекторией $\{z_n^{q_n}\}$ отображения $f_\Delta(z)$ называют последовательность $z_0^{q_0}, z_1^{q_1}, \ldots,$ где $q_n = q_{z_n}$ и $z_{n+1}^{q_{n+1}} = f_\Delta(z_n^{q_n})$.

Введем еще несколько обозначений. Пусть $\eta_1, \ldots, \eta_m$ — все точки разрыва функции $f_\Delta(z)$ на интервале $(0, 1)$. Фиксируем произвольно параметр $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Через $d_j(\varepsilon) \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, m + 1)$ обозначим промежутки $d_0(\varepsilon) = [0, \varepsilon_0)$, $d_i(\varepsilon) = (\eta_i - \varepsilon, \eta_i + \varepsilon) \quad (i = 1, \ldots, m)$, $d_{m+1}(\varepsilon) = (1 - \varepsilon, 1]$ Положим, наконец,

$$d(\varepsilon) = [0, 1] - \sum_{j=0}^{m+1} d_j(\varepsilon).$$

Параметр $z \in [0, 1]$, введенный выше, и параметр ξ, фигурирующий в предыдущем пункте, связаны равенством

$$z = \exp\left[-\frac{1}{1 + a}\exp[\lambda(\xi - 1)]\right]. \tag{24}$$

Ограничения, формулируемые ниже в терминах параметра z, легко перефразировать, используя равенство (24), в терминах параметра ξ.

Сформулируем сначала один промежуточный результат. Пусть $t_i(\lambda, \xi)$ и $\tau_i(\lambda, \xi)$ $(i = 1, 2, \ldots)$; $\tau_0(\lambda, \xi) = \xi$ — занумерованные в порядке возрастания положительные нули (если они существуют) функций $x_\xi(t)$ и $y_\xi(t)$ соответственно.

Теорема 1. *Для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое λ_0, что при всех $\lambda \geqslant \lambda_0$ и $z \in d(\varepsilon)$ выполнены два условия: во-первых, определено значение $\tau_2(\lambda, \xi)$, во-вторых, найдется такой номер $p_1 = p_1(z) \geqslant 1$, что определены величины $t_1(\lambda, \xi), \ldots, t_{2p_1+1}(\lambda, \xi)$, причем*

$$t_{2p_1}(\lambda, \xi) < t_2(\lambda, \xi) < t_{2p_1+1}(\lambda, \xi). \tag{25}$$

Введем в рассмотрение оператор π , определенный на множестве S и действующий в $(C_{[-1,0]}, C_{[-\gamma,0]})$. Именно, для функций $\varphi(s) \in S_1$ и $\psi(s) \in S_2$ положим

$$\pi(\varphi(s), \psi(s)) = (x_\xi(t_{2p_1}(\lambda, \xi) + s), y_\xi(\tau_2(\lambda, \xi) + s)).$$

Следующее утверждение является центральным.

Теорема 2. *Для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое λ_0, что при всех $\lambda \geqslant \lambda_0$ и $z \in d(\varepsilon)$ имеют место включения*

$$x_\xi(t_{2p_1}(\lambda, \xi) + s) \in S_1, \qquad y_\xi(\tau_2(\lambda, \xi) + s) \in S_2, \tag{26}$$

т.е.

$$\pi S \subset S.$$

Положим

$$\xi_1 = \tau_2(\lambda, \xi) - t_{2p_1}(\lambda, \xi) \equiv \psi(\xi, \lambda, \varphi(s), \psi(s)).$$

В терминах переменной z этому равенству можно придать вид

$$z_1 = f(z, \lambda, \varphi(s), \psi(s)). \tag{27}$$

Теорема 3. *Пусть $z \in d(\varepsilon)$. Тогда равномерно относительно $\varphi(s) \in S_1$ и $\psi(s) \in S_2$ имеют место асимптотические (при $\lambda \to \infty$) равенства*

$$f(z, \lambda, \varphi(s), \psi(s)) = f_\Delta(z) + o(1); \quad \frac{\partial f(z, \lambda, \varphi(s), \psi(s))}{\partial z} = \frac{d}{dz} f_\Delta(z) + o(1). \tag{28}$$

Этот результат дает возможность использовать свойства отображения $f_\Delta(z)$ для изучения поведения решений исходной системы. Следующие результаты раскрывают связь между траекториями системы (4) и отображения

$$z_{n+1} = f_\Delta(z_n). \tag{29}$$

Пусть z_1 в (27) принадлежит промежутку $d(\varepsilon)$. Тогда согласно теореме 1 , найдется такой номер p_2, для которого

$$t_{2p_2}(\lambda, \xi) < \tau_4(\lambda, \xi) < t_{2p_2+1}(\lambda, \xi). \tag{30}$$

Для разности $\xi_2 = \tau_4(\lambda, \xi) - t_{2p_2}(\lambda, \xi)$ верно равенство

$$\xi_2 = \psi(\xi_1, \lambda, x_\xi(t_{2p_1}(\lambda, \xi) + s), y_\xi(\tau_2(\lambda, \xi) + s)).$$

В том случае, когда $z_2 \in d(\varepsilon)$, где

$$z_2 = f(z_1, \lambda, x_\xi(t_{2p_1}(\lambda, \xi) + s), y_\xi(\tau_2(\lambda, \xi) + s)),$$

определено значение p_3, для которого

$$t_{2p_3}(\lambda, \xi) < \tau_6(\lambda, \xi) < t_{2p_3+1}(\lambda, \xi) \qquad (31)$$

и т.д. Тем самым каждой точке z_n траектории $\{z_n\}$ отображения (27) соответствует номер p_n, который устанавливает число пар нулей функции $x_\xi(t)$ на интервале $(0, \tau_n(\lambda, \xi))$. Отметим здесь, что неравенства типа (25), (30), (31) имеют прозрачный биологический смысл: численность популяции хищника начинает интенсивно расти тогда, когда численность популяции жертвы выше средней.

Таким образом, с каждой точкой z_n связаны два индекса: p_n и q_n. Следующее утверждение говорит о том, что, зная траекторию отображения (28), можно получить важную информацию о структуре решений системы (4).

Теорема 4. *Имеют место равенства*

$$q_n = p_{n+1} - p_n \qquad (p_0 = 0). \qquad (32)$$

Оказывается, что отображение (29) достаточно полно описывает поведение решений (с начальными условиями из S) системы (4). Аттракторам (репеллерам) этого отображения соответствуют аналогичные аттракторы (репеллеры) в фазовом пространстве исходной системы. Прежде чем сформулировать следующий результат, условимся о терминологии. Будем говорить, что последовательность $z_0, z_1, \ldots$ отвечает решению $N_1(t), N_2(t)$ системы (4), если эта последовательность построена по указанному выше правилу для некоторого решения $x_\xi(t) = N_1(t) - 1, y_\xi(t) = N_2(t) - 1$.

Теорема 5. *Пусть для некоторого номера* l $(l = 1, 2, \ldots)$ *выполнено условие периодичности*

$$F_l(z_0) = f^l_\Delta(z_0) = z_0 \qquad (33)$$

и неравенства

$$z_0 \neq 0, \qquad \left| \frac{dF_l(z)}{dz}\bigg|_{z=z_0} \right| \neq 1. \qquad (34)$$

Тогда найдется такое λ_0, *что при всех* $\lambda \geqslant \lambda_0$ *существует периодическое решение* $N_1(t, \lambda), N_2(t, \lambda)$ *системы (4), отвечающая которому последовательность* $z_0(\lambda), z_1(\lambda), \ldots$ *такова, что*

$$\lim_{\lambda \to \infty} z_0(\lambda) = z_0. \qquad (35)$$

Это решение экспоненциально орбитально устойчиво, если $\left| \frac{dF_l(z)}{dz}\Big|_{z=z_0} \right| < 1$, *и неустойчиво, если* $\left| \frac{dF_l(z)}{dz}\Big|_{z=z_0} \right| > 1$.

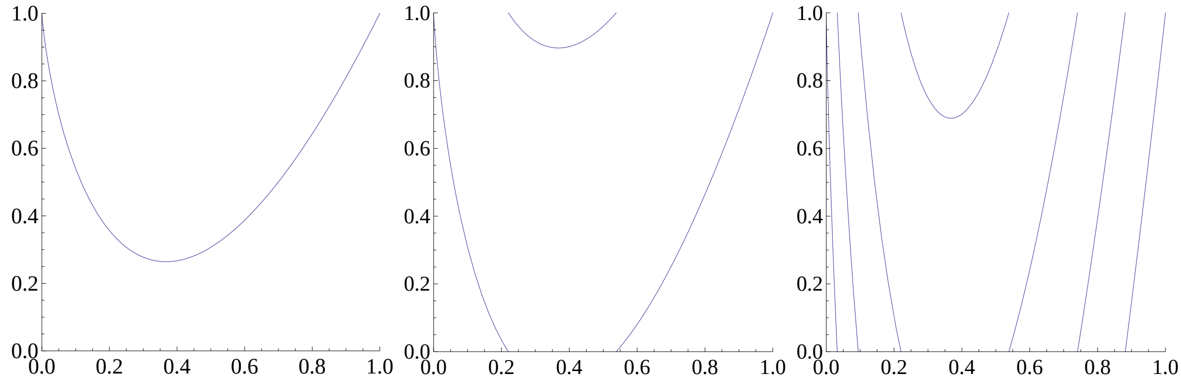

Рис. 1. Отображение $f_\Delta(z)$ при $\Delta = 2$, 3 и 9 (слева направо)

Замечание 1. Значение λ_0, фигурирующее в последней теореме, не зависит от номера l, а зависит по существу от близости $\left|\frac{dF_l(z)}{dz}\Big|_{z=z_0}\right|$ к единице и от значения ε, для которого периодическая траектория $f^n_\Delta(z)$ попадает в промежуток $d(\varepsilon)$. Это замечание важно, поскольку отображение $f_\Delta(z)$ может иметь периодические траектории бесконечного множества периодов. Вид отображения $f_\Delta(z)$ приведен на рис. 1.

Замечание 2. Известная теория одномерных отображений [22], а также результаты вычислений с помощью ЭВМ говорят о возможности существования (при значениях Δ из определенных промежутков) у отображения (29) хаотических динамических режимов. При этом возможны три типа аттракторов. В первом из них верхний индекс траекторий $z_n^{q_n}$ один и тот же при всех n. В терминах решений (4) это означает, что численность хищника ($k_2N_2(t)$) начинает резко возрастать после того, как пройдет определенное число (q_n) пиков (участников сильного возрастания) жертвы ($k_1N_1(t)$). Амплитуды (и некоторые другие характеристики) при этом в некотором диапазоне изменяются достаточно случайно. Для второго типа аттракторов характерно закономерное (например, периодическое) изменение еще и верхнего индекса, а для аттракторов третьего типа — и изменение верхнего индекса носит случайный характер.

Замечание 3. Интересно отметить, что при некоторых значениях параметра Δ может существовать несколько периодических аттракторов (отображения (29), а значит, и в системе (4)). По-видимому, это относится и к странным аттракторам. Этот факт имеет особенное значение применительно к биологии.

Замечание о случае $0 < \Delta < 1$. Сформулированные выше утверждения для рассматриваемого случая дают мало информации, поскольку все траектории отображения (29) стремятся к неподвижной точке $z_0 = 1$, а в условиях теоремы 5 окрестность этой точки исключена из рассмотрения.

Выводы. Существование сложных стационарных режимов в системе «хищник–жертва» отвечает существу дела, т.е. лучше соответствует наблюдаемым в такой системе процессам. Наличие нескольких устойчивых режимов позволяет объяснить явление срыва колебаний численности популяций из одного режима в другой.

§3. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе изучим асимптотическое (при $\lambda \to \infty$) поведение функций $x_\xi(t)$ и $y_\xi(t)$ отдельно на различных промежутках изменения аргумента t. Соответствующие результаты удобно сформулировать в виде лемм. Сразу отметим, что все оценки и асимптотические равенства в этих леммах выполняются равномерно относительно функций $\varphi(s) \in S_1$ и $\psi(s) \in S_2$, а также для значений t из указанных промежутков. Ниже одной буквой δ ($\delta \in (0,1)$) будем обозначать, вообще говоря, достаточно малые (но фиксированные) постоянные.

Приведем короткие пояснения к приводимым ниже утверждениям. На отрезке $[0,\xi]$ функция $y_\xi(t)$ задана, а выражение для $x_\xi(t)$ получаем из формулы для решений соответствующего линейного уравнения. По существу только на «малом» отрезке $[\xi, \xi+\delta]$ приходится изучать нелинейную систему двух уравнений. Показано (леммы 1 – 3), что значения $x_\xi(t)$ быстро падают в окрестность -1, а значения $y_\xi(t)$ резко возрастают до указанного ниже порога. При остальных значениях t до следующего всплеска функции $y_\xi(t)$ фактически исследуются линейные системы, поскольку по крайней мере значения одной из функций $x_\xi(t)$ или $y_\xi(t)$ оказываются мало отличающимися от -1.

В дальнейшем будем предполагать, что параметр ξ лежит в промежутке

$$\delta \leqslant \xi \leqslant 1 + \frac{(1-\delta)\ln\lambda}{\lambda}. \tag{36}$$

Лемма 5. *Имеют место асимптотические равенства:*

$$x_\xi(t) = -1 + \exp\left[\lambda t - \frac{\lambda}{1+a}\int\limits_{-1}^{t-1}(1+\tilde\varphi(s))ds - \frac{1}{1+a}\exp\lambda(t-1)(1+o(1))\right] \times$$
$$\times\,[1+o(1)]\,, \quad t\in[0,\xi], \quad \tilde\varphi(s) = \begin{cases} \varphi(s) & \text{при } -1 \leqslant s \leqslant 0 \\ x_\xi(s) & \text{при } s > 0\end{cases}; \tag{37}$$

$$t_1(\lambda,\xi) = \xi + o(1); \tag{38}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_{\xi}^{t_1(\lambda,\xi)} x_\xi(t)dt = \infty. \tag{39}$$

Докажем эту лемму. Для решений системы уравнений (4) справедливы формулы (13) и (14). Решениям $x_\xi(t)$ и $y_\xi(t)$ соответствуют в них значения $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = \xi$, причем $x_\xi(0) = y_\xi(\xi) = 0$.

Равенство (37) непосредственно вытекает из определения $x_\xi(t)$, $y_\xi(t)$ и формулы (13). Для обоснования равенства (38) рассмотрим формулы (13) и (14) на отрезке $[\xi, t_\xi]$, где $t_\xi = \min\left(t_1(\lambda,\xi), \xi + \frac{1}{\lambda}\right)$ (если $t_1(\lambda,\xi)$ не определено, полагаем $t_1(\lambda,\xi) = \infty$). На этом промежутке для функций $x_\xi(t)$ и $y_\xi(t)$ верны представления

$$x_\xi(t) = -1 + \exp\left[\frac{\lambda}{1+a}\left(a\xi + a\int\limits_{\xi}^{t} y_\xi(s)ds - \int\limits_{-1}^{t-1} x_\xi(s)ds\right)\right][1+o(1)], \tag{40}$$

$$y_\xi(t) = -1 + \exp\left[\lambda_2(t-\xi) + \lambda_2 \int\limits_\xi^t x_\xi(s)ds\right][1+o(1)]. \tag{41}$$

Формулы (40) и (41) можно объединить:

$$\begin{aligned} x_\xi(t) = -1 + \exp\Bigg[\frac{\lambda}{1+a}\Bigg(at - \int\limits_{-1}^{t-1} x_\xi(s)ds - a\int\limits_\xi^t \exp\Big[\lambda_2(\tau-\xi)+ \\ + \int\limits_\xi^\tau x_\xi(s)ds\Big][1+o(1)]d\tau\Bigg)\Bigg][1+o(1)]. \end{aligned} \tag{42}$$

Покажем, что выполняется предельное равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_\xi^{t_\xi} x_\xi(s)ds = \infty. \tag{43}$$

В предположении противного получаем, что на некоторой последовательности $\lambda_n \to \infty$ (для некоторых «начальных» функций $\varphi_n(s) \in S_1$ и $\psi_n(s) \in S_2$) рассматриваемый интеграл ограничен. Но тогда на отрезке $[\xi, t_\xi]$ для последовательности λ_n ограничена и функция

$$M(t,\xi,\lambda) = \frac{\lambda a}{1+a}\int\limits_\xi^t \exp\left[\lambda_2(\tau-\xi) + \int\limits_\xi^\tau x_\xi(s)ds\right][1+o(1)]d\tau,$$

фигурирующая в (42). Относительно функции $\int\limits_{-1}^{t-1} x_\xi(s)ds$ можно утверждать, что для $t \in [\xi, t_\xi]$

$$\int\limits_1^{t-1} x_\xi(s)ds = -t + o(\lambda^{-\delta}).$$

Учитывая это в (42), получаем, что, во-первых, на промежутке $[\xi, \xi+1/\lambda_n]$ функция $x_\xi(t)$ нулей не имеет (т.е. $t_\xi = \xi + 1/\lambda_n$), и во-вторых, на этом отрезке найдется такая универсальная постоянная m_0, что

$$x_\xi(t) \geqslant -1 + \frac{1}{2}\exp[\lambda t - m_0].$$

Ясно, что последнее неравенство противоречит условию ограниченности исходного интеграла. Таким образом, равенство (43) доказано. Из него, очевидно, будет следовать и равенство (39), если удастся установить существование $t_1(\lambda,\xi)$. Фиксируем для этого параметр $\delta \in (0,1)$. Из (43) и (41) вытекает, что

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_\xi^{\xi+\delta} y_\xi(s)ds = \infty.$$

Используя это в (40), заключаем, что

$$x_\xi(\xi+\delta) = -1 + o(1).$$

Отсюда следует существование $t_1(\lambda,\xi)$. В силу того, что параметр δ произвольно мал, приходим к обоснованию и равенства (38). Лемма доказана.

