Модел. и анализ информ. систем. Т. **20**, № **1** (2013) 116–123

УДК 512.543

О почти аппроксимируемости конечными p-группами групп Баумслага — Солитэра

Азаров Д. Н.

Ивановский государственный университет, 153025, Россия, г. Иваново, ул. Ермака, 39

e-mail: azarovdn@mail.ru

получена 22 декабря 2012

Ключевые слова: Группа Баумслага — Солитэра, почти аппроксимируемость конечными p–группами

Пусть π — множество простых чисел. Для групп Баумслага — Солитэра получено необходимое и достаточное условие почти аппроксимируемости конечными π–группами.

1. Введение

Пусть $\mathcal{K}$ — абстрактный класс групп. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$–аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, при котором образ элемента a отличен от 1. Группа G называется почти аппроксимируемой классом $\mathcal{K}$, если она содержит $\mathcal{K}$–аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Если $\mathcal{F}$ обозначает класс всех конечных групп, то понятие $\mathcal{F}$–аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается также более тонкое свойство $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемости, где π — некоторое множество простых чисел, $\mathcal{F}_\pi$ — класс всех конечных π–групп. Если множество π состоит из одного простого числа p, то множество $\mathcal{F}_\pi$ совпадает с множеством $\mathcal{F}_p$ всех конечных p–групп.

Очевидно, что произвольная $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемая группа является почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой. С другой стороны, любая почти $\mathcal{F}$–аппроксимируемая (и, в частности, любая почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемая) группа является $\mathcal{F}$–аппроксимируемой.

Таким образом, свойство почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости является промежуточным между финитной аппроксимируемостью и $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемостью. Более того, если группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема, то она $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел.

Напомним, что группой Баумслага — Солитэра называется группа

$$G(m, n) = (a, b; b^{-1}a^m b = a^n),$$

где m и n — ненулевые целые числа. Эта группа представляет собой HNN–расширение бесконечной циклической группы с порождающим элементом a. Так как группы $G(m,n)$, $G(n,m)$ и $G(-m,-n)$ изоморфны между собой, то без потери общности можно считать, что $1 \leq m \leq |n|$ (и это по умолчанию предполагается ниже).

Хорошо известно [1, 2], что группа $G(m,n)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $m = 1$, или $m = |n|$.

Пусть p — произвольное простое число. Д. И. Молдаванский в [3] доказал, что группа $G(m,n)$ $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $m = 1$ и $n \equiv 1(\mathrm{mod} p)$, или $m = |n| = p^r$ для некоторого $r \geq 0$, причем если $m = -n$, то $p = 2$.

Рассмотрим теперь вопрос о почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости группы $G(m,n)$. Мы можем считать, что группа $G(m,n)$ финитно аппроксимируема, т. е. $m = 1$ или $m = |n|$. Здесь доказан следующий результат.

Теорема 1. *Пусть p — простое число.*

Если $m = 1$, то группа $G(m,n)$ тогда и только тогда почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема, когда p не делит n. Если $m = |n|$, то группа $G(m,n)$ почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема для любого простого числа p.

Если $m = 1$ и p не делит n, то нормальное замыкание элементов a и b^{p-1} группы $G(m,n)$ является $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой подгруппой индекса $p-1$. Если же $m = |n|$, то нормальное замыкание элементов b^2, a^m и $b^{-1}a^{-1}ba$ группы $G(m,n)$ является подгруппой индекса $2m$, аппроксимируемой конечными p–группами для любого простого числа p.

В качестве следствия из этой теоремы отметим следующее утверждение.

Следствие. *Для группы $G(m,n)$ следующие три условия равносильны между собой.*

1. Группа $G(m,n)$ финитно аппроксимируема.

2. Группа $G(m,n)$ почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

3. Группа $G(m,n)$ почти аппроксимируема классом всех нильпотентных групп.

