Модел. и анализ информ. систем. Т. **20**, № **1** (2013) 124–132
©*Розов А. В.*, 2012

УДК 512.543

О финитной аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений разрешимых групп конечного ранга

Розов А. В.

Ивановский государственный университет, 153025, Россия, г. Иваново, ул. Ермака, 39

e-mail: post-box023@mail.ru

получена 22 декабря 2012

Ключевые слова: Разрешимая группа конечного ранга, обобщенное свободное произведение групп, финитно аппроксимируемая группа, финитно отделимая подгруппа

Пусть G — свободное произведение финитно аппроксимируемых почти разрешимых групп A и B конечного ранга с объединенной подгруппой H, отличной от A и B. И пусть в группе H существует подгруппа W конечного индекса, нормальная в A и B. Доказано, что группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H финитно отделима в группах A и B. Доказано также, что если в группах A и B все подгруппы финитно отделимы, то в группе G все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.

1. Введение

Напомним, что группа G называется финитно аппроксимируемой, если для каждого ее неединичного элемента a существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, при котором образ элемента a отличен от 1. Подгруппа H группы G называется финитно отделимой, если для каждого элемента a группы G, не принадлежащего H, существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, при котором образ элемента a не принадлежит образу подгруппы H. Это равносильно тому, что пересечение всех подгрупп конечного индекса группы G, содержащих H, совпадает с подгруппой H. Если H — нормальная подгруппа группы G, то ее финитная отделимость равносильна финитной аппроксимируемости фактор-группы G/H.

Перейдем теперь к свободным произведениям с объединенными подгруппами. Пусть A и B — произвольные группы, H и K — подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

— свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K объединенными относительно изоморфизма φ. Хорошо известно, что группы A и B естественным образом вложимы в группу G. Поэтому далее будем считать, что A и B — подгруппы группы G. Тогда $A \cap B = H = K$. Далее для группы G будем использовать более компактное обозначение

$$G = (A * B, H)$$

и называть ее свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой H.

Очевидным необходимым условием финитной аппроксимируемости группы G является финитная аппроксимируемость групп A и B. Несложные примеры показывают, что это условие не является достаточным.

Наиболее распространенный подход к изучению финитной аппроксимируемости группы G состоит в том, что на свободные множители A и B, помимо условия финитной аппроксимируемости, накладываются еще некоторые дополнительные условия. Дополнительные ограничения, как правило, накладываются и на объединенную подгруппу H. Примерами таких ограничений могут служить конечность подгруппы H, ее нормальность в группах A и B, а также конечность индекса подгруппы H в A и B. Так, Г. Баумслаг [1] доказал, что если группы A и B финитно аппроксимируемы, а подгруппа H конечна, то группа G финитно аппроксимируема.

Много примеров финитно аппроксимируемых групп существует среди разрешимых групп. Классическими примерами такого рода являются все полициклические группы. Их финитная аппроксимируемость была установлена К. Гиршем [2].

В работе [1] Г. Баумслаг получил следующий результат.

Теорема 1. *Свободное произведение двух полициклических групп с нормальными объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой.*

В работах [3, 4, 5] доказаны другие свойства обобщенных свободных произведений полициклических групп, сформулированные в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть G — свободное произведение двух почти полициклических групп A и B с объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B.*

1. Если H — подгруппа конечного индекса в A и B, то группа G тогда и только тогда финитно аппроксимируема, когда в группе H существует подгруппа W конечного индекса, нормальная в A и B.

2. Если в H существует подгруппа W конечного индекса, нормальная в A и B, то в группе G все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.

Напомним, что группа обладает каким-либо свойством почти, если в ней существует подгруппа конечного индекса, обладающая этим свойством.

Одним из обобщений понятия полициклической группы является понятие разрешимой группы конечного ранга. Напомним, что группа G называется группой конечного специального ранга (в другой терминологии — группой конечного ранга Прюфера), если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами (наименьшее такое r будем называть рангом группы). Это понятие, а также термин "конечный специальный ранг" введено в статье [6] А. И. Мальцева. Здесь мы используем термин "конечный ранг" вместо терминов "конечный специальный ранг" и "конечный ранг Прюфера".

Приведенный ниже пример показывает, что свободное произведение двух финитно аппроксимируемых разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами не обязано быть финитно аппроксимируемой группой. Для такого свободного произведения здесь будет доказан следующий результат.

Теорема 3. *Пусть G — свободное произведение финитно аппроксимируемых почти разрешимых групп A и B конечного ранга с объединенной подгруппой H, отличной от A и B. И пусть в группе H существует подгруппа W конечного индекса, нормальная в A и B. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. Группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H финитно отделима в группах A и B.