Отметим, что ограничения (36) на параметр ξ таковы, что

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda} x_\xi(\xi) = \infty.$$

Из этой леммы легко вытекает следующий результат.

Лемма 6. *Для каждого фиксированного $m > 1$ и каждого t из полуинтервала $(t_1(\lambda,\xi), m]$ имеет место равенство*

$$x_\xi(t) = -1 + o(1). \tag{44}$$

Сделаем одно замечание. В предположении о том, что значение $t_2(\lambda,\xi)$ определено, из леммы 6 следует предельное равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty} t_2(\lambda,\xi) = \infty. \tag{45}$$

Следующие два утверждения посвящены изучению функций $y_\xi(t)$. Прежде чем их сформулировать, введем одно обозначение. Положим

$$g(\xi,\varphi(s)) = \exp\left[\lambda\xi - \frac{\lambda}{1+a}\int_{-1}^{0}(1+\varphi(s))ds + \frac{1}{1+a}(1-\exp\lambda(\xi-1))\right].$$

Лемма 7. *Равномерно для $t \in [\xi+\delta, \xi+h]$ выполняется равенство*

$$y_\xi(t) = \frac{\lambda_2(1+a)}{a\lambda} g(\xi,\varphi(s))[1+o(1)]. \tag{46}$$

Доказательство. Умножим первое уравнение в (10) на $\frac{\lambda_2(1+a)}{a\lambda}$, затем сложим его со вторым и проинтегрируем сумму от ξ до t. В результате получим равенство

$$y_\xi(t) = 1 + \frac{\lambda_2(1+a)}{a\lambda}(x_\xi(\xi) - x_\xi(t)) + \lambda_2\int_\xi^t (1+x_\xi(s))ds -$$
$$- \lambda_2\int_\xi^t (1+y_\xi(s-h))(1+y_\xi(s))\,ds - \frac{\lambda_2}{a}\int_\xi^t x_\xi(s-1)(1+x_\xi(s))ds. \tag{47}$$

Асимптотическое выражение для $x_\xi(\xi)$ и $x_\xi(t)$ получаем из равенств (37) и (44) соответственно. Оценим последние три слагаемых в (47). На отрезке $[\xi,\xi+h]$ для функции $y_\xi(t)$ верно равенство (41). Из него находим, что

$$\lambda_2\int_\xi^t (1+x_\xi(s))\,ds = \ln(1+y_\xi(t)) + o(1). \tag{48}$$

В силу того, что равномерно на рассматриваемом промежутке

$$1 + y_\xi(t-h) = o(1),$$

предпоследнее слагаемое в (47) мало по сравнению с $y_\xi(t)$. В том случае, когда $\xi+h \leqslant 1$, последнее слагаемое в (47) тоже мало по порядку по сравнению с $\frac{1}{\lambda}x_\xi(\xi)$. Пусть теперь $\xi + h > 1$. Покажем, что и в этом случае влиянием последнего слагаемого в (47) на получение главного члена асимптотики $y_\xi(t)$ можно пренебречь. Для этого достаточно соответствующим образом оценить два интеграла J_1 и J_2, где

$$J_1 = \lambda_2 \int\limits_{\xi}^{1+\frac{2\ln\lambda}{\lambda}} x_\xi(s-1)(1+x_\xi(s))ds;\, J_2 = \lambda \int\limits_{1+\frac{2\ln\lambda}{\lambda}}^{\xi+h} x_\xi(s-1)(1+x_\xi(s))ds.$$

Из формул (37) и (48) получаем оценку для J_1:

$$|J_1| \leqslant \lambda_2\lambda^2(1+o(1)) \ln\left[1 + y_\xi\left(1 + \frac{2\ln\lambda}{\lambda}\right)\right].$$

Оценим затем J_2. Учитывая равенство (37) в формуле (13), получим неравенство

$$1 + x_\xi(t) \leqslant 2\exp\left[\lambda t - \frac{1}{2(1+a)}\exp(\lambda(t-1))\right],$$

которое справедливо для всех $t \in [1, \xi+h]$. Таким образом,

$$|J_2| \leqslant 3\lambda_2 \int\limits_{1+\frac{2\ln\lambda}{\lambda}}^{\xi+h} \exp\left[2\lambda t - \lambda - \frac{1}{2(1+a)}\exp(\lambda(t-1))\right]dt.$$

Отсюда ясно, что $J_2 = o(1)$.

Для обоснования итогового результата осталось лишь учесть полученные выше оценки в формуле (47). Лемма доказана.

Рассмотрим затем функцию $y_\xi(t)$ на отрезке $[\xi+h, \xi+2h]$ Положим в формуле (14) $\tau_2 = \xi + h$ и воспользуемся результатами лемм 6 и 7. На этом пути сразу приходим к следующему выводу.

Лемма 8. *Для каждого $m > \xi + h$ равномерно для значений t из отрезка $[\xi + h + \delta h, m]$ верно равенство*

$$y_\xi(t) = -1 + \exp\left[-\frac{\lambda_2\Delta\delta}{\lambda}g(\xi,\varphi(s))(1+o(1))\right]. \tag{49}$$

В частности,

$$y_\xi(\xi+2h) = -1 + \exp\left[-\frac{\lambda_2 h}{\lambda}g(\xi,\varphi(s))(1+o(1))\right]. \tag{50}$$

Отметим, что из леммы 8 вытекает существование $\tau_1(\lambda,\xi)$, если λ достаточно велико.

Лемма 9. *При всех достаточно больших значениях λ определено выражение $t_2(\lambda,\xi)$.*

Доказательство. Из соотношений (37), (49) и формулы (13), рассматриваемой при $\tau_1 = 1$, находим асимптотическое выражение для $x_\xi(2+h)$:

$$x_\xi(2+h) = -1 + \exp\left[-\Delta_0 g\left(\xi,\varphi(s)\right)(1+o(1))\right], \tag{51}$$

где Δ_0 — некоторая положительная постоянная, точное значение которой несущественно. Рассмотрим затем формулу (13) при $\tau_1 = 2+h$ и $t > \tau_1$. Условия $x_\xi(t), y_\xi(t) > -1$ и (51) приводят к неравенству

$$x_\xi(t) < -1 + \exp\left[\lambda(t-2-h) - \Delta_0 g\left(\xi,\varphi(s)\right)(1+o(1))\right]. \tag{52}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что равномерно для всех t из промежутка $[2+h, \frac{\Delta_0-\delta}{\lambda} g\left(\xi,\varphi(s)\right)]$ выполняется равенство (44). Но тогда равномерно на том же промежутке изменения t для функции $y_\xi(t)$ верно соотношение

$$y_\xi(t) = -1 + \exp\left[\frac{-\lambda_2\Delta}{\lambda} g\left(\xi,\varphi(s)\right)(1+o(1))\right]. \tag{53}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно в (14) заменить τ_2 на $\xi+2h$ и учесть равенства (44) и (49).

Положим далее $t_0 = \min\left(\tilde t_2(\lambda,\xi), \frac{\Delta_0+\frac{1}{2}(\Delta-\delta)}{\lambda} g\left(\xi,\varphi(s)\right)\right)$, где $\tilde t_2(\lambda,\xi) = t_2(\lambda,\xi)$, если последнее выражение определено, и $\tilde t_2(\lambda,\xi) = \infty$ в противном случае. Из (53) и (14) следует, что для $t \in [\frac{\Delta_0-\delta}{\lambda} g\left(\xi,\varphi(s)\right), t_0]$ выполняется неравенство

$$y_\xi(t) \leqslant -1 + \exp\left[\lambda_2 t - \frac{\lambda_2(\Delta_0+\Delta-\delta)}{\lambda} g\left(\xi,\varphi(s)\right)\right]. \tag{54}$$

Выводы относительно функции $x_\xi(t)$ таковы. Во-первых, из равенства (44), (53) и формулы (13) при $\tau_1 = 2+h$ и $t \in [2+h, \frac{\Delta_0-\delta}{\lambda} g\left(\xi,\varphi(s)\right)]$ вытекает, что

$$x_\xi\left(\frac{\Delta_0-\delta}{\lambda} g\left(\xi,\varphi(s)\right)\right) = -1 + \exp\big[-\delta g\left(\xi,\varphi(s)\right)(1+o(1))\big]. \tag{55}$$

Во-вторых, соотношения (54), (55) и (3) для $\tau_1 = \frac{\Delta_0-\delta}{\lambda} g\left(\xi,\varphi(s)\right)$ позволяют заключить, что имеет место неравенство

$$x_\xi(t) > -1 + \exp\left[\frac{\lambda a}{1+a}\left(t - \frac{\Delta_0-\delta}{\lambda} g\left(\xi,\varphi(s)\right)\right) - \delta g\left(\xi,\varphi(s)\right)(1+o(1))\right], \tag{56}$$

в котором $t \in [\frac{\Delta_0-\delta}{\lambda} g\left(\xi,\varphi(s)\right), t_0]$. Отсюда получаем, что необходимо

$$t_0 = t_2(\lambda,\xi) < \frac{\Delta_0+\frac{1}{2}\Delta-\delta}{\lambda} g\left(\xi,\varphi(s)\right). \tag{57}$$

Иначе, т.е. при $t_0 = \frac{\Delta_0+\frac{1}{2}\Delta-\delta}{\lambda} g\left(\xi,\varphi(s)\right)$, правая часть (56) будет сколь угодно велика при $\lambda\to\infty$ и $t = t_0$. Лемма доказана.

Поведение функции $x_\xi t$ на отрезке $[m, t_2(\lambda,\xi)]$ $(m > 1+h)$ описывает следующее утверждение.

Лемма 10. *Равномерно для значений t из промежутка $[m, t_2(\lambda,\xi)-\delta]$ имеет место равенство (44), а равномерно относительно $t \in [t_2(\lambda,\xi)-1, t_2(\lambda,\xi)]$ выполнено соотношение*

$$x_\xi(t) = -1 + \exp[-\lambda(t_2(\lambda,\xi)-t)][1+o(1)]. \tag{58}$$

Кроме этого, равномерно для $t \in [\xi+2h, t_2(\lambda,\xi)]$ справедливо равенство

$$y_\xi(t) = -1 + \exp\Big[-\frac{\lambda_2\Delta}{\lambda} g\left(\xi,\varphi(s)\right)(1+o(1))\Big]. \tag{59}$$

Доказательство. Сначала обоснуем первое утверждение леммы. В лемме 6 равенство (44) доказано для $t \in [t_1(\lambda,\xi)+\delta, m]$ ($m>1$ произвольно). Используя неравенство (52) и условия (36) и (55), эту оценку для указанного промежутка легко уточнить. А именно,

$$x_\xi(t) < -1\exp\left[-\frac{\Delta_0}{2}\exp\lambda\delta\right]. \tag{60}$$

Отсюда следует, что найдется такое первое значение $t = t(\lambda)$, что $x_\xi(t(\lambda)) = -\frac{1}{\lambda}$ и $-1 < x_\xi(t) < -\frac{1}{\lambda}$ при $m < t < t(\lambda)$. В этом случае, если

$$\lim_{\lambda\to\infty}[t(\lambda) - t_2(\lambda,\xi)] = 0, \tag{61}$$

первое утверждение леммы следует автоматически. Предположим, что найдется такое $\sigma \in (0,1)$ и такие последовательности $\lambda_n \to \infty$, $\varphi(s) \in S_1$ и $\psi(S) \in S_2$, что $t(\lambda_n) - t_2(\lambda_n,\xi) \geqslant \sigma$. Формула (13) при $\tau_1 = t(\lambda)$ и $t(\lambda) \leqslant t \leqslant t(\lambda)+\delta$ доставляет равенство

$$x_\xi(t) = -1 + \frac{1}{\lambda}\exp[\lambda(t - t\lambda)(1+O(1))].$$

Но тогда для нуля $t_2(\lambda_n,\xi)$ функции $x_\xi(t)$ выполнено равенство (61). Получено противоречие. Итак, первое утверждение леммы доказано, из него и из леммы 8 и формулы (14) получаем обоснование равенства (59) равномерно для $t \in [\xi+2h, t_2(\lambda,\xi)]$. Для доказательства равенства (58) положим в (13) $\tau_1 = t_2(\lambda,\xi)$ и воспользуемся первым утверждением леммы и равенством (59). В результате получим, что для $t \in [t_2(\lambda,\xi)-2, t_2(\lambda,\xi)]$ выполнено равенство

$$x_\xi(t) = -1 + \exp[\lambda(t - t_2(\lambda,\xi))(1+O(1))]. \tag{62}$$

Используя в той же формуле (13) вместо равенства (44) равенство (62), приходим к обоснованию соотношения (58). Лемма доказана.

Завершает рассмотрение вопросов этого параграфа следующий результат.

Лемма 11. *Предположим, что определено значение $\tau_2(\lambda,\xi)$, причем*

$$t_2(\lambda,\xi)+\delta \leqslant \tau_2(\lambda,\xi) < t_2(\lambda,\xi) + 1 + \frac{(1-\delta)\ln\lambda}{\lambda}. \tag{63}$$

Тогда выполнены такие два условия. Во-первых,

$$\xi_1 = \tau_2(\lambda,\xi) - t_2(\lambda,\xi) = 1 + \frac{1}{\lambda}\ln\Big[-(1+a)\ln\big(1 - \frac{1}{1+a}\times \\ \times\exp(-\lambda) - \frac{1}{1+a}\Delta g\left(\xi,\varphi(s)\right)(1+o(1))\big)\Big]. \tag{64}$$

Во-вторых, равномерно для значений $t \in [t_2(\lambda,\xi), \tau_2(\lambda,\xi)]$ *имеет место равенство*

$$y_\xi(t) = -1 + \exp\left[\frac{\lambda_2}{\lambda}(1+a)\exp\lambda\Big(\exp\Big[-\frac{1}{1+a}\exp(-\lambda)\Big] - \right.$$
$$\left. - \exp\Big[-\frac{1}{1+a}\exp[\lambda(t-1)](1+o(1)) - \Delta g\left(\xi,\varphi(s)\right)(1+o(1))\Big]\Big)\right]. \quad (65)$$

Доказательство. Сформулированные в лемме 11 предположения вместе с равенством (59) позволяют заключить, что найдется такое первое на отрезке $[t_2(\lambda,\xi), \tau_2(\lambda,\xi)]$ значение $t(\lambda)$, для которого $y_\xi(t(\lambda)) = -\lambda^{-2}$ и $-1 < y_\xi(t) < -\lambda^{-2}$ при $t_2(\lambda,\xi) \leqslant t \leqslant t(\lambda)$. Покажем сначала, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}[t(\lambda) - \tau_2(\lambda,\xi)] = 0. \quad (66)$$

Для этого достаточно рассмотреть случай, когда

$$t(\lambda) < t_2(\lambda,\xi) + 1.$$

Пусть $t \in [t(\lambda), \tau_2(\lambda,\xi)]$. Опираясь на формулу (13) и равенство (58), для рассматриваемых значений t (и достаточно больших λ) получаем неравенство

$$x_\xi(t) > -1 + \exp\left[\frac{\lambda}{1+a}(t - t_2(\lambda,\xi)) - \frac{2}{1+a}\right].$$

Используя его в формуле (14) при $\tau_2 = t(\lambda)$, приходим к неравенству

$$y_\xi(t) > -1 + \lambda^{-2}\exp\left[\frac{\lambda_2(1+a)}{\lambda}\exp\Big(-\frac{2}{1+a}\Big)\cdot\exp[\lambda(t(\lambda) - \right.$$
$$\left. - t_2(\lambda,\xi))]\exp[\lambda(t - t(\lambda))] - 1\right]. \quad (67)$$

Отсюда уже легко следует предельное равенство (66). Одновременно из (67) и (66) вытекает, что равномерно для $t \in [t_2(\lambda,\xi), \tau_2(\lambda,\xi)]$ имеет место равенство

$$\frac{\lambda a}{1+a}\int\limits_{t_2(\lambda,\xi)}^{t}(1 + y_\xi(s))ds = o(1).$$

Учитывая это равенство в формуле (13) при $\tau_1 = t_2(\lambda,\xi)$, находим (подобно тому, как это было сделано в лемме 5) асимптотическое выражение для $x_\xi(t)$ на отрезке $[t_2(\lambda,\xi), \tau_2(\lambda,\xi)]$. Подставляя затем его в правую часть (14) (при $\tau_2 = \tau_2(\lambda,\xi)$), определяем асимптотику $y_\xi(t)$ на этом отрезке. В результате получим, что

$$y_\xi(t) = -1 + (1 + y_\xi(t_2(\lambda,\xi))(1+o(1))\exp\left[\frac{\lambda_2(1+a)}{\lambda}\exp\lambda(1+o(1))\times\right.$$
$$\left.\times\left(\exp\left[-\frac{1}{1+a}\exp(-\lambda)\right] - \exp\left[-\frac{1}{1+a}\exp[\lambda(t-1-t_2(\lambda,\xi))]\right]\right)\right]. \quad (68)$$

Для завершения обоснования леммы осталось использовать в этом равенстве ранее найденное асимптотическое выражение для $y_\xi(t_2\,(\lambda,\xi))$ и условие $y_\xi(\tau_2\,(\lambda,\xi))$=0. Лемма доказана.