В этом утверждении импликация $1 \Rightarrow 2$ имеет место в силу теоремы 1. Действительно, если группа $G(m,n)$ финитно аппроксимируема, то или $m = 1$, и тогда группа $G(m,n)$ почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема для всех p, не делящих n, или $m = |n|$, и тогда группа $G(m,n)$ почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема для всех простых p. Так как любая конечная p–группа нильпотентна, то имеет место импликация $2 \Rightarrow 3$. А поскольку любая конечно порожденная нильпотентная группа финитно аппроксимируема [4], то справедлива импликация $3 \Rightarrow 1$.

Таким образом, для групп Баумслага — Солитэра финитная аппроксимируемость равносильна почти аппроксимируемости нильпотентными группами. С другой стороны, существуют финитно аппроксимируемые группы Баумслага — Солитэра, которые не аппроксимируемы нильпотентными группами. Соответствующим примером служит группа $G(1,2)$, так как нижний центральный ряд группы $G(1,2)$ стабилизируется на ее коммутанте. Аналогичные примеры существуют и среди групп $G(m,m)$. Эти группы имеют нетривиальный центр, и нильпотентная аппроксимируемость группы $G(m,m)$ равносильна ее $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости для подходящего простого числа p [5].

Пусть теперь π — непустое множество простых чисел. В работах [6, 7] получены следующие необходимые и достаточные условия $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемости группы $G(m, n)$.

1. Группа $G(1, n)$ $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда существует π–число $l > 1$ такое, что l взаимно просто с n и порядок числа n по модулю l также является π–числом.

2. Группа $G(m, m)$ $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда число m является π–числом.

3. Группа $G(m, -m)$ $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда число m является π–числом и множество π содержит число 2.

Значительно проще дело обстоит с почти $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемостью группы $G(m, n)$. Ниже доказан соответствующий критерий, который формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Пусть π — непустое множество простых чисел. Группа $G(m, n)$ почти $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда она почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема для некоторого числа p из множества π.*

Для доказательства теорем 1 и 2 нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть π — непустое множество простых чисел. Целое число n называется π–числом, если все его простые делители принадлежат множеству π. Элемент a группы G называется π–полным, если для любого целого положительного π–числа n уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G.

Лемма 1. *Если группа G $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема, то она не содержит π–полных элементов отличных от единицы.*

Доказательство. Пусть g — π–полный элемент $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемой группы G. И пусть φ — произвольный гомоморфизм группы G на конечную π–группу. Так как в конечной π–группе, очевидно, нет π–полных элементов отличных от 1, а элемент $g\varphi$ наследует π–полноту от элемента g, то $g\varphi = 1$. Отсюда и из $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемости группы G следует, что $g = 1$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если группа G почти $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема, то она не содержит π–полных элементов бесконечного порядка.*

Доказательство. Пусть g — π–полный элемент почти $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемой группы G. Обозначим через F какую-нибудь $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемую подгруппу конечного индекса группы G, а через m — индекс подгруппы F в группе G. Без потери общности можно считать, что подгруппа F нормальна в группе G. Тогда для каждого элемента a группы G элемент a^m принадлежит F. Поэтому элемент g^m принадлежит подгруппе F и является π–полным элементом в этой подгруппе. Таким образом, g^m — π–полный элемент $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемой группы F. Поэтому в силу леммы 1 $g^m = 1$. Мы видим, таким образом, что порядок элемента g конечен. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если абелева группа G не содержит π–полных элементов отличных от 1, то она $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть абелева группа G не содержит π–полных элементов отличных от 1. И пусть g — неединичный элемент группы G. Тогда для некоторого целого положительного π–числа n уравнение $x^n = g$ не разрешимо в группе G. Поэтому элемент g не принадлежит степенной подгруппе $N = G^n$, то есть элемент gN фактор–группы G/N отличен от единицы. Так как группа G/N является абелевой π–группой с ограниченными порядками элементов, то по первой теореме Прюфера группа G/N раскладывается в прямое произведение циклических π–групп и поэтому является $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемой группой. Отсюда и из того, что gN — неединичный элемент группы G/N, следует, что существует гомоморфизм σ группы G/N на конечную π–группу такой, что $(gN)\sigma \neq 1$. Тогда произведение естественного гомоморфизма $G \to G/N$ и гомоморфизма σ отображает элемент g в неединичный элемент некоторой конечной π–группы. Поэтому группа G $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G — расщепляемое расширение циклической p–группы*

$$A = (a; a^{p^n} = 1)$$

с помощью бесконечной циклической группы $B = (b)$, т. е.

$$G = (a, b; a^{p^n} = 1, b^{-1}ab = a^k),$$

где k взаимно просто с p. Тогда подгруппа $H = AB^{p-1}$ $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема.