2. Если в группах A и B финитно отделимы все подгруппы, то в группе G финитно отделимы все конечно порожденные подгруппы.

Хорошо известно, что полициклические группы финитно аппроксимируемы, и в них все подгруппы финитно отделимы (см., напр., [7, п. 1.3.10]). Поэтому теорема 1 и пункт 2 теоремы 2 являются непосредственными следствиями теоремы 3. Помимо полициклических групп существует много других разрешимых групп конечного ранга, в которых все подгруппы финитно отделимы. Примеры такого рода можно найти в классе ограниченных разрешимых групп. Это понятие введено А. И. Мальцевым в [8], где доказывается, что в ограниченных разрешимых группах все подгруппы финитно отделимы.

Заметим теперь, что свободное произведение G двух финитно аппроксимируемых разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H не обязано быть финитно аппроксимируемой группой даже в случае, когда A и B абелевы. Действительно, существуют финитно аппроксимируемые абелевы группы конечного ранга, в которых не все подгруппы финитно отделимы. Примером такого рода может служить аддитивная группа Q_p p–ичных дробей, где p — простое число. В этой группе подгруппа $\mathbb{Z}$ целых чисел не является финитно отделимой. Поэтому свободное произведение двух экземпляров группы Q_p с объединённой подгруппой $\mathbb{Z}$ не будет финитно аппроксимируемой группой.

Для доказательства теоремы 3 нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть G — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. И пусть группа G финитно аппроксимируема. Если группы A и B удовлетворяют нетривиальному тождеству, то подгруппа H финитно отделима в группах A и B.*

Это утверждение даже в более сильном виде доказано в работе [9, теор. 1].

Напомним, что элемент a группы G называется полным, если для каждого целого положительного числа n уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G. Группа G называется полной, если все ее элементы являются полными.

Следуя Д. Робинсону и Дж. Ленноксу [7], группу G будем называть редуцированной, если она не содержит нетривиальных полных подгрупп. Очевидно, что любая финитно аппроксимируемая группа не содержит полных элементов отличных от 1, и поэтому редуцирована. Для разрешимых групп конечного ранга имеет место и обратное утверждение.

Лемма 2. *Разрешимая группа конечного ранга финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она редуцирована.*

Эта лемма, даже в более общем виде, доказана в [7, п. 5.3.2].

Аналогичное утверждение будет верно и для почти разрешимых групп конечного ранга.

Лемма 3. *Почти разрешимая группа G конечного ранга финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она редуцирована.*

Доказательство. Необходимость в этой лемме очевидна. Докажем достаточность. Пусть группа G редуцирована. Обозначим через S разрешимую подгруппу группы G конечного индекса. Тогда S — редуцированная разрешимая группа конечного ранга. Поэтому согласно лемме 2 она финитно аппроксимируема. Отсюда и из того, что индекс $[G:S]$ конечен, следует, что группа G финитно аппроксимируема. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G — почти разрешимая группа конечного ранга. Если группа G является расширением конечной группы с помощью финитно аппроксимируемой группы, то G финитно аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть H — конечная нормальная подгруппа группы G и фактор-группа G/H финитно аппроксимируема. Согласно лемме 3, для доказательства финитной аппроксимируемости группы G достаточно установить ее редуцированность, т. е. что любая ее полная подгруппа R является единичной.

Подгруппа RH/H группы G/H является полной. Так как по лемме 3 G/H редуцирована, то $RH/H = 1$. Поэтому $R \subseteq H$ и, следовательно, R конечна. Таким образом, R — конечная полная группа и, значит, $R = 1$. Лемма доказана.

Аппроксимантом группы G будем называть ее подгруппу $\sigma(G)$, совпадающую с пересечением всех нормальных подгрупп конечного индекса группы G. Очевидно, что $\sigma(G)$ — нормальная подгруппа группы G и что она совпадает с пересечением всех подгрупп конечного индекса группы G.

Лемма 5. *Пусть G — почти разрешимая группа конечного ранга, H — ее конечная подгруппа. Группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда в ней финитно отделима подгруппа H.*

Доказательство. Очевидно, что в финитно аппроксимируемой группе любое конечное подмножество финитно отделимо. Поэтому в доказательстве нуждается только достаточность.