Обоснование нижнего равенства в (28) достаточно громоздко. Поскольку оно проводится примерно по той же схеме, что и обоснование верхней формулы этого равенства, приводить его не будем.

§4. Обоснование теорем 1–5

Предположим сначала, что выполнены условия (63) леммы 11. Равенства (58), (59) и (65) означают, что при всех достаточно больших λ выполнено условие (26), т.е. в рассматриваемом случае имеют место утверждения теорем 1 и 2. После того, как вместо параметра ξ введем по правилу (24) новый параметр z , равенству (64) можно придать вид

$$z_1 = 1 + \Delta z \ln z + o(1). \tag{69}$$

Отсюда ясно, что условие (63) будет выполнено, если для некоторого $\varepsilon > 0$ $z \in d(\varepsilon) \bigcap d_1$ (и λ достаточно велико). Относительно индексов q_0 и p_1 точек z и z_1 можно утверждать, что

$$q_0 = p_1 = 1. \tag{70}$$

Рассмотрим затем случай, когда условие (63) места не имеет. Следовательно, для каждого $\delta \in (0,1)$ равномерно на отрезке $[t_2\,(\lambda,\xi)\,, t_2\,(\lambda,\xi) + 1 + \frac{(1-\delta)\ln\lambda}{\lambda}]$ выполнено равенство

$$y_\xi(t) = -1 + \exp\left[-\Delta(\delta)\exp(\lambda)(1+o(1))\right],$$

где через $\Delta(\delta)$ обозначена некоторая положительная постоянная, не зависящая от λ. Сделаем новое предположение. Пусть найдется такое $\delta > 0$, что равномерно на отрезке $[t_2\,(\lambda,\xi)\,, t_2\,(\lambda,\xi) + 1 + \frac{(1+\delta)\ln\lambda}{\lambda}]$ верно равенство

$$y_\xi(t) = -1 + \exp\left[-\frac{\lambda_2\Delta_1}{\lambda}\exp(\lambda)(1+o(1))\right], \tag{71}$$

в котором $\Delta_1 = \Delta_1(\lambda)$ и $\Delta_1(\lambda)$ отдельно от нуля при $\lambda \to \infty$. Значение Δ_1 легко вычисляется. В силу того, что для

$$t \in [t_2\,(\lambda,\xi)\,, t_3(\lambda,\xi)] \quad \left(t_3(\lambda,\xi) = t_2\,(\lambda,\xi) + 1 + \frac{\ln\lambda}{\lambda}(1+o(1))\right)$$

$$x_\xi(t) = -1 + \exp\left[\lambda t - \frac{1}{1+a}\exp[\lambda(t - t_2\,(\lambda,\xi) - 1)](1+O(1))\right],$$

с помощью формулы (14) при $\tau_2 = t_2\,(\lambda,\xi)$ приходим в выражению (71), где

$$\Delta_1 = \Delta g\,(\xi,\varphi(s))\exp(-\lambda) - (1+a).$$

Применим результаты § 3 для исследования функций $x_\xi(t)$ и $y_\xi(t)$ при $t > t_3\,(\lambda,\xi)$ и достаточно больших λ. В результате приходим к следующим выводам. Во-первых, определено выражение $t_4\,(\lambda,\xi)$, причем

$$\lim_{\lambda\to\infty}(t_4\,(\lambda,\xi) - t_3\,(\lambda,\xi)) = \infty.$$

Во-вторых равномерно на отрезке $[t_3(\lambda,\xi)+\delta, t_4(\lambda,\xi)-\delta]$ имеет место равенство $x_\xi(t)=-1+o(1)$, и кроме того,

$$x_\xi(t_4(\lambda,\xi)+s)\in S_1. \tag{72}$$

Наконец, в-третьих, равномерно для $t\in[t_2(\lambda,\xi)+1+\frac{(1+\delta)\ln\lambda}{\lambda}, t_4(\lambda,\xi)]$ верно соотношение (71).

Сделаем затем предположение аналогично (63). Пусть определено значение $\tau_2(\lambda,\xi)$, для которого

$$\delta\leqslant\xi_1\leqslant 1+\frac{(1-\delta)\ln\lambda}{\lambda}, \tag{73}$$

где

$$\xi_1=\tau_2(\lambda,\xi)-t_4(\lambda,\xi).$$

Положим теперь

$$z_1=\exp\left[-\frac{1}{1+a}\exp[\lambda(\xi_1-1)]\right].$$

Подобно формуле (69) тогда получаем, что

$$z_1=2+\Delta z\ln z+o(1). \tag{74}$$

Ясно, что при этом необходимо $z\in d(\varepsilon)\bigcap d_2$ (для некоторого $\varepsilon>0$) и индексы q_0 и p_1 точки z таковы, что

$$q_0=p_1=2.$$

Из равенства, аналогичного (65), вытекает включение

$$y_\xi(\tau_2(\lambda,\xi)+s)\in S_2.$$

Отсюда и из (72) следует (26). В том случае, когда сделанное выше предположение (73) не выполняется, повторяем соответствующие построения. Полученное на каждом таком шаге отображение $z\to z_1$ имеет вид

$$z_1=[k+\Delta z\ln z] \mod 1+o(1) \qquad (k=1,2,\ldots). \tag{75}$$

Объединяя (69), (74) и (75) в одно равенство, приходим в итоге к отображению отрезка $[0,1]$ в себя

$$z_1=f_\Delta(z,\lambda,\varphi(s),\psi(s)), \tag{76}$$

где

$$f_\Delta(z,\lambda,\varphi(s),\psi(s))=f_\Delta(z)+o(1). \tag{77}$$

Ограничения, при которых эти равенства имеют место, заключаются в неравенствах $z\neq\eta_i\,(i=1,\ldots,m)$ и $z\neq 0$, $z\neq 1$, т.е. для некоторого $\varepsilon>0$ имеем $z\in d(\varepsilon)$.

Одновременно с равенством (77) выполнено равенство

$$q_0=p_1.$$

Наконец, соотношение (26) устанавливает соответствие между решениями $x_\xi(t)$, $y_\xi(t)$ и траекторией отображения (76). Таким образом, теоремы 1 – 4 доказаны.

Докажем ту часть теоремы 5, в которой говорится о существовании периодического решения. Обоснование утверждения, касающегося устойчивости этого решения, будет приведено в § 6. Первое условие в (33) означает, что для некоторого $\varepsilon > 0$ периодическая траектория $z_0^{q_0}, z_1^{q1}, \ldots$ лежит внутри множества $d(\varepsilon)$. Равенства (77) и (28), условие (33) и второе условие (34) позволяют сделать вывод о том, что для каждой пары функций $\varphi(s) \in S_1$ и $\psi(s) \in S_2$ найдется такое (единственное) значение $z_0(\lambda, \varphi(s), \psi(s)) = z_0 + o(1)$, для которого решение

$$x_\xi(t), y_\xi(t) \qquad \big(\xi_0 = 1 + \lambda^{-1} \ln[-(1+a) \ln z_0(\lambda, \varphi(s), \psi(s))]\big)$$

системы (10) с начальными условиями $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ обладает тем свойством, что

$$t_{2(q_0+\ldots+q_{l-1})}(\lambda, \xi_0) - \tau_{21}(\lambda, \xi_0) = \xi_0. \tag{78}$$

Напомним, что оператор π преобразует (конусное) множество S в себя. Применяя хорошо известные результаты о существовании неподвижной точки для такого типа отображений, сразу получаем существование неподвижной точки $\varphi_0(s) \in S_1$, $\psi_0(s) \in S_2$. Равенство (78) позволяет заключить, что решение $\tilde{x}_{\xi_0}(t)$, $\tilde{y}_{\xi_0}(t)$ с начальными условиями $\varphi_0(s)$ и $\psi_0(s)$ является периодическим с периодом $T(\lambda) = t_{2(q_0+\ldots+q_{l-1})}(\lambda, \xi_0)$.

§5. Построение асимптотики решений

Изложим алгоритм нахождения (с произвольной степенью точности) асимптотических (при $\lambda \to \infty$) разложений таких решений $x_\xi(t)$, $y_\xi(t)$ системы (10), соответствующие которым последовательности $z_0, z_1, \ldots$ лежат в области $d(\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$ и произвольно мало). Изучать асимптотику решения $x_\xi(t)$, $y_\xi(t)$ удобно в терминах функций $x(t, \lambda)$, $y(t, \lambda)$, которые определяются равенствами:

$$x(t, \lambda) = x_{\xi_0}(t + t_{2p_1}(\lambda, \xi)), y(t, \lambda) = y_\xi(t + 2p_1(\lambda, \xi)).$$

Напомним здесь еще три важных для дальнейшего соотношения, Во-первых,

$$\lim_{\lambda \to \infty} [t_{2p_1}(\lambda, \xi_0) - t_{2p_1 - 1}(\lambda, \xi_0)] = \infty. \tag{79}$$

Во-вторых, для каждого $\delta > 0$ равномерно на отрезке $[t_{2p_1-1}(\lambda, \xi_0) + \delta, t_{2p_1-1}(\lambda, \xi_0) - \delta]$ справедливо асимптотическое (при $\lambda \to \infty$) равенство

$$x_{\xi_0}(t) = -1 + o(1), \tag{80}$$

в-третьих, найдется такое не зависящее от λ значение $\Delta_0 > 0$, что при $t \in [t_{2p_1-1}(\lambda, \xi_0) + h + \delta, t_{2p_1}(\lambda, \xi_0)]$ выполнено неравенство

$$y_{\xi_0}(t) \leqslant -1 + \exp\left[-\frac{\Delta_0}{\lambda} \exp \lambda\delta\right]. \tag{81}$$

Положим $t_0(\lambda) = t_{2p_1-1}(\lambda, \xi) - t_{2p_1}(\lambda, \xi)$. Из (45) вытекает, что

$$\lim_{\lambda \to \infty} t_0(\lambda) = -\infty. \tag{82}$$

Первый этап. Сначала найдем асимптотику $x(t,\lambda)$ на отрезке $[t_0(\lambda)+m,0]$, где $m>1+h$ — произвольно фиксировано. Ниже будет ясно, какой следует выбрать эту постоянную.

Для решений системы уравнений (10) имеют место формулы

$$x(t)=-1+(1+x(\tau_1,\lambda))\exp\left[-\frac{\lambda}{1+a}\left(a\int\limits_{\tau_1}^{t}y(s)ds+\int\limits_{\tau_1-1}^{t-1}x(s)ds\right)\right], \tag{83}$$

$$y(t)=-1+(1+y(\tau_2))\exp\left[\lambda_2\left(\int\limits_{\tau_2}^{t}x(s)ds-\int\limits_{\tau_2-h}^{t-h}y(s)ds\right)\right]. \tag{84}$$

Положим в (80) $\tau_1=0$ и воспользуемся тем, что равномерно на отрезке $[t_0(\lambda)+\delta,-\delta]$ имеет место равенство (80), а для $t\in[t_0(\lambda)+1+h+\delta,0]$ верно неравенство (81). В результате находим, что равномерно на отрезке $[t_0(\lambda)+1+h+\delta,0]$

$$x(t,\lambda)=-1+\exp[\lambda t(1+o(1))].$$

Снова учитывая в (83) последнее равенство и соотношение (80), получим более точную оценку

$$x(t,\lambda)=-1+\exp(\lambda t)\left[1-\frac{1}{1+a}\exp(\lambda)(\exp(\lambda t)-1)\right], \tag{85}$$

которая справедлива равномерно для $t\in[t_0(\lambda)+2+h+\delta,0]$.

Еще раз подставляя (85) в (83) (и используя там (80)), вычисляем выражение, стоящее в квадратных скобках (85), с точностью до $o(\exp(-2\lambda))$ и т.д. Отметим, что чем больше улучшается точность оценки, тем уже (с каждым шагом на 1) следует рассматривать промежуток изменения t. Однако, в связи с тем, что имеет место равенство (82), асимптотическую формулу для $x(t,\lambda)$ можно неограниченно улучшить. Сразу подчеркнем, что вывод о возможности (в рамках предлагаемого алгоритма) получения сколь угодно точных асимптотических формул относится к каждому из нижеследующих этапов.

Второй этап. Рассмотрим вопрос об асимптотике функции $x(t,\lambda)$ при $t\in[0,\xi_1]$ ($\xi_1=\tau_2(\lambda,\xi_0)-t_{2p_1}(\lambda,\xi_0)$) и функции $y(t,\lambda)$ при $t\in[t_0(\lambda)+h+\delta,\xi_1]$. Условие $y(\xi_1+s,\lambda)\in S_2$ означает, в частности, что

$$\int\limits_{\xi_1-\gamma}^{\xi_1}(1+y(t,\lambda))dt=o(1). \tag{86}$$

Вместе с равенством (85) это условие позволяет из формулы (83) получить выражение

$$x(t,\lambda)=-1+\exp\left[\lambda t-\frac{1}{1+a}\exp(\lambda(t-1))\right][1+o(1)],\quad t\in[0,\xi_1]. \tag{87}$$

Формула (84), рассматриваемая при $\tau_2 = \xi_1$, и неравенство (81) приводят к асимптотическому представлению

$$y(t,\lambda) = -1 + \exp\left[\frac{\lambda_2(1+a)}{\lambda}\exp(\lambda)\Bigg(\exp\left[-\frac{1}{1+a}\exp(\lambda(\xi_1-1))\right] - \right.$$

$$\left. - \exp\left[-\frac{1}{1+a}\exp(\lambda(t-1))\right]\Bigg)(1+o(1))\right], \quad (88)$$

в котором

$$t_0(\lambda) + h + 1 + \delta \leqslant t \leqslant \xi_1.$$

Равенство (88) дает возможность более точно найти асимптотику левой части (86). Следовательно, более точно найдем и асимптотику $x(t,\lambda)$ на отрезке $[t_0(\lambda) + h + \delta, \xi_1]$. Повторяя такую процедуру и используя результаты первого этапа, последовательно уточняем соответствующие асимптотические формулы.