Доказательство. Если $n = 0$, то доказываемое утверждение очевидно. Поэтому далее будем считать, что $n > 0$. Так как

$$k^{p^{n-1}(p-1)} \equiv 1 (\mathrm{mod} p^n),$$

то

$$a^{k^{p^{n-1}(p-1)}} = a.$$

С другой стороны, из определяющих соотношений группы G следует, что для любого целого положительного числа s

$$b^{-s}ab^s = a^{k^s}.$$

Из последних двух равенств следует, что

$$b^{-p^{n-1}(p-1)}ab^{p^{n-1}(p-1)} = a.$$

Поэтому подгруппа $K = AB^{p^{n-1}(p-1)}$ является прямым произведением конечной p–группы A и бесконечной циклической группы $B^{p^{n-1}(p-1)}$. Отсюда следует, что группа K $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. А поскольку подгруппа $K = AB^{p^{n-1}(p-1)}$ является нормальной подгруппой индекса p^{n-1} в группе $H = AB^{p-1}$, то и группа H $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть G — расщепляемое расширение $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой локально циклической группы A с помощью бесконечной циклической группы B. Тогда подгруппа $H = AB^{p-1}$ $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема и $[G : H] = p - 1$.*

Доказательство. Равенство $[G : H] = p - 1$ очевидно. Для доказательства $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости группы H достаточно проверить, что для каждого неединичного элемента g группы H существует гомоморфизм ε группы H на некоторую $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемую группу такой, что $g\varepsilon \neq 1$. Если $g \notin A$, то в качестве ε можно взять естественный гомоморфизм группы H на бесконечную циклическую группу H/A.

Рассмотрим теперь случай, когда $g \in A$. Так как группа A $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема, то элемент g не является p–полным. Поэтому существует степенная подгруппа $N = A^{p^s}$, не содержащая элемент g. Так как группа A является локально циклической, то A/N — локально циклическая группа. С другой стороны, по первой теореме Прюфера A/N — прямое произведение циклических p–групп. Следовательно, A/N — циклическая p–группа. Пусть ε — естественный гомоморфизм группы G на группу G/N. Тогда группа $G\varepsilon = G/N$ является расщепляемым расширением циклической p–группы $A\varepsilon = A/N$ с помощью бесконечной циклической группы $B\varepsilon$ и $H\varepsilon = A\varepsilon(B\varepsilon)^{p-1}$. Поэтому в силу леммы 4 подгруппа $H\varepsilon$ $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема, причем $g\varepsilon \neq 1$ так как $g \notin N$. Следовательно, ограничение гомоморфизма ε на H является искомым гомоморфизмом. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $G = G(1, n) = (a, b; b^{-1}ab = a^n)$ — группа Баумслага — Солитэра.*

1. Если для некоторого множества π простых чисел группа G почти $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема, то в множестве π существует простое число p, не делящее n. В частности, если группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема для некоторого простого числа p, то p не делит n.

2. Если простое число p не делит n, то нормальное замыкание элементов a и b^{p-1} группы G является $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой подгруппой индекса $p - 1$.

Доказательство. Обозначим через A нормальное замыкание элемента a в группе G. Очевидно, что A порождается всеми элементами вида $a_i = b^{-i}ab^i$, где i — произвольное целое число. Тогда соотношение $b^{-1}ab = a^n$ принимает вид $a_0^n = a_1$, и вообще,

$$a_{i-k}^{n^k} = a_i \tag{1}$$

для любого целого i и для любого целого неотрицательного числа k. Поэтому A является объединением бесконечной возрастающей последовательности циклических подгрупп

$$(a_0) \leq (a_{-1}) \leq (a_{-2}) \leq \dots \tag{2}$$

Отсюда следует, что A — локально циклическая группа без кручения.