Пусть подгруппа H финитно отделима в G. Тогда она совпадает с пересечением всех подгрупп конечного индекса группы G, содержащих H. Поэтому аппроксимант

$\sigma(G)$ содержится в H и, значит, является конечной группой. Кроме того, легко видеть, что фактор-группа $G/\sigma(G)$ финитно аппроксимируема. Из последних двух фактов по лемме 4 получаем, что группа G финитно аппроксимируема. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть G — почти разрешимая группа конечного ранга, H — ее подгруппа и W — подгруппа конечного индекса группы H, нормальная в G. Подгруппа H финитно отделима в группе G тогда и только тогда, когда подгруппа W финитно отделима в группе G.*

Доказательство. Пусть H финитно отделима в G. Очевидно, что это равносильно финитной отделимости подгруппы H/W в фактор-группе G/W. Согласно лемме 5, последний факт имеет место тогда и только тогда, когда фактор-группа G/W финитно аппроксимируема, т. е. когда подгруппа W финитно отделима в группе G. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть G — периодическая абелева группа, порядки элементов которой ограничены числом n. Если ранг r группы G конечен, то она сама конечна. Более того, $|G| \leq n^r$.*

Доказательство. Пусть M — конечное подмножество группы G. Тогда подгруппа H группы G, порожденная подмножеством M, порождается не более, чем r элементами. Так как H — периодическая абелева группа, порядки элементов которой ограничены числом n, и H порождается не более чем r элементами, то $|H| \leq n^r$, и поэтому число элементов множества M не превосходит n^r. Таким образом, любое конечное подмножество группы G содержит не более чем n^r элементов. Следовательно, G — конечная группа и $|G| \leq n^r$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть G — периодическая почти разрешимая группа конечного ранга, порядки элементов которой ограничены. Тогда группа G конечна.*

Доказательство. Обозначим через S разрешимую подгруппу конечного индекса группы G. И пусть

$$1 = S_0 \leq S_1 \leq \ldots \leq S_n = S$$

— субнормальный ряд группы S с абелевыми факторами. Очевидно, что эти факторы являются периодическими абелевыми группами конечного ранга, и порядки их элементов ограничены. Поэтому в силу леммы 7 все эти факторы являются конечными группами и, следовательно, группа S конечна. Отсюда и из того, что S имеет конечный индекс в G, вытекает, что и группа G конечна. Лемма доказана.

Очевидным следствием из этой леммы является следующее утверждение.

Лемма 9. *Пусть G^n — степенная подгруппа группы G, т. е. подгруппа, порожденная n-ми степенями всех элементов из G, где n — фиксированное целое положительное число. Если G — почти разрешимая группа конечного ранга, то фактор-группа G/G^n конечна.*

Лемма 10. *Пусть G — свободное произведение групп A и B с конечной объединенной подгруппой H. Если в группах A и B финитно отделимы все конечно* *порожденные подгруппы, то и в группе G все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.*

Доказательство этого утверждения можно найти в [5, лемма 3].

3. Доказательство теоремы 3

Лемма 11. *Пусть G — свободное произведение финитно аппроксимируемых почти разрешимых групп A и B конечного ранга с объединенной подгруппой H, отличной от A и B. И пусть в группе H существует подгруппа W конечного индекса, нормальная в G. Группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H финитно отделима в группах A и B.*

Доказательство. Так как группа A почти разрешима, то в ней существует нормальная разрешимая подгруппа S конечного индекса. Пусть $[A : S] = m$. Тогда $A^m \subseteq S$. Так как S разрешима, то для некоторого натурального n она удовлетворяет коммутаторному тождеству $\delta_n(x_1, \ldots, x_{2^n}) = 1$, где

$$\delta_0(x) = x,\ \delta_1(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2,$$

$$\delta_{n+1}(x_1, \ldots, x_{2^{n+1}}) = [\delta_n(x_1, \ldots, x_{2^n}),\ \delta_n(x_{2^n+1}, \ldots, x_{2^{n+1}})].$$

Следовательно, группа A удовлетворяет тождеству $\delta_n(x_1^m, \ldots, x_{2^n}^m) = 1$. То же самое можно сказать и о группе B. Поэтому необходимость в доказываемой лемме обеспечивается леммой 1.

Докажем теперь достаточность. Пусть подгруппа H финитно отделима в группах A и B. Покажем, что группа G финитно аппроксимируема. Для этого достаточно для каждого неединичного элемента g из G указать гомоморфизм группы G на конечную группу, образ g относительно которого отличен от 1.