Третий этап. Изучим вопрос об асимптотике функций $x(t,\lambda)$ и $y(t,\lambda)$ при условии

$$\xi_1 \leqslant t \leqslant \xi_1 + \delta. \quad (89)$$

Положим

$$M(t,\lambda) = \int\limits_{\xi_1}^{t} (1 + x(s,\lambda))ds.$$

Из результатов § 3 вытекает, что для каждого $m > 0$ при $t \in [\xi_1, \xi_1 + m]$ справедлива оценка

$$0 < M(t,\lambda) \leqslant (1+\delta)\ln x(\xi_0,\lambda). \quad (90)$$

Отметим, что имеет место равенство

$$y(t,\lambda) = 1 + \frac{\lambda_2(1+a)}{a\lambda}(x(\xi_1,\lambda) - x(t,\lambda)) + \lambda_2\int\limits_{\xi_1}^{t}(1 + x(s,\lambda))ds -$$

$$- \lambda_2\int\limits_{\xi_1}^{t}(1 + y(s-h,\lambda))(1 + y(s,\lambda))ds - \frac{\lambda_2}{a}\int\limits_{\xi_1}^{t} x(s-1,\lambda)(1 + x(s,\lambda))ds.$$

Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно умножить первое уравнение в (10) на $\lambda_2(1+a)(a\lambda)^{-1}$, сложить затем его со вторым и проинтегрировать сумму от ξ_1 до t. В терминах $M(t,\lambda)$ этому равенству можно придать вид

$$\dot M(t,\lambda) = (1 + x(\xi_1,\lambda)) + 2\lambda\gamma_0 + \lambda M(t,\lambda)\left(1 - \frac{1}{1+a}\exp[\lambda(t-1)]\right) +$$

$$+ \frac{1}{1+a}\int\limits_{\xi_1}^{t} M(s,\lambda)\exp(\lambda(s-1))ds - \lambda\gamma_0\exp[\lambda_2 M(t,\lambda)]\big(1 + o(\exp(-\frac{\delta}{\lambda}\exp\lambda\delta))\big), \quad (91)$$

где

$$\gamma_0 = \frac{a}{\lambda_2(1+a)}.$$

Здесь учтено соотношение (88). Применяя во внимание в (91) неравенства (89) и (90), получим новое соотношение

$$\dot{M}(t,\lambda) = x(\xi_1,\lambda)(1+o(1)) - \lambda\gamma_0 \exp[\lambda_2 M(t,\lambda)](1+o(1)). \qquad (92)$$

Из него уже легко следует, что равномерно на рассматриваемом промежутке

$$M(t,\lambda) = \frac{1}{\lambda_2}\ln\left(\frac{x(\xi_1,\lambda)\exp[\lambda_2 x(\xi_1,\lambda)(t-\xi_1)(1+o(1))]}{x(\xi_1,\lambda)(1+o(1)) + \lambda\gamma_0\exp[\lambda_2 x(\xi_1,\lambda)(t-\xi_1)(1+o(1))]}\right). \qquad (93)$$

Асимптотическое выражение для функции $y(t,\lambda)$ теперь получается из (93) и равенства

$$y(t,\lambda) = -1 + \exp[\lambda_2 M(t,\lambda)](1+o(1)),$$

а для нахождения соответствующего выражения для $x(t,\lambda) = 1 + M(t,\lambda)$ учтем в правой части (92) равенство (93). После того, как найдены «первые» приближения рассматриваемых функций, остальные, т.е. поправки к асимптотикам, получаются стандартным образом. Подробнее на этом останавливаться не будем.

Четвертый этап. Фиксируем произвольно $m > 2h+1$. Найдем асимптотические выражения для $x(t,\lambda)$ и $y(t,\lambda)$ на отрезке $[\xi_1+\delta, \xi_1+m]$. В § 3 уже был получен вывод, согласно которому равномерно на этом отрезке верно равенство

$$y(t,\lambda) = \frac{\lambda_2(1+a)}{a\lambda} x(\xi_1,\lambda)[1+o(1)]. \qquad (94)$$

Используя это равенство в формуле (83) при $\tau_1 = \xi_1$, сначала находим асимптотику $x(t,\lambda)$ при $t \in [\xi_1+\delta, \min(\xi_1+h, \xi_1+1)]$:

$$x(t,\lambda) = -1 + (1 + x(\xi_1,\lambda))\exp\left[-\lambda_2 x(\xi_1,\lambda)(t-\xi_1)(1+o(1)) - M_1(t,\lambda)\right], \qquad (95)$$

где положено

$$M_1(t,\lambda) = -\exp(\lambda)\left[\exp\left(-\frac{1}{1+a}\exp(\lambda(\xi_1-1))\right) - \exp\left(-\frac{1}{1+a}\exp(\lambda(t-1))\right)\right].$$

Используя равенства (94) и (95) в формуле (90) при $\tau_2{=}\xi_1{+}h$, последовательно получаем асимптотическое выражение для функции $y(t,\lambda)$ на отрезке $t \in [\xi_1+h, \xi_1+2h]$:

$$y(t,\lambda) = -1 + (1 + y(\xi_0+h,\lambda))\exp\left[-\frac{\Delta}{\lambda}x(\xi_0,\lambda)(t-\xi_0-h)(1+o(1))\right](1+o(1)) \quad (96)$$

и на отрезке $t \in [\xi_1+2h, m]$:

$$y(t,\lambda) = -1 + [1 + y(\xi_0+2h,\lambda)][1+o(1)]. \qquad (97)$$

Для того чтобы выписать асимптотику функции $x(t,\lambda)$ для значений t из промежутка $[\min(\xi_1+h, \xi_1+1), m]$, введем в рассмотрение функцию

$$M_2(t,\lambda) = \begin{cases} \lambda_2 x(\xi_1,\lambda)(t-\xi_1) & \text{, если } t \in [\xi_1+\delta, \xi_1+h]; \\ \lambda_2 h x(\xi_1,\lambda) & \text{, если } t \in [\xi_1+h, m]. \end{cases}$$

Тогда, как следует из равенств (95), (96), (97) и формулы (83) при $\tau_1 = \xi_1$, на промежутке $t \in [\xi_1 + \delta, \xi_1 + 1]$ верно соотношение

$$x(t,\lambda) = -1 + (1 + x(\xi_1,\lambda)) \exp\big[\lambda(t-\xi_1) - M_1(t,\lambda)(1+o(1)) - \\ -M_2(t,\lambda)(1+o(1))\big].$$

Поэтому для значений $t \in [\xi_1 + 1, m]$ имеем равенство

$$x(t,\lambda) = -1 + \exp\big[-M_1(1+\xi_1,\lambda)(1+o(1)) - M_2(t,\lambda)(1+o(1))\big].$$

Отметим, что отсюда можно получить асимптотическое выражение для $t_2(\lambda)$ — второго положительного нуля функции $x(t,\lambda)$.

$$t_2(\lambda) = \lambda^{-1} \exp\left[(M_1(1+\xi_1,\lambda) + M_2(h+\xi_1,\lambda))\,(1+o(1))\right].$$

Пятый этап. Осталось рассмотреть лишь следующую ситуацию. Пусть найдется такое $\Delta_0 > 0$, что равномерно для значений $t \in [t_2(\lambda), t_2(\lambda) + 1 + \delta]$ имеет место неравенство

$$y(t,\lambda) \leqslant -1 + \exp\left[-\frac{\Delta_0}{\lambda}\exp(\lambda)(1+o(1))\right].$$

Рассмотрим вопрос об асимптотике функций $x(t,\lambda)$ и $y(t,\lambda)$ для значений t из отрезка $[t_2(\lambda), t_2(\lambda){+}2]$. По сравнению с предыдущими этапами отличие здесь небольшое. Поэтому приведем лишь итоговый результат:

$$x(t,\lambda) = -1 + \exp\left[\lambda(t + t_2(\lambda)) - \tfrac{1}{1+a}\exp\left[\lambda(t - t_2(\lambda) - 1)\right](1+o(1))\right],$$

$$y(t,\lambda) = -1 + \exp\left[-\tfrac{\Delta}{\lambda}x(\xi_1,\lambda)(1+o(1)) + \lambda_2\int\limits_{t_2(\lambda)}^{t} x(s,\lambda)ds\right].$$

Сделаем одно замечание. Поскольку функции $x(t,\lambda)$ и $y(t,\lambda)$ могут быть вычислены с произвольной степенью точности (по λ), следовательно, то же самое можно сказать и об отображении $f(z,\lambda,\varphi(s),\psi(s))$, фигурирующем в § 4.

Шестой этап. В § 4 установлено существование таких периодических решений, отвечающие которым последовательности вида $\{z_n\}$ лежат (для некоторого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших λ) в области $d(\varepsilon)$. Здесь будет найдена асимптотика периода $T(\lambda)$ периодического решения. Обозначим это решение через $x_0(t,\lambda)$, $y_0(t,\lambda)$, а отвечающую ему последовательность периода l через $z_0(\lambda), z_1(\lambda), \ldots$

Введем несколько обозначений. Положим

$$\xi_i = 1 + \frac{1}{\lambda}\ln[-(1+a)\ln z_i(\lambda)] \quad (i = 0, 1, \ldots),$$
$$T_0(\lambda) = \frac{1{+}a}{\lambda}\exp\lambda,\ T_i(\lambda) = \frac{1{+}a}{\lambda}\exp\lambda\left(1 - \exp\left[-\frac{1}{1{+}a}\exp(\lambda(\xi_i{-}1))\right]\right)\ (i = 0, 1, \ldots).$$

Покажем, что имеет место равенство

$$T(\lambda) = \left[(p_l - l)T_0(\lambda) + \sum_{i=0}^{l-1} T_i(\lambda)\right](1+o(1)). \tag{98}$$

Для этого достаточно принять во внимание три простых факта. Во-первых,

$$\int\limits_0^{T(\lambda)} x_+(t,\lambda)dt = \left[(p_l - l)T_0(\lambda) + \sum_{i=1}^{l-1} T_i(\lambda)\right](1+o(1)),$$

где

$$x_+(t,\lambda) = \begin{cases} x_0(t,\lambda) & , \text{если } x_0(t,\lambda) \geqslant 0, \\ 0 & , \text{если } x_0(t,\lambda) < 0. \end{cases}$$

Во-вторых, равномерно для значений t из промежутка $[0, T(\lambda)]$, кроме содержащихся в нем p_l отрезков суммарной длины, не превосходящей $p_l + 1$, выполнено равенство

$$x_0(t,\lambda) = -1 + o(1).$$

Наконец, в-третьих, из результатов § 1 имеем равенство

$$\int\limits_0^{T(\lambda)} x_0(t,\lambda)dt = 0.$$

В [18] сформулированы некоторые выводы биологического характера, которые вытекают из приведенного здесь анализа.

Отметим, что обоснование существования устойчивых периодических решений можно получить и без учета второго равенства в формуле (28). Для того, чтобы показать это, удобно ввести несколько обозначений. Пусть $z_0, z_1, \ldots$ — экспоненциально устойчивая l — периодическая траектория отображения $\bar{z} = f_\Delta(z)$, а $\xi_0 = 1 + \lambda^{-1}\ln[-(1+a)\ln z_0]$. Через $S_{1\alpha}(\xi_0)$ обозначим множество функций из $C_{[-1,0]}$, определяемое равенством

$$S_{1\alpha}(\xi_0) = \Big\{ \exp\{\lambda(\xi_0 + \lambda^{-1}\alpha + s) - (1+a)^{-1}\exp[\lambda(\xi_0 + \lambda^{-1}\alpha + s - 1)]\} \times$$
$$\times (1 + p(s,\lambda), \text{ где } |p(s,\lambda)| \leqslant \lambda^{-\frac{1}{2}}(s \in [-1,0]) \Big\},$$

а через $S_1(\xi_0, \delta)$ обозначим выпуклую оболочку множества

$$\bigcup_{|\alpha| \leqslant \delta} S_{1\alpha}(\xi_0) \qquad (\delta > 0).$$

Положим затем $S(\xi_0, \delta) = (S_1(\xi_0, \delta) \times S_2)$, а через $\bar{\pi}$ обозначим оператор последования

$$\bar{\pi}(\varphi(s), \psi(s)) = (x(\tau_{2l} + s, \varphi, \psi), y(\tau_{2l} + s, \varphi, \psi)),$$

где $\varphi(s) \in S_1(\xi_0, \delta)$, $\psi(s) \in S_2$, $x(t,\varphi,\psi)$ и $y(t,\varphi,\psi)$ — решение системы (10) с начальными условиями $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ соответственно, заданными при $t = 0$, а через τ_k обозначен k-й неотрицательный нуль функции $y(t,\varphi,\psi)$. Незначительное обобщение уже приведенных выше выкладок позволяет заключить, что найдется такое $\delta_0 > 0$, для которого верно включение $\bar{\pi}S(\xi_0, \delta_0) \subset S(\xi_0, \delta_0)$. Отсюда, конечно, следует вывод о существовании периодического решения.

§6. Исследование устойчивости

В работах [6, 21] рассмотрен вопрос об устойчивости периодического решения обобщенного уравнения Хатчинсона при условии, что коэффициент мальтузианского роста достаточно велик. В рассматриваемом случае ситуация существенно сложнее [20], хотя некоторые построения из [6] будут использованы.

Обозначения. Исследуем вопрос об устойчивости периодического с периодом $T(\lambda)$ решения $N_{10}(t,\lambda) = 1 + x_0(t,\lambda)$, $N_{20}(t,\lambda) = 1 + y_0(t,\lambda)$ системы уравнений (4). Будем предполагать, что отвечающая периодическому решению $x_0(t,\lambda)$, $y_0(t,\lambda)$ (системы уравнений (10)) последовательность $z_0(\lambda), z_1(\lambda), \ldots$ с периодом l такова, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших λ выполнено включение $z_i(\lambda) \in d(\varepsilon)$. Отметим (§ §2.), что имеет место равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty} z_0(\lambda) = z_0,$$

где $z_0 \quad (z_0 \neq 1)$ — неподвижная точка отображения $f^l_\Delta(z)$.

Обозначим через $O = t_0(\lambda), t_1(\lambda), t_2(\lambda), \ldots$ следующие в порядке возрастания нули функции $x_0(t,\lambda)$.

В системе уравнений (4) произведем замены

$$N_1 = N_{10}(t,\lambda)[1+u], \qquad N_2 = N_{20}(t,\lambda)[1+v],$$

а получившуюся систему линеаризуем в нуле относительно u и v. В результате придем к новой системе уравнений:

$$\dot u(t) = -\frac{\lambda}{1+a}\Big[N_{10}(t-1,\lambda)u(t-1) + aN_{20}(t,\lambda)v(t)\Big], \tag{99}$$

$$\dot v(t) = \lambda_2\Big[N_{10}(t,\lambda)u(t) - N_{20}(t-h,\lambda)v(t-h)\Big]. \tag{100}$$

Обозначим затем через $u(t,\tau,u_0(s),v_0(s))$ и $v(t,\tau,u_0(s),v_0(s))$ решение при $t > \tau$ этой системы уравнений с начальным условием $u_0(s) \in C_{[-1,0]}$ и $v_0(s) \in C_{[-h,0]}$, задаваемым при $t = \tau$. Введем в рассмотрение семейство операторов $T(t,\tau,\lambda)$ сдвига по траекториям системы (99), (100), определенных равенством

$$T(t,\tau,\lambda)w_0(s) = w(t+s,\tau,w_0(s)),$$

в котором

$$w_0(s) = \begin{pmatrix} u_0(s) \\ \\ v_0(s) \end{pmatrix}, \qquad w\big(t+s,\tau,w_0(s)\big) = \begin{pmatrix} u\big(t+s,\tau,u_0(s),v_0(s)\big) \\ \\ v\big(t+s,\tau,u_0(s),v_0(s)\big) \end{pmatrix}. \tag{101}$$

Некоторый оператор сдвига за период $T(\lambda)$ можно представить в виде

$$T_0 = \tilde T_l \cdot T_l \cdot \tilde T_{l-1} \cdot T_{l-1} \cdot \ldots \cdot \tilde T_1 \cdot T_1, \tag{102}$$

где $T_i = T(t_{2p_i}(\lambda) - 2, t_{2p_{i-1}}(\lambda) + 2(1+h), \lambda)$, $\tilde T_i = T(t_{2p_i}(\lambda) + 2(1+h), t_{2p_i}(\lambda) - 2, \lambda)$, $i = 1, \ldots, l$.

Каждый из операторов T_i удобно записать в виде произведения

$$T_i = \tilde{T}_{iq_{i-q}} \cdot T_{iq_{i-q}} \cdot \ldots \cdot \tilde{T}_{i1} \cdot T_{i1}, \tag{103}$$

в котором $q_i = p_{i+1} - p_i$, $p_0 = 0$ и

$$\begin{aligned} &T_{ij} = T(t_{2(p_{i-1}+j)}(\lambda) - 2, t_{2(p_{i-1}+j-1)}(\lambda) + 2(1+h), \lambda),\\ &\tilde{T}_{ij} = T(t_{2(p_{i-1}+j)}(\lambda) + 2(1+h), t_{2(p_{i-1}+j)}(\lambda) - 2, \lambda),\\ &i = 1, \ldots, l;\ j = 1, \ldots, q_{i-1}. \end{aligned}$$

Напомним, что все операторы T_{ij} и $\tilde{T}_{ij}$ определены, действуют в $(C_{[-1,0]}, C_{[-h,0]})$ и являются вполне непрерывными.