1. Предположим, что группа G почти $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема. Тогда по лемме 2 она не содержит π–полных элементов бесконечного порядка. Покажем, что в множестве π существует простое число p, не делящее n. Допустим противное, то есть что все простые числа из π делят n. Тогда любое π–число l делит n^k для подходящего k.

Поэтому в силу (1) элемент a_i является π–полным элементом группы G, что не возможно.

2. Предположим теперь, что простое число p не делит n, то есть что p и n взаимно просты, и покажем, что в этом случае группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема.

Покажем сначала, что в группе A нет p–полных элементов отличных от 1. Пусть g — p–полный элемент группы A. Тогда для любого целого положительного числа s в группе A существует элемент g_s такой, что

$$g_s^{p^s} = g. \tag{3}$$

Так как элементы g и g_s приналежат подгруппе

$$A = \cup_{i \in Z}(a_i),$$

то

$$g = a_i^r, g_s = a_{i_s}^{r_s}, \tag{4}$$

где i, i_s, r, r_s — подходящие целые числа. Ввиду (2) числа i_s можно подобрать так, чтобы они не превосходили число i. Тогда $i_s = i - k_s$, где $k_s \geq 0$ и поэтому в силу (1)

$$a_{i_s}^{n^{k_s}} = a_i. \tag{5}$$

Из равенств (3), (4) и (5) получаем:

$$a_{i_s}^{r_s p^s} = g_s^{p^s} = g = a_i^r = a_{i_s}^{r n^{k_s}}.$$

Отсюда и из того, что порядок элемента a_{i_s} бесконечен, следует, что

$$r_s p^s = r n^{k_s}.$$

Поэтому в силу взаимной простоты чисел p и n число p^s делит r при любом s. Следовательно, $r = 0$, то есть $g = 1$.

Таким образом, A — абелева группа, не содержащая p–полных элементов отличных от 1. Поэтому в силу леммы 3 группа A $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Очевидно, что группа G является расщепляемым расширением группы A с помощью циклической группы B, порожденной элементом b, причем группа A $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема и является локально циклической. Поэтому в силу леммы 5 подгруппа $H = AB^{p-1}$ $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема и $[G : H] = p - 1$. Теперь для завершения доказательства леммы остается заметить, что подгруппа H нормальна в группе G и совпадает с нормальным замыканием элементов a и b^{p-1}.

3. Доказательство теорем

Пусть, как и выше,

$$G = G(m, n) = (a, b; b^{-1} a^m b = a^n)$$

— группа Баумслага — Солитэра, где $1 \leq m \leq |n|$.

Доказательство теоремы 1. Пусть p — простое число.

Рассмотрим сначала случай, когда $m = 1$. Если p не делит n, то в силу леммы 6 группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема, и нормальное замыкание элементов a и b^{p-1} группы G является $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой подгруппой индекса $p-1$. Наоборот, если группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема, то по лемме 6 p не делит n.

Рассмотрим теперь случай, когда $m = |n|$, т. е. когда группа G совпадает с одной из следующих двух групп:

$$G(m,m) = (a, b; b^{-1}a^m b = a^m), G(m,-m) = (a, b; b^{-1}a^m b = a^{-m}).$$

Покажем, что для любого простого числа p группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема, и нормальное замыкание H элементов b^2, a^m и $b^{-1}a^{-1}ba$ группы G является $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой подгруппой индекса $2m$. Очевидно, что

$$G/H = (a, b; a^m = 1, b^2 = 1, ab = ba)$$

— прямое произведение циклической группы порядка m и циклической группы порядка 2. Поэтому $[G : H] = 2m$. Так как $b^{-1}a^m b = a^{\pm m}$, то циклическая подгруппа M, порожденная элементом a^m, является нормальной подгруппой группы G. Поэтому элемент a^m перестановочен со всеми элементами группы G, сопряженными с элементами b^2, a^m и $b^{-1}a^{-1}ba$. Отсюда следует, что a^m лежит в центре подгруппы H. Очевидно также, что

$$G/M = (a, b; a^m = 1)$$

— свободное произведение конечной циклической группы, порожденной элементом aM, и бесконечной циклической группы, порожденной элементом bM. Поэтому очевидно, что нормальное замыкание элемента bM в группе G/M является свободной группой. Подгруппа H/M группы G/M совпадает с нормальным замыканием элементов b^2M и $b^{-1}a^{-1}baM$, и, следовательно, она содержится в нормальном замыкании элемента bM, которое является свободной группой. Поэтому H/M — свободная группа, т.е. H является расширением группы M с помощью свободной группы. Хорошо известно, что любое такое расширение расщепляемо. Поэтому в группе H существует свободная подгруппа F такая, что H является расщепляемым расширением группы M с помощью группы F. А поскольку порождающий элемент a^m подгруппы M лежит в центре группы H, то данное расщепляемое расширение является прямым произведением. Таким образом, H — прямое произведение свободной группы F и бесконечной циклической группы M. Поэтому группа H $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема, а группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть π — непустое множество простых чисел. Предположим, что группа $G(m,n)$ почти $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема. Тогда она финитно аппроксимируема, и поэтому или $m = 1$, или $m = |n|$. Если $m = |n|$, то по теореме 1 группа $G(m,n)$ почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема для любого простого числа p. Если же $m = 1$, то по лемме 6 (п. 1) в множестве π существует число p, не делящее n, и тогда для этого p в силу леммы 6 (п. 2) группа $G(m,n)$ почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. В любом случае группа $G(m,n)$ почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема для некоторого $p \in \pi$. Необходимость в теореме 2 доказана. Достаточность в этой теореме очевидна.

Список литературы

1. *Baumslag G., Solitar D.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68. P.199–201.

2. *Meskin S.* Nonresidually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 164. P. 105–114.

3. *Молдаванский Д.И.* Аппроксимируемость конечными p–группами HNN–расширений // Вестник Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2000. Вып. 3. С. 129–140. (*Moldavanskiy D.I.* Approksimiruyemost' konechnymi p–gruppami HNN–rasshireniy // Vestnik Ivan. gos. un-ta. Ser.: Biologiya. Khimiya. Fizika. Matematika. 2000. Vyp. 3. P. 129–140 [in Russian].)

4. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29–62.

5. *McCarron J.* Residually nilpotent one-relator groups with nontrivial centre // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. Vol. 124, № 1. P. 1–5.

6. *Варламова И. А., Молдаванский Д. И.* Об аппроксимируемости конечными группами групп Баумслага — Солитэра // Вестник Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 107–114. (*Varlamova I.A., Moldavanskiy D.I.* Ob approksimiruyemosti konechnymi gruppami grupp Baumslaga – Solitera // Vestnik Ivan. gos. un-ta. Ser.: Yestestvennyye, obshchestvennyye nauki. 2012. Vyp. 2. P. 107–114 [in Russian].)

7. *Иванова О.А., Молдаванский Д.И.* Аппроксимируемость конечными π—группами некоторых групп с одним определяющим соотношением // Научн. тр. Иван. гос ун-та. Математика. 2008. Вып. 6. С. 51–58. (*Ivanova O.A., Moldavanskiy D.I.* Approksimiruyemost' konechnymi π—gruppami nekotorykh grupp s odnim opredelyayushchim sootnosheniyem // Nauchn. tr. Ivan. gos un-ta. Matematika. 2008. Vyp. 6. P. 51–58 [in Russian].)

On the Virtual Residuality of Baumslag — Solitar Groups by Finite p-Groups

Azarov D. N.

Ivanovo State University, ul. Ermaka, 39, Ivanovo, 153025 Russia

Keywords: Baumslag — Solitar group, virtual residuality by finite p–groups

Let π be a set of primes. For Baumslag — Solitar groups the necessary and sufficient condition to be virtual residuality by finite π–groups is obtained.

Сведения об авторе:

Азаров Дмитрий Николаевич,

Ивановский государственный университет, канд. физ.-мат. наук, доцент