Рассмотрим сначала случай, когда $g \notin W$. Так как подгруппа W нормальна в G и содержится в H, то фактор-группа G/W будет являться свободным произведением групп A/W и B/W с объединенной подгруппой H/W. Так как H финитно отделима в A и B, и W — подгруппа конечного индекса группы H, нормальная в A и B, то согласно лемме 6 подгруппа W финитно отделима в A и B, т. е. группы A/W и B/W финитно аппроксимируемы. Таким образом, G/W — свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A/W и B/W с конечной объединенной подгруппой H/W. Поэтому группа G/W финитно аппроксимируема. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\varepsilon : G \to G/W$. Так как $g \notin W$, то $g\varepsilon$ — неединичный элемент группы G/W. Поскольку группа G/W финитно аппроксимируема, существует гомоморфизм ρ группы G/W на конечную группу такой, что образ $g\varepsilon$ относительно ρ отличен от 1. Поэтому $\varepsilon\rho$ — искомый гомоморфизм.

Теперь рассмотрим случай, когда $g \in W$. Так как W — подгруппа финитно аппроксимируемой почти разрешимой группы A конечного ранга, то она сама является финитно аппроксимируемой почти разрешимой группой конечного ранга. Из финитной аппроксимируемости группы W следует существование в ней нормальной подгруппы N конечного индекса, не содержащей элемент g. Пусть $[W : N] = n$. Тогда $W^n \subseteq N$ и, значит, $g \notin W^n$. По лемме 9 подгруппа W^n имеет конечный индекс в W, а значит, и в H. При этом подгруппа W^n нормальна в G, поскольку она характеристична в группе W, а W нормальна в группе G.

Рассмотрим фактор-группу G/W^n. Она является свободным произведением фактор-групп A/W^n и B/W^n с объединенной подгруппой H/W^n. Так как W^n — подгруппа конечного индекса группы H, нормальная в A и B, и H финитно отделима в A и B, то согласно лемме 6 W^n финитно отделима в A и B, т. е. группы A/W^n и B/W^n финитно аппроксимируемы. Таким образом, G/W^n — свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A/W^n и B/W^n с конечной объединенной подгруппой H/W^n. Поэтому группа G/W^n финитно аппроксимируема. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\varepsilon : G \to G/W^n$. Так как $g \notin W^n$, то $g\varepsilon$ — неединичный элемент группы G/W^n. Поэтому в силу финитной аппроксимируемости группы G/W^n следует, что существует гомоморфизм ρ группы G/W^n на конечную группу, образ элемента $g\varepsilon$ относительно которого отличен от 1. Таким образом, гомоморфизм $\varepsilon\rho$ является искомым гомоморфизмом. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть G — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с объединенной подгруппой H. И пусть в группе H существует подгруппа W конечного индекса, нормальная в G. Если в группах A и B финитно отделимы все подгруппы, то в группе G финитно отделимы все конечно порожденные подгруппы.*

Доказательство. Пусть в группах A и B все подгруппы финитно отделимы. И пусть X — конечно порожденная подгруппа группы G, g — элемент группы G, не принадлежащий X. Построим гомоморфизм группы G на конечную группу, образ элемента g относительно которого не принадлежит образу подгруппы X.

Рассмотрим сначала случай, когда $g \notin XW$. Пусть $\varepsilon : G \to G/W$ — естественный гомоморфизм. Тогда образ gW элемента g относительно ε не принадлежит образу XW/W подгруппы X относительно ε. Заметим, что фактор-группа G/W является свободным произведением групп A/W и B/W с конечной объединенной подгруппой H/W. Легко видеть, что в группах A/W и B/W все подгруппы финитно отделимы, поскольку финитно отделимы все подгруппы в группах A и B. Отсюда и из того, что подгруппа H/W конечна, по лемме 10 следует, что в группе G/W все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. Следовательно, так как XW/W — конечно порожденная подгруппа группы G/W и $gW \notin XW/W$, то существует гомоморфизм ρ группы G/W на конечную группу такой, что $(gW)\rho \notin (XW/W)\rho$. Тогда $\varepsilon\rho$ — искомый гомоморфизм.

Теперь рассмотрим случай, когда $g \in XW$. В этом случае g можно записать в виде

$$g = xw, \tag{1}$$

где $x \in X$, $w \in W \backslash W \cap X$. Так как в группе A все подгруппы финитно отделимы, то и в ее подгруппе W все подгруппы, и в частности $W \cap X$, финитно отделимы. Поэтому для элемента w группы W, не принадлежащего $W \cap X$, в группе W существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что $w \notin (W \cap X) \cdot N$. Пусть $[W : N] = n$. Тогда очевидно, что $W^n \subseteq N$ и

$$w \notin (W \cap X) \cdot W^n. \tag{2}$$

Отсюда следует, что $g \notin XW^n$. Действительно, допустим противное. Тогда элемент

g представим в виде

$$g = x_1 w_1, \tag{3}$$

где $x_1 \in X$, $w_1 \in W^n$. Из (1) и (3) получаем:

$$xw = x_1 w_1,$$

откуда

$$x_1^{-1} x = w_1 w^{-1}.$$

Заметим, что левая часть последнего равенства принадлежит подгруппе X, а правая — подгруппе W. Поэтому обе они принадлежат подгруппе $W \cap X$. Обозначим элемент $w_1 w^{-1}$ группы $W \cap X$ через a. Тогда

$$w = a^{-1} w_1.$$

Так как $a^{-1} \in W \cap X$, а $w_1 \in W^n$, то $w \in (W \cap X) \cdot W^n$. Получили противоречие с условием (2).