Опираясь на асимптотические формулы, полученные в § 3, изучим свойства операторов T_{ij} и $\tilde{T}_{ij}$. Соответствующий анализ позволит затем с помощью равенства (102) и (103) получить необходимые выводы об операторе T_0.

Свойства операторов T_{ij}. Достаточно рассмотреть оператор T_{11}. Относительно функций $N_{10}(t,\lambda)$ и $N_{20}(t,\lambda)$, фигурирующих в системе (99), (100), используем лишь то, что на рассматриваемом отрезке $[2(1+h), t_2(\lambda) - 2]$ длины $\tilde{t}_0(\lambda) = t_2(\lambda) - 2(2+h)$ выполнены соотношения:

$$N_{10}(t-1,\lambda) \leqslant \exp[-3\lambda]; \quad N_{10}(t,\lambda) \leqslant \exp[-2\lambda] \tag{104}$$

и

$$N_{20}(t,\lambda), \quad N_{20}(t-h,\lambda) \leqslant \exp\left[-\frac{C_0}{\lambda}\exp(\lambda\delta_0)\right], \tag{105}$$

а для функции $\tilde{t}_0(\lambda)$ верны неравенства:

$$\frac{C_1}{\lambda}\exp(\lambda) \leqslant \tilde{t}_0(\lambda) \leqslant \frac{C_2}{\lambda}\exp(\lambda). \tag{106}$$

Положительные постоянные C_0, C_1, C_2 и δ_0 в (105) и (106) от λ не зависят.

Положим

$$w(t+s) = w(t+s, 2(1+h), w_o(s))$$

и

$$\|w(t+s)\| = \max_{-1\leqslant s\leqslant 0} |u\,(t+s, 2(1+h), u_0(s), v_0(s))| + \max_{-h\leqslant s\leqslant 0} |v\,(t+s, 2(1+h), u_0(s), v_0(s))|\,.$$

Лемма 12. *Для значений t из промежутка $[2(1+h), t_2(\lambda) - 2]$ имеет место оценка*

$$\|w(t+s)\| \leqslant M_1 \exp\left[\frac{m_1\,(t - 2(1+h))}{\tilde{t}_0(\lambda)}\right] \|w(s)\|, \tag{107}$$

причем положительные постоянные M_1 и m_1 не зависят от λ и от $w(s)$.

Доказательство. В системе уравнений (99), (100) произведем замены

$$\begin{gathered} t - 2(1+h) = \tilde{t}_0(\lambda)\tau,\\ u(2(1+h) + \tilde{t}_0(\lambda)\tau) = u_1(\tau), \quad v(2(1+h) + \tilde{t}_0(\lambda)\tau) = v_1(\tau), \end{gathered} \tag{108}$$

в результате которых получим систему

$$\dot{u}_1 = -\frac{\lambda\tilde{t}_0(\lambda)}{1+a}\Big[N_{10}(1+2h+\tilde{t}_0(\lambda)\tau,\lambda)u_1(\tau-\frac{1}{\tilde{t}_0(\lambda)})+$$
$$+aN_{20}(2(1+h))+\tilde{t}_0(\lambda)\tau,\tilde{)}v_1(\tau)\Big], \quad (109)$$

$$\dot{v}_1 = \lambda_2\tilde{t}_0(\lambda)\Big[N_{10}(2(1+h)+\tilde{t}_0(\lambda)\tau,\lambda)u_1(\tau) - N_{20}(2+h+\tilde{t}_0(\lambda)\tau,\lambda)v_1(\tau-\tfrac{h}{\tilde{t}_0(\lambda)})\Big]. \quad (110)$$

Аргумент τ меняется в (109), (110) на отрезке $[0,1]$. Из оценок (104), (105) и (106) следует, что коэффициенты этой системы равномерно для всех $\tau \in [0,1]$ стремятся к нулю при $\lambda \to \infty$. Отсюда и из общих свойств системы уравнений вида (109), (110) сразу получаем неравенство (107). Лемма доказана.

Лемма 13. *Существует такое коразмерности 2 подпространство E пространства $C = (C_{[-1,0]}, C_{[-h,0]})$ начальных условий системы (99), (100), что для каждой начальной функции $w(s) \in E$ выполнена оценка.*

$$\|T_{11}w(s)\| \leqslant M\exp[-m\exp(\lambda)]\|w(s)\,|, \quad (111)$$

где $M > 0$ и $m > 0$ не зависят от λ и от $w(s) \in E$.

О доказательстве леммы. С отрезка $[0,1]$ продолжим коэффициенты системы (109), (110) на всю числовую ось по периодичности с периодом 1. В силу того, что коэффициенты этой системы стремятся к нулю с ростом λ, заключаем, что к рассматриваемой системе уравнений применимы выводы теории возмущений. На этом пути получаем следующие выводы. Во-первых, лишь два характеристических показателя системы имеют конечный (нулевой) предел при $\lambda \to \infty$, а все остальные характеристические показатели $\mu_i(\lambda)$ таковы, что

$$\operatorname{Re}\mu_1(\lambda) = \operatorname{Re}\mu_2(\lambda) > \operatorname{Re}\mu_3(\lambda) = \operatorname{Re}\mu_4(\lambda) > \ldots,$$

причем

$$\operatorname{Im}\mu_i(\lambda) \neq 0 \ \text{ и } \lim_{\lambda\to\infty}\operatorname{Re}\mu_i(\lambda) = -\infty.$$

Во-вторых, существует такое коразмерности 2 подпространство E пространства начальных условий, что для решений

$$w_1\Big(\tau+\frac{s}{\tilde{t}_0(\lambda)}\Big) = \begin{pmatrix} u_1\Big(\tau+\dfrac{s}{\tilde{t}_0(\lambda)}\Big) \\ v_1\Big(\tau+\dfrac{s}{\tilde{t}_0(\lambda)}\Big) \end{pmatrix}$$

системы (109), (110) с начальными условиями (при $\tau = 0$) из E верна оценка

$$\|w_1(\tau+\frac{s}{\tilde{t}_0(\lambda)})\| \leqslant M\exp[\operatorname{Re}\mu_1(\lambda)\tau]\|w(s)\|, \tau\in[0,1]. \quad (112)$$

Далее, с помощью неравенств (104), (105) и (106) устанавливается, что для некоторого фиксированного $m > 0$ имеет место оценка

$$\operatorname{Re}\mu_1(\lambda) \leqslant -m\exp(\lambda).$$

Используя эту оценку в (112) и производя замены, обратные (108), приходим к обоснованию нужного утверждения.

Аналоги лемм 12 и 13 справедливы и для остальных операторов T_{ij}.

Свойства операторов $\tilde{T}_{ij}$ при $j \leqslant q_{i-1}$. Сформулируем основное утверждение пункта.

Лемма 14. *Пусть $q_{i-1} > 1$ и $j \leqslant q_{i-1}$. Тогда имеет место оценка*

$$\|\tilde{T}_{ij}w(s)\| \leqslant \|w(s)\| \exp[4\lambda(2+h)]. \tag{113}$$

Доказательство. Исследование всех операторов $\tilde{T}_{ij}$ проводится одинаково, поэтому ограничимся изучением лишь оператора $\tilde{T}_{11}$. Для этого систему уравнений (99), (100) будем рассматривать на промежутке $[t_2(\lambda)-2, t_2(\lambda)+2(1+h)]$. Коэффициенты системы удовлетворяют на этом отрезке соотношениям

$$N_{10}(t,\lambda), N_{10}(t-1,\lambda) \leqslant \exp(\lambda);$$

$$N_{20}(t,\lambda), N_{20}(t-h,\lambda) \leqslant \exp\left[-\tfrac{m_0}{\lambda}\exp(\lambda)\right],$$

где $m_0 > 0$ и не зависит от λ. Проинтегрируем левые и правые части системы (99), (100) от $t_2(\lambda)$ до некоторого t ($t > t_2(\lambda)-2$) и произведем оценки модулей функций $u(t)$ и $v(t)$, используя последние два неравенства. В результате получим, что

$$\bar{u}(t) \leqslant u_0 + \frac{\lambda a}{1+a}\exp\left(-\frac{m_0}{\lambda}\exp(\lambda)\right)\int\limits_{t_2(\lambda)-2}^{t}\bar{v}(\tau)d\tau + \frac{\lambda}{1+a}\exp(\lambda)\int\limits_{t_2(\lambda)-2}^{t}\bar{u}(\tau)d\tau, \tag{114}$$

$$\bar{v}(t) \leqslant v_0 + \lambda_2\exp(\lambda)\int\limits_{t_2(\lambda)-2}^{t}\bar{u}(\tau)d\tau + \lambda_2\exp\left(-\frac{m_0}{\lambda}\exp(\lambda)\right)\int\limits_{t_2(\lambda)-2}^{t}\bar{v}(\tau)d\tau. \tag{115}$$

Здесь положено

$$\bar{u}(t) = |u(t)|,\ \bar{v}(t) = |v(t)|, u_0 + v_0 = \|w(s)\|.$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$w_0(t) = \begin{pmatrix} w_{10}(t) \\ w_{20}(t) \end{pmatrix} = \|w(s)\| \begin{pmatrix} 1 \\ \beta(\lambda) \end{pmatrix} \exp\left[\alpha(\lambda)(t - t_2(\lambda) + 2)\right], \tag{116}$$

в определении которой $\alpha(\lambda)$ — наибольший положительный корень уравнения (относительно α)

$$\left(\alpha - \frac{1}{1+a}\exp\lambda\right)\left(\alpha - \lambda_2\exp\left(-\frac{m_0}{\lambda}\exp(\lambda)\right)\right) = \frac{\lambda\lambda_2 a}{1+a}\exp\left(\lambda - \frac{m_0}{\lambda}\exp(\lambda)\right),$$

а для $\beta(\lambda)$ верно равенство

$$\beta(\lambda) = \lambda_2(\alpha(\lambda) - \lambda_2\exp\left[-\frac{m_0}{\lambda}\exp(\lambda) - \alpha(\lambda)h\right]^{-1}\exp(\lambda).$$

Простой анализ показывает, что при $\lambda \to \infty$

$$\alpha(\lambda) = \lambda(1 + o(1)), \quad \beta(\lambda) = \frac{\lambda_2}{\lambda}\exp(\lambda)(1 + o(1)). \tag{117}$$

Непосредственно проверяем, что $w_0(t)$ является решением системы уравнений

$$w_1(t) = \|w(s)\| + \frac{\lambda a}{1+a}\exp(-\frac{m_0}{\lambda}\exp(\lambda)\int\limits_{t_2(\lambda)-2}^{t} w_2(\tau)d\tau +$$

$$+ \frac{\lambda}{1+a}\exp(\lambda)\int\limits_{t_2(\lambda)-2}^{t} w_1(\tau-1)d\tau, \tag{118}$$

$$w_2(t) = \beta(\lambda)\|w(s)\| + \lambda_2\exp(\lambda)\int\limits_{t_2(\lambda)-2}^{t} w_1(\tau)d\tau +$$

$$+ \lambda_2(-\frac{m_0}{\lambda}\exp(\lambda))\int\limits_{t_2(\lambda)-2}^{t} w_2(\tau-h)d\tau. \tag{119}$$

Положим затем

$$q_1(t) = w_{10}(t) - \bar{u}(t), \quad q_2(t) = w_{20}(t) - \bar{v}(t).$$

Из соотношений (114), (115), (118), (119) вытекает, что при $t \geqslant t_2(\lambda) - 2$ верны неравенства

$$q_1(t) \geqslant \|w(s)\| - u_0 + \tfrac{\lambda a}{1+a}\exp(-\tfrac{m_0}{\lambda}\exp(\lambda))\int\limits_{t_2(\lambda)-2}^{t} q_2(\tau)d\tau + \tfrac{\lambda}{1+a}\exp(\lambda)\int\limits_{t_2(\lambda)-2}^{t} q_1(\tau-1)d\tau,$$

$$q_2(t) \geqslant \beta(\lambda)\|w(s)\| - v_0 + \lambda_2\exp(\lambda)\int\limits_{t_2(\lambda)-2}^{t} q_1(\tau)d\tau + \lambda_2\exp(-\tfrac{m_0}{\lambda}\exp(\lambda))\int\limits_{t_2(\lambda)-2}^{t} q_2(\tau-h)d\tau.$$

По построению $q_1(t) \geqslant 0$ при $t_2(\lambda) - 3 \leqslant t \leqslant t_2(\lambda) - 2$ и $q_2(t) \geqslant 0$ при $t_2(\lambda) - 2 - h \leqslant t \leqslant t_2(\lambda) - 2$. Отсюда и из последних двух неравенств последовательно получаем, что $q_1(t), q_2(t) \geqslant 0$ при $t_2(\lambda) - 2 \leqslant t \leqslant t_2(\lambda) - 2 + h_0 \quad (h_0 = \min(1, h))$ при $t_2(\lambda) - 2 + h_0 \leqslant t \leqslant t_2(\lambda) - 2 + 2h_0$ и т.д. Таким образом, установлено, что

$$\bar{u}(t) \leqslant w_{10}(t), \qquad \bar{v}(t) \leqslant w_{20}(t).$$

Для того, чтобы получить формулу (113), осталось воспользоваться равенствами (116) и (117). Лемма доказана.

Свойства операторов $\tilde{T}_{iq_{i-1}}$. Снова ограничимся изучением оператора $\tilde{T}_{1q_0}$. Через $\tau_2(\lambda)$ обозначим третий положительный нуль функции $N_{20}(t, \lambda) - 1$. Фиксируем затем параметр $\sigma \in (0, 1)$ (в дальнейшем он будет выбран достаточно малым). Оператор $\tilde{T}_{1q_0}$ удобно представить в виде произведения трех операторов $\tilde{T}_{1q_0} = \tilde{T}_3^1\tilde{T}_2^1\tilde{T}_1^1$, где

$$\tilde{T}_1^1 = T(\tau_2(\lambda) - \sigma, t_{2q_0}(\lambda) - 2, \lambda); \quad \tilde{T}_2^1 = T(\tau_2(\lambda) + \sigma, \tau_2(\lambda) - \sigma, \lambda);$$
$$\tilde{T}_3^1 = T(t_{2q_0}(\lambda) + 2(1 + h), \tau_2(\lambda) + \sigma, \lambda).$$

Из асимптотических формул § 5 вытекает, что на промежутке $[t_{2q_0}(\lambda)-2, \tau_2(\lambda-\sigma)]$ выполнены соотношения

$$\begin{gathered} N_{10}(t-1,\lambda), N_{10}(t,\lambda) \leqslant \exp(\lambda); \\ N_{20}(t-h,\lambda), N_{20}(t,\lambda) \leqslant \exp\left[-\tfrac{m_1(\sigma)\exp(\lambda)}{\lambda}\right]. \end{gathered} \tag{120}$$

Поэтому для оператора $\tilde{T}_1^1$ верна оценка

$$\|\tilde{T}_1^1 w(s)\| \leqslant \|w(s)\| \exp(\lambda c_1(\sigma)). \tag{121}$$

В этих формулах $m_1(\sigma)$ и $c_1(\sigma)$ — некоторые положительные постоянные, не зависящие от λ. То же самое будет относиться к фигурирующим ниже постоянным $m_i(\sigma)$ и $c_i(\sigma)$. Обоснование неравенства (121) следует из леммы 14 и оценок (120). Доказательство соответствующих оценок и для операторов $\tilde{T}_2^1$ и $\tilde{T}_3^1$ повторяет рассуждения, используемые при обосновании леммы 14. Поэтому ограничимся тем, что выпишем неравенства, аналогичные (120), и приведем итоговые оценки.

