

О работе НОЦ «Нелинейная динамика»

В ноябре–декабре 2012 г. в научно-образовательном центре «Нелинейная динамика» при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации осуществлялась научно-исследовательская работа приглашенных молодых ученых из научных учреждений и университетов РФ. В ходе проведения работ по проекту научно-образовательный центр посетили молодые специалисты из Ижевска, Нижнего Новгорода, Москвы и Саратова. Ниже представлены аннотации некоторых из состоявшихся научных исследований.

УДК 539.3, 531.37

Ердакова Н.Н. Аналитическое и численное исследование движения тел по шероховатой плоскости в предположении линейного распределения нормального давления (Удмуртский государственный университет).

Данная работа посвящена качественному и количественному анализу систем, описывающих движения тела с плоским осесимметричным основанием (далее шайбы) под действием сил сухого трения [2, 3, 4, 7] в предположении о линейном распределении нормального давления тела на опорную горизонтальную плоскость [2]. В первой части представлены результаты аналитического и численного исследования финальной динамики шайб [6], опирающихся на шероховатую плоскость круглым основанием, треугольным основанием и тремя точками. Построены фазовые портреты редуцированных систем при различных параметрах, найдены критерии существования устойчивых чисто поступательных и вращательных движений шайб. Во второй части представлены результаты аналитического и численного исследования скольжения шайбы с плоским круглым основанием в неподвижной системе координат [1, 5, 7]. Уравнения движения шайбы выражены через полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Численно построены временные зависимости линейной и угловой скоростей, траектории движения шайбы в зависимости от параметров системы. Показано, что угловая и линейная скорость обращаются в ноль одновременно, при движении наблюдается эффект отклонения траектории в сторону, противоположную вращению шайбы [2]. Проведено сопоставление результатов численного моделирования с результатами натурных экспериментов, демонстрирующее адекватность используемой модели системы.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.В37.21.2016.

1. *Weidman P.D., Malhotra Ch.P.* On the terminal motion of sliding spinning disks with uniform Coulomb friction // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2007. V. 233. No. 1. P. 1–13.
2. *Иванов А.П.* Динамически совместная модель контактных напряжений при плоском движении твердого тела // *ПММ*. 2009. Т. 73, №2. С. 189–203. (English transl.: *Ivanov A.P.* Dynamically consistent model of contact stresses for planar motion of a rigid body // *J. Appl. Math. Mech.* 2007. V. 73 (2). P. 134–144.)

3. Киреенков А.А. О движении однородного вращающегося диска по плоскости в условиях комбинированного трения // МТТ. 2002. №1. С. 60–67. (English transl.: Kireenkov A.A. On the motion of a homogeneous rotating disk along a plane in the case of combined friction // Mech. Solids. 2002. V. 37 (1). P. 47–53.)
4. Крагельский И.В., Виноградова И.Э. Коэффициенты трения. М: МАШГИЗ, 1962. 220 с. (Kragel'skiy I.V., Vinogradova I.E. Koeffitsiyenty treniya. M: MASHGIZ, 1962. 220 p. [in Russian].)
5. MacMillan W. D. Dynamics of Rigid Bodies. New York and London, McGraw-Hill, 1936. 478 p.
6. Сальникова Т. В., Трещев Д.В., Галлямов С.Р. Движение свободной шайбы по шероховатой горизонтальной плоскости // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, №1. С. 83–101. (Salnikova T.V., Treshev D.V., Gallyamov S.R. On the motion of free disc on the rough horisontal plane // Nelineynaya dinamika. 2012. V. 8, No. 1 P. 83–101 [in Russian].)
7. Фаркаш З., Бартельс Г., Унгер Т., Вольф Д. О силе трения при поступательном и вращательном движении плоского тела // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, №1. С. 139–146. (Farkash Z., Bartel's G., Unger T., Vol'f D. Frictional coupling between sliding and spinning motion // Nelineynaya dinamika. 2011. V. 7. No. 1. P. 139–146 [in Russian].)

УДК 531.36

Иванова Т.Б. Качественный анализ динамики твердого тела, скользящего по шероховатой плоскости (Удмуртский государственный университет).

