Модел. и анализ информ. систем. Т. **20**, № **1** (2013) 133–137

УДК 512.543

Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневыми классами групп

Туманова Е. А.[1]

Ивановский государственный университет, 153025, Россия, г. Иваново, ул. Ермака, 39

e-mail: helenfog@bk.ru

получена 22 декабря 2012

Ключевые слова: свободное произведение с одной объединенной подгруппой, корневой класс групп, аппроксимируемость корневыми классами групп, ретракт

Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп. Доказано, что свободное произведение произвольного семейства $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп с одной объединенной подгруппой, являющейся ретрактом в каждом свободном множителе, $\mathcal{K}$-аппроксимируемо. Также получено достаточное условие $\mathcal{K}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух групп, в котором объединяемая подгруппа в одном из сомножителей нормальна, а в другом является ретрактом.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Группа G называется аппроксимируемой классом $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента g группы G существует гомоморфизм φ группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что образ элемента g относительно гомоморфизма φ отличен от 1. Если в качестве $\mathcal{K}$ взять класс всех конечных групп, то понятие $\mathcal{K}$-аппроксимируемости совпадает с наиболее изученным понятием финитной аппроксимируемости.

Дж. Болер и Б. Эванс [2] доказали, что свободное произведение двух финитно аппроксимируемых групп с объединенными ретрактами является финитно аппроксимируемой группой. П. А. Бобровский и Е. В. Соколов [1] получили аналогичное утверждение для аппроксимируемости конечными p-группами. В работе Д. Н. Азарова и автора [5] эти результаты были распространены на свойство аппроксимируемости произвольным корневым классом групп. Другими словами, было доказано, что если $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, то свободное произведение двух $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп с объединенными ретрактами $\mathcal{K}$-аппроксимируемо. В данной статье получено обобщение последнего утверждения для свободного произведения любого семейства групп с одной объединенной подгруппой, являющейся ретрактом в каждой из групп семейства.

С помощью этого результата получено достаточное условие аппроксимируемости произвольным корневым классом групп обобщенного свободного произведения двух

[1]Работа поддержана грантом ИвГУ

групп, в котором объединяемая подгруппа в одном из сомножителей нормальна, а в другом является ретрактом.

Напомним определения используемых понятий.

Класс групп $\mathcal{K}$ называется корневым [3], если выполняются следующие три условия.

1. Если группа A принадлежит классу $\mathcal{K}$ и B — подгруппа группы A, то группа B также принадлежит классу $\mathcal{K}$.

2. Прямое произведение любых двух групп из класса $\mathcal{K}$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

3. Если $1 \leqslant C \leqslant B \leqslant A$ — субнормальный ряд группы A такой, что фактор-группы A/B и B/C принадлежат классу $\mathcal{K}$, то в группе A существует нормальная подгруппа D такая, что $D \subseteq C$ и фактор-группа A/D принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Пусть $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — некоторое семейство групп, и пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ в группе G_λ фиксирована подгруппа H_λ. Пусть также для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ существует изоморфизм $\varphi_{\lambda\mu} : H_\lambda \to H_\mu$, причем для произвольных $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ выполнены соотношения

$$\varphi_{\lambda\mu}\varphi_{\mu\nu} = \varphi_{\lambda\nu}, \varphi_{\lambda\mu}^{-1} = \varphi_{\mu\lambda}, \varphi_{\lambda\lambda} = \mathrm{id}_{H_\lambda}. \tag{*}$$

Тогда определена группа

$$G = \langle G_\lambda(\lambda \in \Lambda); H_\lambda = H_\mu, \varphi_{\lambda\mu}(\lambda, \mu \in \Lambda)\rangle,$$

порождаемая объединением (попарно непересекающихся) систем порождающих всех групп G_λ и определяемая определяющими соотношениями всех групп G_λ и всевозможными соотношениями вида $h\varphi_{\lambda\mu} = h$, где $h \in H_\lambda$; $\lambda, \mu \in \Lambda$. Хорошо известно, что все группы G_λ вкладываются в группу G. Подгруппы H_λ при этом совпадают, поэтому построенную таким образом группу G называют свободным произведением групп G_λ, $\lambda \in \Lambda$, с одной объединенной подгруппой.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп и*

$$G = \langle G_\lambda(\lambda \in \Lambda); H_\lambda = H_\mu, \varphi_{\lambda\mu}(\lambda, \mu \in \Lambda)\rangle.$$

Пусть также для любого $\lambda \in \Lambda$ подгруппа H_λ является ретрактом в G_λ и группа G_λ $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Тогда объединенная подгруппа является ретрактом в G и группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Доказательство. Так как для любого $\lambda \in \Lambda$ H_λ — ретракт в группе G_λ, то для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует нормальная подгруппа N_λ группы G_λ такая, что $G_\lambda = N_\lambda H_\lambda$ и $N_\lambda \cap H_\lambda = 1$. Тогда $G_\lambda/N_\lambda \cong H_\lambda$.