Пусть сначала $t \in [\tau_2(\lambda)+\sigma, t_{2q_0}(\lambda)+2(1+h)]$. Оценки на функции $N_{10}(t)$ и $N_{20}(t)$ таковы:

$$\begin{gathered} N_{10}(t-1,\lambda) \leqslant \exp(\lambda), \qquad N_{10}(t,\lambda) \leqslant \exp(-m_2(\sigma)\exp(\lambda)); \\ N_{20}(t-h,\lambda), \qquad N_{20}(t,\lambda) \leqslant \exp(\lambda). \end{gathered}$$

Тогда найдется такая постоянная $C_2(\sigma)$, что

$$\|\tilde{T}_3^1 w(s)\| \leqslant \|w(s)\| \exp(\lambda c_2(\sigma)). \tag{122}$$

Рассмотрим оставшийся случай $t \in [\tau_2(\lambda)-\sigma, \tau_2(\lambda)+\sigma]$. Функции $N_{10}(t,\lambda)$ и $N_{20}(t,\lambda)$ здесь таковы, что

$$\begin{gathered} N_{10}(t-1,\lambda) \leqslant \exp(\lambda\sigma), \quad N_{10}(t,\lambda) \leqslant \exp(\lambda); \\ N_{20}(t-h,\lambda) \leqslant \exp\left[-\tfrac{m_2}{\lambda}\exp(\lambda)\right], \quad N_{20}(t,\lambda) \leqslant \lambda^{-1}\exp(\lambda). \end{gathered}$$

Нужные оценки для $\tilde{T}_2^1$ имеют вид

$$\|\tilde{T}_2^1 w(s)\| \leqslant \|w(s)\| \exp[m_2(\sigma)\exp(\lambda)], \tag{123}$$

причем

$$\lim_{\sigma\to 0} m_0(\sigma) = 0. \tag{124}$$

Неравенства (121), (122) и (126) позволяют получить оценку для $\tilde{T}_{1q_0}$, которой для всех достаточно больших значений λ и для каждого $\sigma > 0$ можно придать вид

$$\|\tilde{T}_{1q_0} w(s)\| \leqslant \|w(s)\| \exp[2m_0(\sigma)\exp(\lambda)]. \tag{125}$$

Свойства операторов T_0. Из (102) и (103) и полученных выше результатов вытекает, что найдется такое коразмерности 2 подпространство E пространства начальных условий системы (99), (100), что для всех достаточно больших λ и для каждой функции $w(s) \in E$ верна оценка

$$\|T_0 w(s)\| \leqslant \|w(s)\| \exp[c\lambda + (c_0 m_0(\sigma) - m)\exp(\lambda)], \tag{126}$$

в которой c, c_0 и m — положительны и не зависят от λ, σ и $w(s) \in E$, а положительная функция $m_0(\sigma)$ параметра σ не зависит от λ и $w(s) \in E$ и такова, что имеет место равенство (124). Выберем σ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$m - c_0 m_0(\sigma) > \frac{m}{2}.$$

Тогда при всех достаточно больших λ правая часть (126) стремится к нулю при $\lambda \to \infty$. Отсюда заключаем, что все мультипликаторы (собственные значения T_0), кроме не более двух, лежат в области комплексной плоскости, выделяемой неравенством

$$|\lambda| \leqslant \delta_0 < 1.$$

В силу автономности исходной системы (4), один мультипликатор равен 1. Таким образом, неизвестно лишь поведение одного мультипликатора. Обозначим его через $\mu(\lambda)$. Ясно, что этот мультипликатор вещественный. Следующий пункт посвящен изучению $\mu(\lambda)$.

Асимптотика $\mu(\lambda)$. Отметим, что условие $\mu(\lambda) > 1\,(< 1)$ эквивалентно экспоненциальной орбитальной устойчивости $N_{10}(t,\lambda)$, $N_{20}(t,\lambda)$ (неустойчивости). Поэтому следующее утверждение завершает доказательство теоремы 5.

Лемма 15. *Имеет место равенство*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mu(\lambda) = \frac{d}{dz} f^l_\Delta(z)\bigg|_{z=z_0}. \tag{127}$$

Доказательство. В системе уравнений (4) произведем замены

$$N_1 = N_{10}(t,\lambda) + x_1, \qquad N_2 = N_{20}(t,\lambda) + y_1,$$

и линеаризуем получившуюся систему в окрестности $x_1 \equiv y_1 \equiv 0$. Оператор монодромии получившейся системы имеет, очевидно, те же мультипликаторы, что и оператор T_0. Обозначим через $x_1(t,\lambda)$, $y_1(t,\lambda)$ ($\not\equiv 0$) такое решение рассматриваемой системы, для которого выполнено условие (определение мультипликатора)

$$\begin{aligned} x_1(t+T(\lambda),\lambda) &\equiv \mu(\lambda) x_1(t,\lambda),\\ y_1(t+T(\lambda),\lambda) &\equiv \mu(\lambda) y_1(t,\lambda) \end{aligned} \tag{128}$$

или, если $\mu(\lambda)$ — кратный мультипликатор и ему отвечает клетка Жордана, найдутся такие периодические функции $x_{10}(t,\lambda)$, $y_{10}(t,\lambda)$, что

$$\begin{aligned} x_1(t+T(\lambda),\lambda) &\equiv \mu(\lambda) x_1(t,\lambda) + x_{10}(t,\lambda),\\ y_1(t+T(\lambda),\lambda) &\equiv \mu(\lambda) y_1(t,\lambda) + y_{10}(t,\lambda). \end{aligned} \tag{129}$$

Отметим, что лишь незначительные изменения тех же самых построений, которые используются ниже в предположении (128), доказывают невозможность (129). Поэтому изучим $\mu(\lambda)$ только в случае (128).

Во избежание громоздких выкладок удобно отдельно рассмотреть два случая.

Первый случай. Предположим, что для достаточно больших значений λ выполнено неравенство

$$x_1^2(0,\lambda) + y_1^2(\tau_0(\lambda),\lambda) \neq 0. \tag{130}$$

Рассмотрим семейство функций

$$\varphi_1(t,\lambda,\varepsilon) = N_{10}(t,\lambda) - 1 + \varepsilon x_1(t,\lambda), \tag{131}$$

$$\psi_1(t,\lambda,\varepsilon) = N_{20}(t,\lambda) - 1 + \varepsilon y_1(t+\tau_0(\lambda),\lambda). \tag{132}$$

Легко видеть, что для всех достаточно малых ε найдутся такие значения $t_1(\lambda,\varepsilon)$ и $\tau(\lambda,\varepsilon)$, для которых выполнены следующие три условия. Во-первых,

$$\varphi_1(t_1(\lambda,\varepsilon),\lambda,\varepsilon) = 0, \quad \psi(\tau_1(\lambda,\varepsilon),\lambda,\varepsilon) = 0.$$

Во-вторых,

$$\varphi_1(s + t_1(\lambda,\varepsilon),\lambda,\varepsilon) \in S_1, \quad \psi_1(s+\tau_1(\lambda,\varepsilon),\lambda,\varepsilon) \in S_2;$$

и, наконец, в-третьих,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} t_1(\lambda,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \tau_1(\lambda,\varepsilon) = 0.$$

Решение $x_0(t,\lambda,\varepsilon)$, $y_0(t,\lambda,\varepsilon)$ системы (10) с начальными условиями $\varphi_1(s,\lambda,\varepsilon)(s \in [-1,0])$ и $\psi_1(s,\lambda,\varepsilon)(s \in [-h,0])$, заданными при $t=0$, равномерно на каждом конечном и не зависящем от ε промежутке изменения t, гладко зависит от ε. Отсюда, в частности, следует, что при $-(1+h) \leqslant t \leqslant 1+h$

$$\varphi_2(t,\lambda,\varepsilon) = x_0(t+T(\lambda),\lambda,\varepsilon) = x_0(t,\lambda) + \varepsilon\mu(\lambda)x_1(t,\lambda) + o(\varepsilon),$$

$$\psi_2(t,\lambda,\varepsilon) = y_0(t+T(\lambda)) + \tau_0(\lambda),\lambda,\varepsilon) = y_0(t+\tau_0(\lambda)) + \varepsilon\mu(\lambda)y_1(t+\tau_0(\lambda),\lambda) + o(\varepsilon).$$

Тем самым, по аналогии с предыдущим, найдутся такие значения $t_2(\lambda,\varepsilon)$ и $\tau_2(\lambda,\varepsilon)$, для которых выполнены условия:

$$\varphi(t_2(\lambda,\varepsilon),\lambda,\varepsilon) = 0, \quad \psi(\tau_2(\lambda,\varepsilon),\lambda,\varepsilon) = 0;$$
$$\varphi(s+t_2(\lambda,\varepsilon),\lambda,\varepsilon) \in S_1, \quad \psi(s+\tau_2(\lambda,\varepsilon),\lambda,\varepsilon) \in S_2;$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} t_2(\lambda,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \tau_2(\lambda,\varepsilon) = 0.$$

Приведенные здесь соотношения дают возможность выразить разность $t_2(\lambda,\varepsilon) - \tau_2(\lambda,\varepsilon)$ через $t_1(\lambda,\varepsilon) - \tau_1(\lambda,\varepsilon)$, а именно

$$t_2(\lambda,\varepsilon) - \tau_2(\lambda,\varepsilon) = \mu(\lambda)[t_1(\lambda,\varepsilon) - \tau_1(\lambda,\varepsilon) + o(\varepsilon)]. \tag{133}$$

Эту же самую разность можно выразить, используя функцию $f_\Delta(z,\lambda,\varphi(s),\psi(s))$, фигурирующую в § 2 ((28) и (29)) и равенство (25), в котором

$$\xi = \tau_0(\lambda) + \tau_1(\lambda,\varepsilon) - t_1(\lambda,\varepsilon).$$

В результате приходим к выводу, что при $\lambda \to \infty$:

$$t_2(\lambda,\varepsilon) - \tau_2(\lambda,\varepsilon) = \left[\frac{d}{dz} f^l_\Delta(z)\bigg|_{z=z_0} + o(1)\right](t_1(\lambda,\varepsilon) - \tau_1(\lambda,\varepsilon)). \tag{134}$$

Сравнивая это равенство с (133), получаем доказательство формулы (127).

Второй случай. Из соотношений (133) и (134) нельзя получить равенство (127), если $t_1(\lambda,\varepsilon)=\tau_1(\lambda,\varepsilon)$, т.е. $x_1(0,\lambda)=y_1(\tau_0(\lambda),\lambda)=0$. В этом случае соответствующие построения следует немного изменить. Вместо равенств (131) и (132) функции $\varphi_1(t,\lambda,\varepsilon)$ и $\psi_1(t,\lambda,\varepsilon)$ определим так:

$$\varphi_1(t,\lambda,\varepsilon)=N_{10}(t+t_b(\lambda),\lambda)+\varepsilon x_1(t+t_b(\lambda),\lambda)-b,$$
$$\psi_1(t,\lambda,\varepsilon)=N_{20}(t+\tau_b(\lambda),\lambda)+\varepsilon y_1(t+\tau_b(\lambda),\lambda)-b,$$

в которых $t_b(\lambda)$ и $\tau_b(\lambda)$ удовлетворяют соотношениям

$$N_{10}(t_b(\lambda),\lambda)=b,\qquad N_{20}(\tau_b(\lambda),\lambda)=b,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}t_b(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}(\tau_0(\lambda)-\tau_b(\lambda))=0.$$

Параметр b в этих формулах выбираем так, чтобы

$$x_1^2(t_b(\lambda),\lambda)+y_1^2(\tau_b(\lambda),\lambda)\neq 0.$$

Дальнейшие построения с несущественными изменениями повторяют приведенные выше. Подробнее на этом не останавливаемся. Лемма доказана.

§7. Стационарные режимы в задаче «паразит–хозяин»

Постановка задачи и результаты. Задача «паразит–хозяин» описывается той же системой уравнений, что и задача «хищник–жертва». Однако, в отличие от последней, предположение о том, что r_1 — большой параметр, уже не является биологически естественным. Наибольший интерес в задаче «паразит–хозяин» представляет случай, когда популяция «паразита» является сильно плодовитой. На математическом языке это означает, что

$$\lambda=r_2\gg 1. \tag{135}$$

Положив в первом уравнении (1) $N_2(t)\equiv 0$, получаем уравнение Хатчинсона. Это уравнение к настоящему времени достаточно хорошо изучено. Напомним, что при условии $r_1h_1<\frac{\pi}{2}$ состояние равновесия $N_1(t)\equiv(1{+}a)k_1$ экспоненциально устойчиво. Через λ_0 обозначим наибольшее из тех значений r_1h_1, при которых положительное состояние равновесия уравнения глобально устойчиво. Известно [3], что $\frac{37}{24}<\lambda_0\leqslant\frac{\pi}{2}$. Заметим, что, по-видимому, $\lambda_0=\frac{\pi}{2}$.

Теорема 6. *Пусть $r_1h_1\leqslant\lambda_0$. Тогда найдется такое $\tilde\lambda_c$, что при всех $\lambda\gg\tilde\lambda_c$ существует (непостоянное) экспоненциально орбитально устойчивое периодическое с периодом $T(\lambda)$ решение $N_0(t,\lambda)=(K_1N_1(t,\lambda),K_2N_2(t,\lambda))$ системы уравнений* (1).

Опишем структуру решения $N_0(t,\lambda)$. Сначала отметим, что нули функции $N_2(t,\lambda)$ — простые. Без потери общности можно считать, что $N_2(0,\lambda)=1$, $\dot N_2(0,\lambda)>0$. Обозначим через $t_1(\lambda)$ и $t_2(\lambda)$ первый и второй положительные нули функции $N_2(t,\lambda)-1$. Оказывается, что $t_2(\lambda,\varepsilon)=T(\lambda)$ и при $\lambda\to\infty$:

$$t_1(\lambda)=h_2(1+o(1)),\quad T(\lambda)=\lambda h_2(1+a)^2(r_1a)^{-1}(1+o(1)).$$

Далее для каждого фиксированного $m > 0$ равномерно на отрезке $[-m, 0]$ имеют место равенства

$$N_1(t,\lambda) = 1 + a + o(1), \quad N_2(t,\lambda) = \exp[\lambda(1+a)t](1+o(1)).$$

При увеличении аргумента t функция $N_2(t,\lambda)$ резко возрастает, а $N_1(t,\lambda)$ резко убывает, так что для каждого (достаточно малого) δ имеем

$$\begin{aligned}
&N_1(t,\lambda) = (1+a)\exp[-\lambda(1+a)t(1+o(1))], && t \in [\delta, h_2],\\
&N_2(t,\lambda) = \lambda(1+a)^2(r_1a)^{-1}(1+o(1)), && t \in [\delta, h_2],\\
&N_2(t,\lambda) = \lambda(1+a)^2(r_1a)^{-1}\exp[-\lambda^2(1+a)^2(r_1a)^{-1}(1+o(1))(t-h_2)], && t \in [h_2, 2h_2].
\end{aligned}$$

При дальнейшем увеличении t (до значения $T(\lambda) - m$) функция $N_1(t,\lambda)$ экспоненциально с показателем, не зависящим от λ, стремится к постоянной $(1+a)$, а для функции $N_2(t,\lambda)$ верна оценка

$$N_2(t,\lambda) = O\biggl(\exp\Bigl[-\frac{\lambda m}{2}(1+a)\Bigr]\biggr), \qquad t \in [2h_2, T(\lambda) - m].$$

Отметим, что для функций $N_1(t,\lambda)$ и $N_2(t,\lambda)$ можно получить асимптотические разложения с произвольной степенью точности.

В случае, когда

$$r_1h_1 > \frac{\pi}{2}, \tag{136}$$

ситуация существенно сложнее. При этом условии уравнение Хатчинсона (первое уравнение системы (1) при $N_2(t) \equiv 0$) имеет медленно осциллирующее (непостоянное) периодическое периода T_0 решение $(1+a)N_0(t)$. Известно, что если $r_1h_1 - \frac{\pi}{2}$ достаточно мало или достаточно велико, то решение $(1+a)N_0(t)$ является экспоненциально орбитально устойчивым, в его область притяжения входят решения с достаточно малыми по норме начальными условиями. Естественно поэтому предполагать, что при всех $r_1h_1 > \frac{\pi}{2}$ периодическое решение $(1+a)N_0(t)$ является экспоненциально орбитально устойчивым, причем в его область притяжения входят решения с достаточно малыми по норме начальными условиями.

Введем несколько обозначений. Через $S_1(\tau)$ и $S_2(\tau)$ обозначим два зависящих от параметров $\tau \in [0, T_0]$ и от λ множества функций, которые определяются следующим образом: $S_1(\tau)$ состоит из всех таких функций $p(s,\tau) = (1+a)N_0(\tau+s) + \varphi(s) \quad (s \in [-h_1, 0])$, для которых $\varphi(s) \in C_{[-h_1,0]}$ и выполнено неравенство

$$-\lambda^{-2} \leqslant \varphi(s) \leqslant \lambda^{-2},$$

а функции $q(s,\tau)$ из множества $S_2(\tau)$ имеют вид

$$\exp\biggl[-\lambda(1+a)\int\limits_{\tau+s}^{\tau} N_2(\sigma)d\sigma\biggr](1+\psi(s)), \quad s \in [-h_2, 0],$$

где $\psi(s)$ и $\dot\psi(s) \in C_{[-h_2,0]}$, кроме того, $-\lambda^{-2} \leqslant \psi(s), \quad \dot\psi(s) \leqslant \lambda^2$.