В работе изучается динамика твердого тела (стержня), опирающегося острым краем на шероховатую плоскость. Как известно из экспериментов, ввиду одностороннего характера контакта, стержень может двигаться так, что его конец, опирающийся на плоскость, либо неподвижен, либо проскальзывает, и, кроме того, может также отрываться от опоры. Это приводит к тому, что описать движение и возможные динамические эффекты этой системы в рамках одной механической модели невозможно. Поэтому необходимо использовать, как минимум, три механические модели, описывающие различные режимы движения: перевернутый маятник (точка контакта не проскальзывает и не отрывается от поверхности, стержень имеет закрепленную точку и движется как обычный перевернутый маятник), скользящий стержень (точка контакта движется по плоскости без отрыва) и свободный стержень (данная модель используется лишь для анализа отрыва, соответствует моменту касания стержнем плоскости, но при этом со стороны опоры на него не действуют никакие силы). Известно два сценария отрывов, связанных с переменной знака нормальной реакции либо знака нормального ускорения, причем несовпадение указанных условий приводит к парадоксам [1, 2].

Основная задача, рассматриваемая в рамках данной работы: проанализировать непротиворечивость и степень гладкости при переходе с траектории, описываемой одной математической моделью, на траекторию другой, то есть при смене режима движения. Для этого исследуются траектории в каждой из моделей и границы области возможных движений. На границах областей для различных моделей исследуются условия непротиворечивой склейки траекторий, что позволяет оценить достаточность рассматриваемых моделей для описания возможных процессов в данной системе.

В работе также определены критические значения коэффициента трения, при которых происходит перестройка фазового портрета и возможно возникновение областей противоречивости (парадоксов неединственности или несуществования решения), обсуждена

корректность описания движения в полученных парадоксальных областях в рамках рассматриваемых моделей.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.В37.21.2016.

1. Иванов А.П. Об условиях отрыва в задаче о движении твердого тела по шероховатой плоскости // Нелинейная динамика. 2008. Т. 4, №3. С. 287–302. (*Ivanov A.P. Geometric Representation of Detachment Conditions in Systems with Unilateral Constraints // Nelineynaya dinamika. 2008. V. 4, No. 3 P. 287–302 [in Russian].*)
2. Пенлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с. (*Painleve P. LeHons sur le frottement. P.: Hermann, 1895. 111 p.*)

УДК 517.938

Маркова А.П. Изучение структуры симплектического диффеоморфизма в окрестности гомоклинической траектории к 1-эллиптической точке (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского).

В работе рассматривается C^r -гладкий, $r \geq 6$, симплектический диффеоморфизм f на C^∞ -гладком 4-мерном симплектическом многообразии (M, Ω) , где Ω — симплектическая 2-форма. Предположим, что f имеет 1-эллиптическую неподвижную точку p , то есть дифференциал $L = Df_p$ имеет пару собственных значений $\exp[\pm i\alpha]$ на единичной окружности и пару вещественных собственных значений μ, μ^{-1} , $\mu \neq \pm 1$.

Около такой точки существует C^{r-1} -гладкое двумерное инвариантное симплектическое центральное многообразие W^c , соответствующее мультипликаторам $\exp[\pm i\alpha]$. Ограничение f на W^c является C^{r-1} -гладким двумерным симплектическим диффеоморфизмом, а p — его эллиптической неподвижной точкой. Мы предполагаем, что p является точкой общего эллиптического типа, точнее, что первый коэффициент нормальной формы Биркгофа для $f|_{W^c}$ отличен от нуля. Тогда справедлива теорема Мозера об инвариантной кривой для $f|_{W^c}$ в окрестности точки p , что дает канторовское множество положительной меры замкнутых гладких инвариантных кривых на W^c , окружающих p и накапливающихся к ней.

Предположим, что существует гомоклиническая траектория к неподвижной точке p . В работе сформулированы условие трансверсальности и дополнительное условие общего положения и показано, что при выполнении этих условий в достаточно малой окрестности гомоклинической траектории существует по 4 трансверсальных гомоклинических траектории к каждой инвариантной КАМ-кривой на центральном многообразии W^c .

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.В37.21.2016.

УДК 517.938

Мельникова А.А. Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова).