Таким образом, $g \notin XW^n$. Заметим, что подгруппа W^n имеет конечный индекс в группе W по лемме 9 и что W^n нормальна в группе G, поскольку она характеристична в W. Рассмотрим фактор-группу G/W^n. Она является свободным произведением групп A/W^n и B/W^n с конечной объединенной подгруппой H/W^n. Так как в группах A и B все подгруппы финитно отделимы, то и в фактор-группах A/W^n и B/W^n все подгруппы финитно отделимы. Поэтому согласно лемме 10 в группе G/W^n все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. При этом очевидно, что XW^n/W^n — конечно порожденная подгруппа группы G/W^n и $gW^n \notin XW^n/W^n$. Из последних двух предложений получаем, что существует гомоморфизм ρ группы G/W^n на конечную группу, образ элемента gW^n относительно которого не принадлежит образу подгруппы XW^n/W^n.

Рассмотрим естественный гомоморфизм $\varepsilon : G \to G/W^n$. Тогда $g\varepsilon = gW^n$, $X\varepsilon = XW^n/W^n$, и, следовательно, $g\varepsilon\rho \notin X\varepsilon\rho$. Поэтому $\varepsilon\rho$ — искомый гомоморфизм. Лемма доказана.

Справедливость теоремы 2 теперь следует из лемм 11 и 12.

Автор выражает благодарность Д. Н. Азарову за помощь при написании данной статьи.

Список литературы

1. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193–209.

2. *Hirsh K.A.* On infinite soluble groups // J. London Math. Soc. 1952. Vol. 27. P. 81–85.

3. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения двух групп с объединенными подгруппами конечных индексов // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2007. Вып. 3. С. 55–59. (*Azarov D. N.* O finitnoy approksimiruyemosti svobodnogo proizvedeniya dvukh grupp s ob"yedinennymi podgruppami konechnykh indeksov // Vestn. Ivan. gos. un-ta. 2007. Vyp. 3. P. 55–59 [in Russian].)

4. *Азаров Д.Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами // Чебышевский сборник. Тула, 2010. Т. 11. Вып. 3(35). С. 11–21. (*Azarov D.N.* O pochti approksimiruyemosti konechnymi p-gruppami // Chebyshevskiy sbornik. Tula, 2010. T. 11. Vyp. 3(35). P. 11–21 [in Russian].)

5. *Allenby R. B. J. T., Gregorac R. J.* On locally extended residually finite groups // Lecture Notes Math. 1973. Vol. 319. P. 9–17.

6. *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Мат. сб. 1948. Т. 22. № 2. С. 351–352. (*Maltsev A.I.* On groups of finite rank // Mat. Sbornik. 1948. V. 22, No 2. P. 351–352 [in Russian].)

7. *Lennox J., Robinson D.* The theory of infinite soluble groups. Oxford: Clarendon press, 2004.

8. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60. (*Maltsev A. I.* O gomomorfizmakh na konechnyye gruppy // Uchen. zap. Ivan. gos. ped. in-ta. 1958. T. 18. P. 49–60 [in Russian].)

9. *Shirvani M. A* converse to a residual finiteness theorem of G. Baumslag // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 104. № 3. P. 703–706.

On the Residual Finiteness of Some Generalized Products of Soluble Groups of Finite Rank

Rozov A. V.

Ivanovo State University, ul. Ermaka, 39, Ivanovo, 153025 Russia

Keywords: soluble group of finite rank, generalized free product, residually finite group, finitely separable subgroup

Let G be a free product of residually finite virtually soluble groups A and B of finite rank with an amalgamated subgroup H, $H \neq A$ and $H \neq B$. And let H contains a subgroup W of finite index which is normal in both A and B. We prove that the group G is residually finite if and only if the subgroup H is finitely separable in A and B. Also we prove that if all subgroups of A and B are finitely separable in A and B, respectively, all finitely generated subgroups of G are finitely separable in G.

Сведения об авторе:

Розов Алексей Вячеславович,

Ивановский государственный университет, аспирант