Рассмотрим решение $K_1N_1(t)$, $K_2N_2(t)$ исходной системы уравнений с начальными условиями $k_1p(s,\tau), k_2q(s,\tau)$ из множества $S(\tau) = (S_1(\tau), S_2(\tau))$, задаваемыми при $t = 0$. Не сложно найти асимптотику при $\lambda \to \infty$ этих решений. Соответствующие асимптотические формулы показывают, что все положительные нули функции $N_2(t) - 1$ — простые. Пусть $\tau_2(\lambda, \tau, \varphi(s), \psi(s))$ — второй положительный нуль этой функции. (Отметим, что $\lambda^{-1}\tau_2(\lambda, \tau, \varphi(s), \psi(s)) = O(1)$). Обозначим через π определенный на множестве $S(\tau)$ оператор

$$\pi \begin{pmatrix} p(s,\tau) \\ q(s,\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1(\tau_2(\lambda, \tau, \varphi(s), \psi(s)) + s) \\ N_2(\tau_2(\lambda, \tau, \varphi(s), \psi(s)) + s) \end{pmatrix}.$$

Теорема 7. *Пусть выполнено условие (136). Тогда существует такое $\tilde{\lambda}_0 > 0$, что при всех $\lambda \geqslant \tilde{\lambda}_0$ для каждого $\tau \in [0, T_0]$ и каждой пары функций $(p(s,\tau), q(s,\tau)) \in S(\tau)$ найдется такое значение $\tau_1 \in [0, T_0]$, что*

$$\pi \begin{pmatrix} p(s,\tau) \\ q(s,\tau) \end{pmatrix} \in S(\tau_1).$$

Этот результат, в частности, позволяет находить асимптотику решений с начальными условиями из $S(\tau)$ при всех $t \geqslant 0$ с произвольной степенью точности.

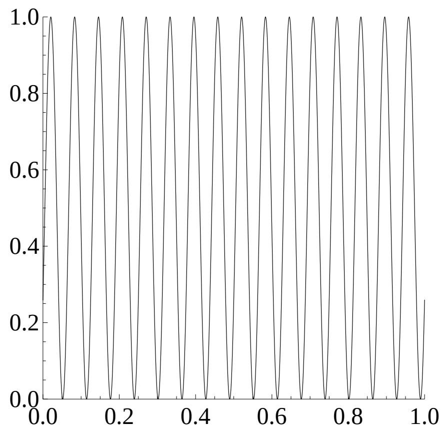

Рис. 2. Примерный вид функции $f_0(\tau, \lambda)$

Значение τ_1, о существовании которого говорится в теореме 7, определяется неоднозначно. Можно показать, что все такие значения составляют отрезок длины порядка $\exp(\gamma\lambda)$ $(\gamma > 0)$. Удобно в качестве τ_1 в дальнейшем выбирать середину этого отрезка. Тем самым, каждое решение системы (1) с начальными условиями из $S(\tau)$ можно характеризовать траекторией отображения отрезка $[0, T_0]$ в себя

$$\tau_{n+1} = f(\tau_n, \lambda, \varphi_n(s), \psi_n(s)) \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{137}$$

Отметим, что, подобно равенству (28), равномерно относительно $\varphi_n(s)$ и $\psi_n(s)$ имеет место соотношение

$$f(\tau_n, \lambda, \varphi_n(s), \psi_n(s)) = f_0(\tau_n, \lambda) + o(1),$$

показывающее, что f слабо зависит от варьирования начальных условий. Функция $f_0(\tau, \lambda)$ (см. рис. 2) такова, что для некоторого значения $d_0 > 0$ каждый отрезок длины $\lambda^{-1}d_0$ она отображает на все множество $[0, T_0]$. Отсюда можно сделать вывод о том, что для системы (1) характерны при условиях (135) и (136) нерегулярные колебания.

О некоторых выводах биологического характера. При условии, когда плодовитость популяции «паразита» велика, для обеих популяций оказывается выгодным, чтобы популяция «хозяина» была более плодовита (т.е. выгодно увеличить r_1) и обе популяции были более «оборотистыми» (т.е. выгодно уменьшить h_1 и h_2). Эти выводы хорошо согласуются с представлениями экологов.

Роль коэффициента давления a здесь совсем иная, нежели в исследованной выше задаче «хищник–жертва». Если популяции «хозяина» выгодно, чтобы этот коэффициент был как можно меньше, то для популяции «паразита» наиболее благоприятные условия наступают при $a = 1$ (увеличивается минимум численности и уменьшается промежуток времени, на котором численность ниже средней). Этот вывод весьма любопытен. Из него (и из (2)) следует, что хорошо приспособившаяся популяция «паразита» уменьшает среднюю численность популяции «хозяина» примерно в два раза.

Интересно сравнить получающиеся здесь стационарные режимы для популяции «паразита» и стационарный режим (периодическое решение) уравнения Хатчинсона при большом мальтузианском коэффициенте [6, 21]. Структурно они близки в том смысле, что быстрый рост численности чередуется с еще более быстрым ее убыванием и длительным периодом восстановления средней численности. Однако в рассматриваемом здесь случае колебания происходят существенно безопаснее: минимум численности гораздо выше по порядку, а время восстановления существенно меньше. Таким образом, тесное взаимодействие популяций «хозяина» и «паразита» оказывается полезным последней. Сказанное здесь говорит в пользу вывода о том, что сложность может повышать стабильность экосистемы.

§8. Обсуждение результатов

Начнем с простейшего случая одной изолированной популяции, обитающей в однородной среде. В этом случае динамика изменения численности $N(t)$ популяции описывается обобщенным уравнением Хатчинсона:

$$\dot{N}(t) = r\Big[1 - \frac{1}{K}\int_{h_1}^{h_2} dr(s)N(t-s)\Big]N(t).$$

Здесь r — мальтузианский коэффициент линейного роста, K — средняя численность вида, а монотонно неубывающая функция $r(s)$ характеризует возрастную структуру популяции и способ (непрерывный или сезонный) ее размножения. Основное предположение состоит в том, что либо популяция является сильно плодовитой (т.е. $r \gg 1$), либо возраст достижения половозрелости достаточно велик (т.е. $h_2 \gg 1$). В работе автора [6] показано, что в каждом из этих случаев существует единственный биологически осмысленный устойчивый стационарный режим — периодическое решение, и дано асимптотическое описание этого режима. Сформулируем здесь несколько выводов, вытекающих из соответствующих асимптотических формул.

1. Изменение численности сильно плодовитой популяции определяется лишь самыми молодыми из всех половозрелых особей.

2. Наиболее благоприятные условия для популяции наступают тогда, когда особи лишь один раз приносят потомство.

3. Сильно плодовитому виду выгодно уменьшить возраст достижения половозрелости h_2.

4. При условии, когда h_1 велико, возрастная структура влияет на характеристики стационарного режима самым существенным образом.

5. Сильно плодовитым популяциям выгоднее иметь сезонный характер размножения, а при увеличении h_1 возрастает роль непрерывного способа размножения.

Рассмотрим затем более общее уравнение:

$$\dot{N}(t) = r\Big[1 - \frac{1}{K}\int_{h_1}^{h_2} dr(s)N^{\alpha}(t-s)\Big]^{2m+1}N(t)$$

($\alpha > 0$, $m \geqslant 0$ и целое). Анализ асимптотических при $r \to \infty$ или $h_1 \to \infty$ формул для устойчивого периодического решения приводит к следующим выводам. При условии $\alpha(2m+1) > 1$ резко (по сравнению со случаем $\alpha = 1$, $m = 0$) падает средняя численность популяции, минимум ее численности, и возрастает промежуток времени, на котором численность популяции ниже средней. Тем самым это условие не является биологически осмысленным. Если же $\alpha(2m+1) < 1$, то и среднее значение, и минимум численности возрастают. Наконец, при условии $\alpha(2m+1) = 1$ основные характеристики периодического решения близки к соответствующим характеристикам для случая $\alpha = 1$, $m = 0$.

Таким образом, случай $\alpha = 1$, $m = 0$ является в некотором смысле промежуточным. Вероятно, он наиболее пригоден для описания динамики изменения численности видов.

Задача «хищник–жертва»

1. Динамика численности взаимодействующих популяций жертвы ($N_1(t)$) и хищника ($N_2(t)$) моделируется системой уравнений

$$\dot{N}_1(t) = \frac{r_1}{1+a}\Big[1 + a(1 - \frac{N_2(t)}{K_2}) - \frac{N_1(t-h_1)}{K_1}\Big]N_1(t), \tag{138}$$

$$\dot{N}_2(t) = r_2\Big[\frac{N_1(t)}{K_1} - \frac{N_2(t-h_2)}{K_2}\Big]N_2(t).$$

Здесь r_1 и r_2 — мальтузианские коэффициенты, h_1 и h_2 — средние возрасты производителей, K_1 и K_2 — средние численности жертвы и хищника соответственно, a — коэффициент давления (хищника на жертву). Отметим, что $K_1 = K_1(a)$, причем

$$K_1(a) = \frac{K_1(0)}{1+a}. \tag{139}$$

Рассмотрим наиболее интересный с биологической точки зрения случай, когда популяция жертв сильно плодовита, т.е.

$$r_1 \gg 1. \tag{140}$$

Это условие, в частности, означает, что кормовая база (популяция жертв) в отсутствие хищника совершает интенсивные колебания.

Опишем еще раз исследованную ранее структуру стационарных режимов. Сначала, исходя из биологических соображений, в пространстве начальных условий системы (138) выделяется некоторое (достаточно широкое) множество S. Через $N_1(t,\lambda)$ и $N_2(t,\lambda)$ будем обозначать решения (138) с начальными условиями (задаваемыми при $t=0$) из S. Пусть $0=t_0<t_1<\cdots$ и $0<\tau_0<\tau_1<\cdots$ – занумерованные в порядке следования все неотрицательные нули функций $N_1(t)-K_1$ и $N_2(t)-K_2$ соответственно, причем $\dot N_1(t_{2i})$, $\dot N_2(t_{2i})>0$. Для каждого номера n ($n=0,1,\cdots$) найдется такой номер p_n ($p_n\geqslant n$, $p_0=0$), что

$$t_{2p_n}<\tau_{2n}<t_{2p_n+1}.$$

Эти неравенства имеют прозрачный биологический смысл. Во-первых, они означают, что численность популяции хищника начинает интенсивно расти тогда, когда численность жертв выше средней. Во-вторых, между двумя соседними всплесками численности хищника (на промежутке времени от τ_{2n} до $\tau_{2(n+1)}$) происходит ровно $q_n=p_{n+1}-p_n$ всплесков численности жертв.

Положим $\tau_{2n}-t_{2p_n}=\xi_n$ и введем вспомогательный параметр z_n по правилу:

$$z_n=\exp\Big[-\frac{1}{1+a}\exp(r_1(\xi_n-h_1))\Big].$$

Очевидно, все выводы относительно последовательности z_n легко переформулировать для последовательности ξ_n. Основной математический результат такой. Последовательность z_n задается отображением

$$z_{n+1}=f_\Delta(z_n)+o(r_1^{-1}),$$

где функция $f_\Delta(z)$ определяется так: для всех тех z, для которых $0<k+\Delta z\ln z\leqslant 1$ ($k=1,2,\cdots$; $\Delta=r_2h_2\cdot a^{-1}(1+a)$), положим $f_\Delta(z)=k+\Delta z\ln z$. Тем самым, $f_\Delta(z)$ осуществляет отображение отрезка [0,1] в себя. При условии $\Delta<e$ эта функция непрерывна, а при $\Delta\geqslant e$ — разрывна и состоит из конечного числа непрерывных ветвей, количество которых слева и справа от точки $z=e^{-1}$ одинаково (и равно наименьшему целому, превосходящему $e^{-1}\Delta$). Прообразы таких крайней левой и крайней правой ветвей обозначим через d_1, а прообразы следующих за ними аналогичных ветвей — через d_2 и т.д. Каждой точке $z\in(0,1)$ припишем номер γ_z, означающий, что $z\in d\gamma_z$.

Отображение $f_\Delta(z)$ позволяет достаточно полно охарактеризовать поведение решений системы (138) (с начальными условиями из S). Аттракторам (репеллерам) этого отображения отвечают аналогичные аттракторы (репеллеры) в фазовом пространстве системы (138). В частности, грубым периодическим траекториям $f_\Delta(z)$ отвечают грубые периодические решения (138) той же устойчивости. Более того, оказывается, что такую важную характеристику решений $N_1(t)$, $N_2(t)$, как индекс q_n, можно выразить с помощью $f_\Delta(z)$:

$$q_n=\gamma_{z_n}.$$

Интересно отметить, что при определенных значениях Δ (в том числе и при $\Delta<e$) может существовать несколько аттракторов. Известная в настоящее время

теория одномерных отображений [22], а также результаты численного анализа с помощью ЭВМ говорят о возможности существования у системы (138) странных аттракторов.

Для решений $N_1(t)$, $N_2(t)$ выше приведены асимптотические (при $r_1 \to \infty$) формулы. Примерный вид функций $N_1(t)$, $N_2(t)$ изображен на рис. 3. Остановимся на выводах, которые вытекают из соответствующего анализа этих формул (и из анализа свойств устойчивости рассматриваемых решений).

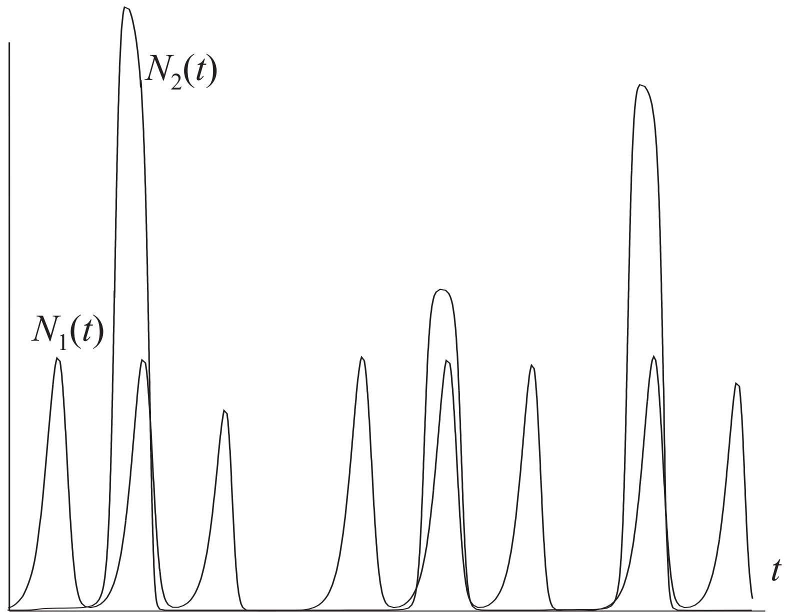

Рис. 3.

2. Прежде всего отметим, что все стационарные режимы для жертвы довольно близки друг к другу. Это говорит о том, что жертва гораздо слабее зависит от хищников, чем последние от наличия жертв. В свою очередь, стационарные режимы для хищников существенно отличаются друг от друга. При этом хищнику выгодны в наибольшей степени такие режимы, когда он реагирует (т.е. совершает всплеск численности) на каждый всплеск численности жертвы. Опасность колебаний в других режимах резко увеличивается, поскольку резко падает минимум численности хищника, и растет промежуток времени, где его численность ниже средней. Одной из интерпретаций этого утверждения является объяснение причины вымирания хищника: в результате упрощения экосистемы, когда поведение хищника определяется лишь одной популяцией жертв, его колебания могут сорваться на опасный (хотя и устойчивый) режим. (Уместно здесь отметить, что степень устойчивости стационарных режимов довольно велика.) По-видимому, сильные колебания кормовой базы ведут к необходимости расширения рациона хищника.

Наличие опасных режимов, когда хищник «пропускает» один или несколько всплесков численности жертв, определяется параметром $\Delta = r_2 h_2 (1 + a)/a$. Уменьшение этого параметра приводит к ликвидации опасных режимов. Условие $\Delta < 1$ оказывается наиболее выгодным: резко улучшаются все жизненно важные характеристики популяций. При этом хищник тем лучше контролирует поведение всей экосистемы, чем меньше значение Δ.

К уменьшению Δ, а значит — к улучшению условий существования, приводят уменьшение плодовитости (r_2) хищника и уменьшение возраста половозрелых особей (h_2). Самой подвижной характеристикой, вероятно, является коэффициент давления a. Ясно, что его увеличение может быть полезным не только хищнику, но и жертве (правда, при этом несколько падает средняя численность жертвы в силу (139)).