Рассматривается краевая задача

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 u'' &= f(u, v, x, \varepsilon), \quad \varepsilon^2 v'' = g(u, v, x, \varepsilon), \quad x \in (0; 1), \\ u'(0) &= u'(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где f и g — достаточно гладкие функции в области $(u, v, x, \varepsilon) \in I_u \times I_v \times [0; 1] \times (0; \varepsilon_0]$, I_u и I_v — некоторые промежутки изменения переменных u и v , $\varepsilon_0 > 0$.

Пусть выполнены требования:

Условие 1. Уравнение

$$f(u, v, x, 0) = 0 \quad (2)$$

имеет относительно u ровно три корня $u = \varphi^i(v, x) \in I_u$, $i = 1, 2, 3$, такие что $\varphi^1(v, x) < \varphi^2(v, x) < \varphi^3(v, x)$ всюду в области $(v, x) \in I_v \times [0; 1]$, причем $f_u(\varphi^{1,3}(v, x), v, x, 0) > 0$, $f_u(\varphi^2(v, x), v, x, 0) < 0$.

Условие 2. Каждое из уравнений

$$g(\varphi^i(v, x), v, x, 0) = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3)$$

имеет единственное решение $v = v^i(x) \in I_v$, причем на всем отрезке $[0; 1]$ выполнены неравенства $v^1(x) < v^3(x)$, $h_v^i(v^i(x), x) > 0$, $i = 1, 3$.

Исследуется вопрос о существовании и асимптотике при малых ε решения с переходным слоем в окрестности некоторой внутренней точки x^* отрезка $[0; 1]$, где происходит быстрый переход решения $u(x, t, \varepsilon)$, $v(x, t, \varepsilon)$ задачи (1) от одного корня вырожденной системы (2), (3) к другому. Решения такого типа называются контрастными структурами типа ступеньки (КСТС) (см. [1]). При выполнении условий 1, 2 и ряда дополнительных требований построена асимптотика решения задачи (1) и проведено ее обоснование методом дифференциальных неравенств (см. [2]).

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.В37.21.2016.

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. (*Vasil'eva A.B. and Butuzov V.F. Asymptotic Methods in the Theory of Singular Perturbations. Moskva: Vysshaya Shkola, 1990 [in Russian].*)
2. Невфедов Н.Н. Общая схема асимптотического исследования устойчивых контрастных структур // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6, №1. С. 181–186. (*Nefyodov N.N. General scheme of asymptotic investigation of stable contrast structures // Nelineynaya dinamika. 2010. V. 6, No. 1 P. 181–186 [in Russian].*)

УДК 531.39

Панкратова Е.В., Панкратов А.Л. Образование синхронизованных структур в цепочке джозефсоновских контактов (Волжская государственная академия водного транспорта, г. Нижний Новгород).

В данной работе рассматриваются цепочки, состоящие из различного числа n линейно связанных джозефсоновских контактов [1, 2, 3]

$$\ddot{\varphi}_j + \alpha \dot{\varphi}_j + \sin \varphi_j = i_j + i_f(t) + \varepsilon(\varphi_{j-1} - 2\varphi_j + \varphi_{j+1}), \quad (1)$$

где $j = 1, \dots, n$ — номер контакта в цепочке, φ_j — сверхпроводящая разность фаз на j -м контакте, ε — параметр связи (дискретизации), α — коэффициент диссипации, i_j — нормированный постоянный ток, инжектируемый на j -й контакт, $i_f(t)$ — флуктуационный ток, который моделируется белым гауссовым процессом с нулевым средним $\langle \xi(t) \rangle = 0$ и корреляционной функцией $\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = D\delta(\tau)$. В работе рассмотрены граничные условия

вида $\varphi_0(t) = \varphi_1(t)$, $\varphi_n(t) = \varphi_{n+1}(t)$. При проведении численного моделирования начальные условия по фазе выбирались случайными равномерно распределенными в интервале $[0; 2\pi)$. Начальные значения $\dot{\varphi}_j$ обеспечивали режим периодических колебаний каждой подсистемы при $\varepsilon = 0$.

В работе показано, что при $\varepsilon > 0$ в системе (1) устанавливаются различные синхронные режимы, характеризующиеся определенной пространственной конфигурацией. Построены пространственно-временные диаграммы, показывающие характер изменения колебаний в цепочке при различных значениях среднего инжектируемого тока $\bar{i}_j = 1/n \sum_{j=1}^n i_j$ и параметра связи ε . Показано, что в рассматриваемой системе возможно формирование различных (в том числе и хаотических) пространственно-временных структур. Исследована их устойчивость к увеличению интенсивности шума D .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-00694) и Министерства образования и науки Российской Федерации (договор № 11.G34.31.0039 и соглашение 14.B37.21.2016).

1. *Лихарев К.К.* Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука, 1985. (English transl.: *Likharev K.K.* Dynamics of Josephson junctions and circuits. Gordon and Breach Science Publishers, 1986. 614 p.)
2. *Josephson B.D.* Possible new effects in superconductive tunneling // Phys. Lett. 1962. Vol. 1. P. 251–253.
3. *Ustinov A.V., Malomed B.A., Sakai S.* Bunched fluxon states in one-dimensional Josephson-junction arrays // Phys. Rev. B. 1998. Vol. 57. P. 11691-11697.

УДК 530.18

Сидак Е.В. Выявление связи между осцилляторами по степени синхронности колебаний с аналитическим уровнем значимости (Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского).

Задача выявления связи между двумя колебательными системами по временным рядам возникает в различных областях науки и техники: радиофизике [1], биомедицине [2], климатологии [3]. Для нелинейных колебательных систем наиболее чувствительными к слабой связи, а значит, и эффективными на практике, оказываются подходы, основанные на анализе фаз колебаний $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ [1]. Используют различные индексы фазовой синхронизации, среди которых наиболее известным является коэффициент фазовой когерентности ρ – амплитуда первой Фурье-моды стационарного распределения разности фаз [2]: $\rho = |\langle e^{i(\phi_1(t) - \phi_2(t))} \rangle|$, где угловые скобки здесь и далее означают математическое ожидание. Величина ρ равна единице при строгой фазовой синхронизации $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ и нулю для несвязанных осцилляторов (без фазовой нелинейности). Наличие связи часто выявляют по значимо ненулевой оценке ρ , при этом для проверки статистической значимости используют суррогатные данные [4] или специальные аналитические формулы [5]. Однако в обоих случаях предполагают, что исследуемые осцилляторы не имеют индивидуальной фазовой нелинейности, а фазовые шумы – белые, что ограничивает применимость метода на практике.

В рамках выполнения проекта был предложен альтернативный подход и новая характеристика связи r , представляющая собой коэффициент корреляции приращений фаз. Аналитически был выведен закон распределения оценки этой величины для несвязанных систем с практически произвольными свойствами индивидуальной фазовой динамики, а

на его основе – формула для доверительной вероятности отличия оценки r от нуля. Эффективность подхода показана на эталонных осцилляторах с различными видами связи и наличием фазовой нелинейности. Продемонстрированы условия его превосходства по чувствительности над оценкой коэффициента фазовой когерентности ρ .

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.В37.21.2016.

1. *Пиковский А.С., Розенблум М.Г., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. (*Pikovsky A., Rosenblum M., and Kurths J.* Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press, 2001. ISBN: 0521592852.)
2. *Mormann F., Lehnertz K., David P., Elger C.E.* Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients // *Physica D.* 2000. V. 144. №3-4. P. 358–369.
3. *Мохов И.И., Смирнов Д.А.* Исследование взаимного влияния процессов Эль-Ниньо-Южное колебание и Северо-Атлантического и Арктического колебаний // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2006. Т. 42, №5. С. 650–667. (English transl.: *Mokhov I.I., Smirnov D.A.* Study of the mutual influence of the El Niño-Southern Oscillation processes and the North Atlantic and Arctic Oscillations // *Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics.* 2006. V. 42. No. 5. P. 598–614.)
4. *Смирнов Д.А., Сидак Е.В., Безручко Б.П.* Статистические свойства оценки коэффициента фазовой синхронизации // *Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика.* 2008. Т. 16, №2. С. 111–121. (*Smirnov D.A., Sidak E.V., Bezruchko B.P.* Statistical properties of phase synchronization coefficient estimator // *Izvestiya VUZov. Prikladnaya nelineynaya dinamika.* 2008. V. 16. No. 2. P. 111–121.)
5. *Schelter B., Winterhalder M., Timmer J., Peifer M.* Testing for phase synchronization // *Phys. Lett. A.* 2007. V. 366, №4-5. P. 382–390.

УДК 530.182, 57.087

Сысоева М.В. Подбор параметров прогностических моделей неавтономных и связанных систем по временным рядам (Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского).

В настоящее время моделирование переходных и нестационарных процессов привлекает все большее внимание. Одним из способов построения моделей является их конструирование по измеренным данным, чаще всего — временным рядам. Такие модели, не описывая объект целиком, полезны для прогноза поведения, выявления архитектуры связей, кластеризации, диагностики бифуркаций и т. п.

Основная проблема при построении моделей нестационарных процессов по экспериментальным временным рядам состоит в том, чтобы надежно оценить коэффициенты модели по сравнительно короткому фрагменту реализации, на протяжении которого состояние системы можно примерно считать неизменным. Это возможно, только если применять специализированные подходы к моделированию, позволяющие построить более компактную модель.

Первым подходом к специализации структуры является максимально возможный учет свойств сигнала, вторым подходом — использование различных статистических критериев для оптимизации структуры модели. Основываясь на свойствах электроэнцефалограммы

во время эпилептического разряда и используя статистический критерий Шварца [1] для выбора размерности вектора состояния и других характеристик модели, удалось построить компактную работоспособную математическую модель различных фрагментов ЭЭГ. С помощью этой модели был проведен анализ связанности отведений внутричерепных энцефалограмм крыс методом нелинейной причинности по Грейнджеру [2]. Исследованы различия в прогностической способности линейных и нелинейных моделей при анализе связей между временными рядами методом причинности по Грейнджеру.

Еще одним способом специализации модели является учет априорной информации об объекте моделирования. Основываясь на знании структуры модельных уравнений, разработан метод восстановления неавтономных систем с запаздыванием по тестовым временным рядам.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.В37.21.2016.

1. *Schwarz G.* Estimating the Dimension of a Model // The Annals of Statistics. 1978. Vol. 6, No. 2. P. 461–464.
2. *Granger C.W.J.* Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods // Econometrica. 1969. Vol. 37, No. 3. P. 424–438.

УДК 517.9

Фаллер Д.С. Возникновение хаотических режимов в упрощенной модели уравнения Курамото–Цузуки (Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН).

Уравнение Курамото–Цузуки является одним из наиболее важных уравнений в теории открытых нелинейных систем. Оно описывает весьма широкий класс физических, химических и биологических явлений. Хотя само уравнение Курамото–Цузуки весьма сложно, нетривиальные результаты могут быть получены при анализе двухмодового приближения этого уравнения, которое имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= 2\xi - 2\xi(\xi + \eta) - \xi\eta(\cos\theta + c_2\sin\theta), \\ \dot{\eta} &= 2\eta - 2\eta(2\xi + 0.75\eta) - 2\xi\eta(\cos\theta - c_2\sin\theta) - 2k^2\eta, \\ \dot{\theta} &= c_2(2\xi - 0.5\eta) + \sin\theta(2\xi + \eta) + c_2\cos\theta(2\xi - \eta) + 2c_1k^2.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь ξ и η — квадраты амплитуд нулевой и первой гармоник соответственно, θ — разность фаз между ними. В работах Т.С. Ахромеевой и Г.Г. Малинецкого было показано, что эта система может иметь сложные непериодические решения. Подробное исследование странных аттракторов, возникающих в (1), является весьма актуальной задачей, поскольку число изученных объектов подобного типа к настоящему времени невелико.

В работе представлены результаты исследования эволюции аттракторов системы (1) при изменении параметров c_1 , c_2 и k . Описаны сценарии возникновения сложных хаотических режимов. Рассматривается зависимость показателей Ляпунова от значений параметров.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 11-01-00887-а) и Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.В37.21.2016.

УДК 519.688

Чмыхов М.А. Математическое моделирование скважного нагрева многолетнемерзлых грунтов (Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»).

Подземное выщелачивание — способ разработки рудных месторождений избирательным переводом полезного компонента в жидкую фазу в недрах с последующей переработкой содержащих полезные ископаемые растворов. При этом металл извлекается путем ионного обмена в процессе управляемого движения реагента через массив с естественной или созданной разрушением проницаемостью. Одним из условий успешного применения подземного выщелачивания является достаточная естественная водопроницаемость руд или возможность ее создания искусственным путем. «Многолетняя мерзлота» — часть криолитозоны, характеризующаяся отсутствием периодического размораживания. 65% территории России — районы многолетней мерзлоты. Наиболее широко она распространена в Восточной Сибири и Забайкалье.

Поскольку в многолетнемерзлых породах вода находится в связанном состоянии (лед), на этих территориях добыча полезных ископаемых методом подземного выщелачивания не представляется возможной без предварительного нагрева многолетнемерзлых пород до температур выше температуры замерзания воды и рабочих растворов.

В данной работе разработана математическая модель прогрева массива многолетнемерзлого грунта с использованием условия Стефана на границе плавления [1]. Предложен алгоритм расчета и реализован расчетный модуль на открытой архитектуре с использованием объектно ориентированного языка программирования OpenFOAM [2]. Верификация расчетного модуля проведена по известным точным решениям упрощенных задач.

С использованием построенного модуля проведен расчет нагрева массива многолетнемерзлого грунта для случаев одного, трех и девяти нагревателей.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.В37.21.2016.

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.* М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004. 798 с. (English transl.: *Tikhonov A.N. and Samarskii A.A. Equations of Mathematical Physics.* Dover Pubns, 1990. 765 p.)
2. *Weller H.G., Tabor G., Jasak H., Fureby C. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object oriented techniques // Computers in Physics.* 1998. Vol. 12, №6. P. 620–631.

УДК 519.624.2

Ягремцев А.В. Контрастные структуры в задачах со сбалансированной адвекцией (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова).

В работе исследуются вопросы существования и устойчивости стационарных и нестационарных решений с внутренними слоями задачи

$$\begin{cases} \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = A(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} + B(u, x), & 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ u(0, t) = u^0, \quad u(1, t) = u^1, \\ u(x, 0) = u_{init}(x), \end{cases} \quad (1)$$

где $A(u, x)$ и $B(u, x)$ — достаточно гладкие функции, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Первое уравнение (1) называют в приложениях уравнением реакция–адвекция–диффузия.

В данной задаче формируется контрастная структура при выполнении условий:

(У1) Вырожденное уравнение $A(u, x)\frac{du}{dx} + B(u, x) = 0$ с дополнительным условием $u(0) = u^0$ имеет решение $u = \varphi^{(l)}(x)$, а с условием $u(1) = u^1$ — решение $u = \varphi^{(r)}(x)$, причем $\varphi^{(l)}(x) < \varphi^{(r)}(x)$, $x \in [0, 1]$ и $A(\varphi^{(l)}(x), x) > 0$, $A(\varphi^{(r)}(x), x) > 0$, $x \in [0, 1]$.

(У2) Принадлежность начальных условий области влияния устойчивых корней $\varphi^{(l)}, \varphi^{(r)}$.

(У3) Уравнение $I(x) \equiv \int_{\varphi^{(l)}(x)}^{\varphi^{(r)}(x)} A(u, x) du = 0$ имеет решение $x = x_0$, причем $I'(x_0) \neq 0$.

Однако в ряде приложений возникает ситуация, когда $I(x) \equiv 0$ в области рассмотрения. Такая ситуация представляет интерес и с точки зрения теории сингулярных возмущений. В этом случае мы называем задачу (1) задачей со сбалансированной адвекцией. Отметим, что в отличие от ранее рассмотренных задач для (1) нами применяется подход, основанный на асимптотическом методе дифференциальных неравенств, позволяющий наряду с существованием контрастной структуры установить ее устойчивость по Ляпунову как решения параболического уравнения в (1).

В работе рассматриваются стационарная и нестационарная задачи (1). Строятся формальные приближения решений, предлагается модификации формальных асимптотик и формулируются основные результаты работы. В настоящей работе получены условия существования у задачи (1) решения вида контрастной структуры типа ступеньки, то есть такого решения, которое при малых ε близко к $\varphi^{(l)}(x)$ при $x < \hat{x}$, где $\hat{x} \in (0, 1)$, и близко к $\varphi^{(r)}(x)$ при $x > \hat{x}$, а в малой окрестности $\hat{x}$ имеет резкий переход от $\varphi^{(l)}(x)$ к $\varphi^{(r)}(x)$.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.В37.21.2016.