Пусть Ω — некоторое подмножество множества Λ. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ введем нормальную подгруппу R_λ группы G_λ, полагая $R_\lambda = N_\lambda$, если $\lambda \notin \Omega$, и $R_\lambda = 1$, если $\lambda \in \Omega$. Обозначим через $\overline{G}_\lambda$ фактор-группу G_λ/R_λ. Очевидно, что $\overline{G}_\lambda \cong H_\lambda$, если $\lambda \notin \Omega$, и $\overline{G}_\lambda \cong G_\lambda$, если $\lambda \in \Omega$.

Определим отображение $\overline{\varphi}_{\lambda\mu} : H_\lambda R_\lambda/R_\lambda \to H_\mu R_\mu/R_\mu$, действующее по правилу $(hR_\lambda)\overline{\varphi}_{\lambda\mu} = (h\varphi_{\lambda\mu})R_\mu$, где $h \in H_\lambda$. Так как $N_\lambda \cap H_\lambda = 1$ для любого $\lambda \in \Lambda$, то отображение $\overline{\varphi}_{\lambda\mu}$ определено корректно и является изоморфизмом подгруппы $H_\lambda R_\lambda/R_\lambda$ группы $\overline{G}_\lambda$ на подгруппу $H_\mu R_\mu/R_\mu$ группы $\overline{G}_\mu$.

Нетрудно показать, что для семейства изоморфизмов подгрупп $\{\overline{\varphi}_{\lambda\mu}\}_{\lambda,\mu\in\Lambda}$ выполняются соотношения аналогичные соотношениям (*).

Поэтому можем построить свободное произведение

$$G_\Omega = \langle \overline{G}_\lambda(\lambda \in \Lambda); H_\lambda R_\lambda/R_\lambda = H_\mu R_\mu/R_\mu, \overline{\varphi}_{\lambda\mu}(\lambda, \mu \in \Lambda)\rangle$$

групп $\overline{G}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, с одной объединенной подгруппой.

Легко видеть, что отображение $\rho_\Omega : G \to G_\Omega$, индуцированное естественными гомоморфизмами групп G_λ на $\overline{G}_\lambda$, где $\lambda \in \Lambda$, переводит все определяющие соотношения группы G в равенства, справедливые в группе G_Ω. Поэтому ρ_Ω — гомоморфизм, являющийся, очевидно, сюръективным.

Зафиксируем произвольное $\lambda \in \Lambda$ и покажем, что H_λ — ретракт в группе G. Положим Ω равным пустому множеству и $N = \ker \rho_\Omega$. Тогда

$$N \cap H_\lambda = N \cap G_\lambda \cap H_\lambda = R_\lambda \cap H_\lambda = N_\lambda \cap H_\lambda = 1.$$

Так как Ω — пустое множество, то для любого $\lambda \in \Lambda$ выполнено включение $N_\lambda \subseteq N$, откуда $G_\lambda = H_\lambda N_\lambda \subseteq H_\lambda N$. Значит, обобщенное свободное произведение G также содержится в $H_\lambda N$. Обратное включение очевидно. Следовательно, $G = H_\lambda N$. Таким образом, H_λ — ретракт в группе G.

Перейдем теперь к доказательству $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G.

Заметим, что если мощность множества Λ равна 2, то $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы G имеет место в силу теоремы 1 из [5]. Отсюда и из того, что объединенная подгруппа является ретрактом в G, с помощью очевидной индукции получаем, что группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема для любого конечного множества Λ.

Пусть теперь множество Λ бесконечно. Убедимся, что и в этом случае группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Пусть g — произвольный неединичный элемент группы G. Тогда он имеет несократимую запись $g = g_1 g_2 \ldots g_l$, где $l \geqslant 1$, $g_i \in G_{\lambda_i}$ и $g_i \notin H_{\lambda_i}$. Обозначим через Ω множество индексов $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l\}$. Согласно построению группы G_Ω гомоморфизм ρ_Ω действует инъективно на подгруппах G_{λ_i}, $i \in \{1, \ldots, l\}$. Поэтому $g\rho_\Omega = (g_1\rho_\Omega)(g_2\rho_\Omega)\ldots(g_l\rho_\Omega)$ — несократимая запись элемента $g\rho_\Omega$. Следовательно, $g\rho_\Omega \neq 1$.

Заметим, что если $\lambda \notin \Omega$, то $\overline{G}_\lambda = H_\lambda R_\lambda/R_\lambda$. Поэтому G_Ω изоморфна свободному произведению

$$\langle \overline{G}_\lambda(\lambda \in \Omega); H_\lambda R_\lambda/R_\lambda = H_\mu R_\mu/R_\mu, \overline{\varphi}_{\lambda\mu}(\lambda, \mu \in \Omega)\rangle,$$

которое является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой в силу доказанного выше.

Таким образом, $g\rho_\Omega$ — отличный от единицы элемент $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы G_Ω. Тогда найдется гомоморфизм ψ группы G на $\mathcal{K}$-группу такой, что $g\psi \neq 1$. Следовательно, группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, и пусть $G = \langle A * B; H = K, \varphi\rangle$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ, H — нормальная подгруппа группы A, K — ретракт* *в группе B. Если группа B $\mathcal{K}$-аппроксимируема и $A/H \in \mathcal{K}$, то группа G также является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой.*

Доказательство. Зафиксируем систему представителей D всех левых смежных классов группы A по подгруппе H.

Для каждого элемента d множества D определим подгруппу $B_d = d^{-1}Bd$ группы G. Обозначим через N подгруппу группы G, порожденную всеми подгруппами B_d, где $d \in D$.

Непосредственно проверяется, что подгруппа N нормальна в группе G.

Используя преобразования Тице, нетрудно показать, что фактор-группа G/N изоморфна $\mathcal{K}$-группе A/H. Следовательно, G/N также является $\mathcal{K}$-группой.

Покажем теперь, что группа N $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Так как H — нормальная подгруппа группы A и D — система представителей всех левых смежных классов группы A по подгруппе H, то выполняются условия теоремы Б. Неймана [4, с. 512]. Значит, подгруппа N группы G, порожденная всеми подгруппами B_d, где $d \in D$, является их обобщенным свободным произведением с одной объединенной подгруппой K.

Так как K — ретракт в группе B, то существует нормальная подгруппа L группы B такая, что $B = KL$ и $K \cap L = 1$. Тогда $L_d = d^{-1}Ld$ — нормальная подгруппа группы B_d такая, что $B_d = KL_d$ и $K \cap L_d = 1$. Следовательно, K — ретракт в группе B_d для каждого элемента d множества D.

Из $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы B следует $\mathcal{K}$-аппроксимируемость групп B_d, где $d \in D$. Теперь $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы N следует из теоремы 1.

Итак, N — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая нормальная подгруппа группы G такая, что фактор-группа G/N является $\mathcal{K}$-группой, следовательно [3, лемма 1.5], группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность профессору Д. И. Молдаванскому за ряд ценных советов и замечаний, сделанных при написании данной статьи.

Список литературы

1. *Bobrovskii P. A., Sokolov E. V.* The cyclic subgroup separability of certain generalized free products of two groups // Algebra Colloquium. 2010. V. 17, № 4. P. 577 – 582.

2. *Boler J., Evans B.* The free product of residually finite groups amalgamated along retracts is residually finite // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 37. № 1. P. 50 – 52.

3. *Grunberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. 1957. V. 7. P. 29 – 62.

4. *Neumann B. H.* An assay on free products of groups with amalgamations // Phil. Trans. Royal Soc. of London. 1954. V. 246. P. 503 – 554.

5. *Азаров Д. Н., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп корневыми классами // Научные труды Иван. гос. ун-та. Математика. 2008. Вып. 6. С. 29 – 42. (*Azarov D. N., Tumanova E. A.* Ob approksimiruyemosti obobshchennykh svobodnykh proizvedeniy grupp kornevymi klassami // Nauchnyye trudy Ivan. gos. un-ta. Matematika. 2008. Vyp. 6. P. 29 – 42 [in Russian].)

On the Root-Class Residuallity of Generalized Free Products

Tumanova E. A.

Ivanovo State University, ul. Ermaka, 39, Ivanovo, 153025 Russia

Keywords: free product with one amalgamated subgroup, root class of groups, root-class residuallity, retract

Let $\mathcal{K}$ be a root class of groups. It is proved that a free product of any family of residually $\mathcal{K}$ groups with one amalgamated subgroup, which is a retract in all free factors, is residually $\mathcal{K}$. The sufficient condition for a generalized free product of two groups to be residually $\mathcal{K}$ is also obtained, provided that the amalgamated subgroup is normal in one of the free factors and is a retract in another.

Сведения об авторе:
Туманова Елена Александровна,
Ивановский государственный университет,
аспирант кафедры алгебры и математической логики