Обратим внимание, что перечисленные способы уменьшения коэффициента Δ несколько противоречивы. Уменьшение плодовитости хищника скорее всего приведет и к уменьшению давления хищника на жертву. С другой стороны, сильно давить на жертву может лишь достаточно плодовитый и оборотистый хищник.

3. Рассмотрим более общую задачу «хищник–жертва» с учетом возрастной структуры

$$\dot{N}_1(t) = \frac{r_1}{1+a}\Big[1 + a\Big(1 - \frac{N_2(t)}{K_2}\Big) - \frac{1}{K_1}\int_{h_1}^{h_2} dr_1(s)N_1(t-s)\Big]N_1(t), \qquad (141)$$

$$\dot{N}_2(t) = r_2\Big[\frac{N_1(t)}{K_1} - \frac{1}{K_2}\int_{h_1}^{h_2} dr_2(s)N_2(t-s)\Big]N_2(t).$$

Оказывается, что при условии сильной плодовитости жертвы ($r_1 \gg 1$) для этой системы сохраняются все выводы, полученные ранее для системы уравнений (138). Наиболее интересно здесь следующее. Динамика изменения численности не только популяции жертвы, но и хищника определяется в основном лишь самыми молодыми из половозрелых особей.

Интересно рассмотреть вопрос о стационарных режимах (141) при условии, когда возрасты половозрелости особей жертвы и хищника достаточно велики. В этой ситуации не только возрастная структура обеих популяций весьма существенна, но и возрастает роль непрерывного характера размножения. Следующий вывод весьма специфичен: необходимо резко уменьшить плодовитость популяции хищника, чтобы сохранились безопасные режимы функционирования.

4. Итоговые выводы. Уже для простейшей системы (138), описывающей задачу «хищник–жертва», характерны сложные стационарные режимы. Этот факт отвечает существу дела — лучше соответствует наблюдаемым в природе процессам. Далее, во всех, в том числе и сложных, режимах четко прослеживается универсальность хатчинсоновского характера колебаний (быстрый рост численности сменяется еще более быстрым ее падением и затем — длительным периодом восстановления средней численности).

В присутствии хищника, реагирующего на каждый всплеск численности жертвы, режим колебаний для жертвы становится безопаснее: увеличивается минимум численности, убывает длительность того периода, когда численность этой популяции ниже средней. Отсюда приходим к выводу, что усложнение экосистемы (по сравнению с экосистемой, состоящей из одной популяции) повышает ее устойчивость.

Задача «паразит–хозяин»

1. Эта задача тоже моделируется системой уравнений (138), в которой $N_1(t)$ — численность популяции хозяина, а $N_2(t)$ — паразита. Рассмотрим наиболее интересный с биологической точки зрения случай, когда популяция паразита является достаточно плодовитой, т.е.

$$r_2 \gg 1. \tag{142}$$

При этом условии изучим вопрос о стационарных режимах системы (138). Оказывается, что характер этих режимов существенно зависит от того, обладает ли кормовая база (популяция хозяина) собственными (в отсутствии паразита) колебаниями или нет.

Предположим сначала, что в отсутствие паразита ($N_2(t) \equiv 0$) положительное состояние равновесия для численности популяции хозяина является устойчивым. Математически это означает, что $2r_1h_1 < \pi$. Тогда при всех достаточно больших r_2 единственным (биологически осмысленным) устойчивым стационарным режимом системы (138) является медленно осциллирующее периодическое решение $N_{10}(t)$, $N_{20}(t)$. Приведем некоторые характеристики этого режима. Максимум $N_{10}(t)$ не зависит от r_2, а

$$\max_t N_{20}(t) \approx K_2 r_2 (1+a)^2 (r_1 a)^{-1}, \quad \min_t N_{10}(t) \approx K_1 \exp[-h_2 r_2 (1+a)],$$

$$\min_t N_{20}(t) \approx K_2 \exp[-r_2^2 h_2 (1+a)^2 (r_1 a)^{-1}].$$

Для периода $T(r_2)$ верна асимптотическая формула:

$$T(r_2) \approx r_2 h_2 (1+a)^2 (r_1 a)^{-1}.$$

Предположим затем, что

$$r_1 h_1 > \frac{\pi}{2}, \tag{143}$$

т.е. популяция хозяина совершает (в отсутствие паразита) устойчивые периодические с периодом T_0 колебания по некоторому закону $(1+a)N_0(t)$. В этом случае стационарные режимы системы (138) существенно сложнее. Кратко опишем их. На довольно большом промежутке времени численность паразита незначительна. При этом жертва совершает колебания в режиме $(1+a)N_0(t)$, а численность паразита растет и достигает в некоторый момент $t = \tau_1$ своего среднего значения. Дальнейшее увеличение t приводит к резкому падению численности хозяина и к быстрому возрастанию (до величины примерно равной $K_2 r_2 (1+a)^2 (a r_1)^{-1} N_0(\tau_1)$) численности паразита. Последняя мало меняется на протяжении отрезка времени длины h_2, а затем резко падает. Обе популяции постепенно восстанавливают численность до своих средних значений, причем популяция хозяина делает это гораздо раньше, выходя опять на режим $(1+a)N_0(t)$. Затем в некоторый момент τ_2 численность паразита достигает своего среднего значения (K_2), и ситуация примерно повторяется. Важным здесь является то, что момент τ_2 определяется фактически случайным образом. Более точно, $\tau_2^0 = \tau_2 \pmod{T_0}$ зависит в основном лишь от $\tau_1^0 = \tau_1 \pmod{T_0}$ и r_2, т.е.

$$\tau_2^0 \approx \varphi_{r_2}(\tau_1^0).$$

Функция $\varphi_{r_2}(\tau)$ осуществляет отображение отрезка $[0, T_0]$ в себя, причем каждый отрезок длины r_2^{-1} преобразуется на все множество $[0, T_0]$. Это говорит о том, что для системы (138) при условиях (142) и (143) характерны достаточно сложные нерегулярные колебания.

2. Выявим зависимость стационарных режимов от коэффициента давления a. Если популяции хозяина всегда выгодно уменьшить этот коэффициент (что биологически вполне очевидно), то для паразита благоприятнее всего случай, когда $a \approx 1$. Поэтому, имея в виду (139), можно сформулировать довольно любопытный вывод: хорошо приспособившаяся популяция паразита уменьшает среднюю численность популяции хозяина примерно в два раза.

Уменьшение плодовитости хозяина и повышение оборотистости паразита приводит к стабилизации колебаний. Роль параметра h_1 более скрыта: его уменьшение стабилизирует «собственный» стационарный режим хозяина, а тем самым и стационарный режим всей системы.

Следующие замечания относятся только к случаю (143). Размах колебаний численности паразита самым существенным образом зависит от значения численности популяции хозяина в тот момент времени $t = t_0$, когда начинается интенсивный рост численности паразита. Чем больше значение $N_0(t_0)$, тем до большей величины возрастает $N_2(t)$, но тем резче и до меньших значений происходит затем падение численностей обеих популяций. Соответственно время, в течение которого численности популяций ниже средней, тоже возрастает. При этом популяция хозяина получает возможность более длительное время существовать, практически не испытывая влияния паразита.

3. Рассмотрим вопрос о влиянии возрастной структуры на динамику изменения численностей популяций (система уравнений (141)). Как оказывается, при условии (142) влияние долгожителей популяции паразита сказывается слабо. Более того, этой популяции выгоднее, когда долгожителей вообще нет. Влияние возрастной структуры популяции хозяина на всю экосистему, вообще говоря, существенно. Оно проявляется через стационарный режим соответствующего уравнения при $N_2(t) \equiv 0$. Как общий факт отметим, что значение возрастной структуры обеих популяций возрастает при увеличении h_1 и h_2. Сезонный характер размножения, особо выгодный сильно плодовитым популяциям, теряет свои преимущества с увеличением возраста половозрелости особей.

Интересно следующее сравнение. Если в задаче «хищник–жертва» (при условии сильной плодовитости жертвы) долгожители не нужны обеим популяциям, то в задаче «паразит–хозяин» (при условии сильной плодовитости паразита) этот вывод справедлив только для популяции паразита.

Список литературы

1. *Yang Kuang.* Delay Differential Equations. With Applications in Population Dynamics. Academic Press, 1993.

2. *Wright E. M.* A non-linear differential equation // J. Reine Angew. Math. 1955. Vol. 194, №1–4. P. 66–87.

3. *Kakutani S., Markus L.* On the non-linear difference-differential equation $y(t) = (a - by(t - \tau))y(t)$. contributions to the theory of non-linear oscillations // Ann. Math. Stud. Princeton University Press. Princeton. 1958. Vol. IV. P. 1–18.

4. *Кащенко С. А.* К вопросу об оценке в пространстве параметров области глобальной устойчивости уравнения Хатчинсона // Нелинейные колебания в задачах экологии. Ярославль: ЯрГУ, 1985. С. 55 – 62. (*Kaschenko S. A.* K voprosu ob otsenke v prostranstve parametrov oblasti global'noy ustoychivosti uravneniya Khatchinsona // Nelineynyye kolebaniya v zadachakh ekologii. Yaroslavl: YarGU, 1985. P. 55 – 62 [in Russian].)

5. *Jones G. S.* The existence of periodic solutions of $f(x) = -\alpha f(x-1)[1+f(x)]$ // T. Math. Anal. and Appl. 1962. Vol. 5. P. 435–450.

6. *Кащенко С. А.* Асимптотика периодического решения обобщённого уравнения Хатчинсона // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ, 1981. С. 64 – 85. (*Kaschenko S. A.* Asimptotika periodicheskogo resheniya obobshchonnogo uravneniya Khatchinsona // Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy. Yaroslavl: YarGU, 1981. P. 64 – 85 [in Russian].)

7. *Кащенко С. А.* О периодических решениях уравнения $x(t) = -lx(t-1)[1+x(t)]$ // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ, 1978. С. 110–117. (*Kaschenko S. A.* O periodicheskikh resheniyakh uravneniya $x(t) = -lx(t-1)[1+x(t)]$ // Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy. Yaroslavl: YarGU, 1978. P. 110–117 [in Russian].)

8. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Экстремальная динамика обобщенного уравнения Хатчинсона // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49, № 1. С. 76 – 89. (English transl.: *Glyzin S.D., Kolesov A.Yu., and Rozov N.Kh.* Extremal dynamics of the generalized Hutchinson equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2009. V. 49. No 1. P. 71–83.)

9. *Колесов Ю.С.* Математические модели экологии // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1979. С. 3–40. (*Kolesov Yu.S.* Matematicheskiye modeli ekologii // Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy. Yaroslavl, 1979. P. 3–40 [in Russian].)

10. *Колесов Ю.С., Швитра Д.Й.* Автоколебания в системах с запаздыванием. Вильнюс: Мокслас, 1979. 146 с. (*Kolesov Yu.S., Shvitra D.I.* Avtokolebaniya v sistemakh s zapazdyvaniyem. Vil'nyus: Mokslas, 1979. 146 p. [in Russian].)

11. *Колесов Ю.С., Кубышкин Е.П.* Двухчастотный подход к задаче «хищник–жертва» // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1979. С. 111–121. (*Kolesov Yu.S., Kubyshkin E.P.* Dvukhchastotnyy podkhod k zadache «khishchnik–zhertva» // Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy. Yaroslavl, 1979. P. 111–121. [in Russian].)

12. *Глызин С. Д.* О стабилизирующей роли неоднородного сопротивления внешней среды в задаче «хищник–жертва» // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1982. С. 126–129. (*Glyzin S. D.* O stabiliziruyushchey roli neodnorodnogo soprotivleniya vneshney sredy v zadache «khishchnik–zhertva» // Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy. Yaroslavl, 1982. P. 126–129. [in Russian].)

13. *Захаров А.А., Колесов Ю.С., Спокойнов А.Н., Федотов Н.Б.* Теоретическое объяснение десятилетнего цикла колебаний численности млекопитающих в Канаде и Якутии // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1980. С. 79–131. (*Zakharov A.A., Kolesov Yu.S., Spokoynov A.N., Fedotov N.B.* Teoreticheskoye

ob"yasneniye desyatiletnego tsikla kolebaniy chislennosti mlekopitayushchikh v Kanade i Yakutii // Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy. Yaroslavl, 1980. P. 79–131. [in Russian].)

14. *Колесов Ю.С., Кубышкин Е.П.* Численное исследование одной системы дифференциально-разностных уравнений, моделирующей задачу «хищник–жертва» // Факторы разнообразия в математической экологии и популяционной генетике. Пущино, 1980. С. 54–62. (*Kolesov Yu.S., Kubyshkin E.P.* Chislennoye issledovaniye odnoy sistemy differentsial'no-raznostnykh uravneniy, modeliruyushchey zadachu «khishchnik–zhertva» // Faktory raznoobraziya v matematicheskoy ekologii i populyatsionnoy genetike. Pushchino, 1980. P. 54–62. [in Russian].)

15. *Захаров А.А.* Численные исследования системы уравнений Колесова, моделирующих задачу «хищник–жертва» с учетом давления хищника на жертву и его миграции за границу ареала обитания // Дифференциальные уравнения и их применение. 1981. Вып. 29. С. 9–26. (*Zakharov A.A.* Chislennyye issledovaniya sistemy uravneniy Kolesova, modeliruyushchikh zadachu «khishchnik–zhertva» s uchetom davleniya khishchnika na zhertvu i yego migratsii za granitsu areala obitaniya // Differentsial'nyye uravneniya i ikh primeneniye. 1981. No. 29. S. 9–26. [in Russian].)

16. *Глызин С.Д.* Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона // Моделирование и анализ информационных систем. 2007. Т. 14, № 3. С. 29 – 42. (*Glyzin S. D.* A registration of age groups for the Hutchinson's equation // Modeling and Analysis of Information Systems. 2007. V. 14, No 3. P. 29 – 42 [in Russian].)

17. *Кащенко С.А.* Исследование методами большого параметра системы нелинейных дифференциально-разностных уравнений, моделирующей задачу «хищник–жертва» // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266, № 4. С. 792–795. (*Kaschenko S. A.* Issledovaniye metodami bol'shogo parametra sistemy nelineynykh differentsial'no-raznostnykh uravneniy, modeliruyushchey zadachu «khishchnik–zhertva» // Dokl. AN SSSR. 1982. V. 266, № 4. P. 792–795. [in Russian].)

18. *Кащенко С.А.* Биологическое объяснение некоторых законов функционирования простейших экосистем в экстремальных случаях // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1982. С. 85–103. (*Kaschenko S. A.* Biologicheskoye ob"yasneniye nekotorykh zakonov funktsionirovaniya prosteyshikh ekosistem v ekstremal'nykh sluchayakh // Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy. Yaroslavl, 1982. P. 85–103 [in Russian].)

19. *Кащенко С.А.* Периодические решения системы нелинейных уравнений с запаздываниями, моделирующих задачу «хищник–жертва». // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1981. С. 136–143. (*Kaschenko S. A.* Periodicheskiye resheniya sistemy nelineynykh uravneniy s zapazdyvaniyami, modeliruyushchikh zadachu «khishchnik–zhertva». // Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy. Yaroslavl, 1981. P. 136–143 [in Russian].)

20. *Кащенко С.А.* Стационарные режимы в задаче «хищник–жертва»: Препринт 84.54. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. 58 с. (*Kaschenko S. A.* Statsionarnyye rezhimy v zadache «khishchnik–zhertva»: Preprint 84.54. Kiyev: In-t matematiki AN USSR, 1984. 58 p. [in Russian].)

21. *Кащенко С.А.* Асимптотика решений обобщённого уравнения Хатчинсона // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19, № 3. С. 32–62. (*Kaschenko S. A.*

Asymptotic of solutions of generalized Hutchinson's equation // Modeling and Analysis of Information Systems. 2012. V. 19, No 3. P. 32 – 62 [in Russian].)

22. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1981. 280 с. (English transl.: *Sharkovskii A.N., Maistrenko Yu.L., Romanenko E.Yu.* Difference Equations and Their Applications. Kluwer Academic Publishers, 1993. 372 p.)

Relaxation Oscillations in a System with Delays Modeling the Predator-Prey Problem

Kaschenko S. A.

P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: delay differential equation, large parameter, asymptotic, periodic solution

A new asymptotic method for investigating complex relaxation oscillations of a system with delay was offered. Applying it, we can reduce the problem of predator-prey system dynamics to problem of one-dimensional maps analysis. Some conclusions of biological nature based on the asymptotic analysis were made.

Сведения об авторе:
Кащенко Сергей Александрович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой