Модел. и анализ информ. систем. Т. **22**, № **1** (2015) 5–22

УДК 517.228.4

Сингулярно возмущённая краевая задача с многозонным внутренним переходным слоем[1]

Бутузов В. Ф.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
119991, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 2, физический факультет

e-mail: butuzov@phys.msu.ru

получена 7 декабря 2014

Ключевые слова: сингулярно возмущённое уравнение, внутренний переходный слой, асимптотическое разложение решения

Рассматривается двухточечная краевая задача для сингулярно возмущённого обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в случае, когда вырожденное уравнение имеет три непересекающихся корня, причём два из них – простые (однократные), а третий – двукратный. Доказано, что для достаточно малых значений малого параметра задача имеет решение, обладающее быстрым переходом от двукратного корня вырожденного уравнения к простому корню в окрестности некоторой внутренней точки отрезка. Построено полное асимптотическое разложение этого решения. Оно качественно отличается от известного разложения в случае, когда все корни вырожденного уравнения – простые, в частности, в рассматриваемом случае переходный слой оказывается многозонным.

1. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon^2 \frac{d^2u}{dx^2} = f(u, x, \varepsilon), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$\frac{du}{dx}(0, \varepsilon) = 0, \quad \frac{du}{dx}(1, \varepsilon) = 0, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $u(x, \varepsilon)$ – искомая скалярная функция. Известно [1], что при определённых условиях на функцию $f(u, x, \varepsilon)$ задача (1), (2) имеет для достаточно малых ε решение $u(x, \varepsilon)$ с внутренним переходным слоем в окрестности

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №15-01-04619.

некоторой точки $x_* = x_0 + o(\varepsilon)$, $x_0 \in (0;1)$. Это решение удовлетворяет предельному равенству

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(x,\varepsilon) = \begin{cases} \varphi_1(x), & 0 \le x < x_0, \\ \varphi_3(x), & x_0 < x \le 1, \end{cases} \tag{3}$$

где $u = \varphi_1(x)$ и $u = \varphi_3(x)$ – корни вырожденного уравнения

$$f(u,x,0) = 0. \tag{4}$$

Равенство (3) показывает, что в окрестности точки x_* происходит быстрый переход решения $u(x,\varepsilon)$ от одного корня вырожденного уравнения к другому корню – образуется переходный слой. При этом существенным требованием в [1] было условие

$$f_u(\varphi_i(x), x, 0) > 0 \ \text{ при } \ 0 \le x \le 1, \ \ i = 1;3,$$

в силу которого корни $\varphi_1(x)$ и $\varphi_3(x)$ уравнения (4) являются простыми (однократными).

С помощью известного алгоритма А.Б. Васильевой (см. [1]) была построена асимптотика решения $u(x,\varepsilon)$ с внутренним переходным слоем. При этом функции $Q_i^{(-)}(\tau)$, $\tau = \frac{x - x_*}{\varepsilon} \le 0$ и $Q_i^{(+)}(\tau)$, $\tau \ge 0$, описывающие быстрое изменение решения в переходном слое слева и справа от точки x_*, имели экспоненциальные оценки

$$\left| Q_i^{(\pm)}(\tau) \right| \le c \exp(-\kappa |\tau|),$$

где c и κ – здесь и далее подходящие положительные числа, не зависящие от ε.

Можно сказать, что слева и справа от точки x_* переходный слой был однозонным, т.е. состоял из одной зоны с экспоненциальным убыванием функций переходного слоя $Q_i^{(\pm)}(\tau)$ во всей зоне.

В данной работе рассматривается решение задачи (1), (2) с переходным слоем в том случае, когда один из корней $\varphi_1(x)$ и $\varphi_3(x)$ вырожденного уравнения (4) является простым, а другой корень – двукратным. В связи с этим потребуем выполнения следующего условия.

Условие A1. *Пусть*

$$f(u,x,\varepsilon) = h(u,x)(u - \varphi_1(x))^2 - \varepsilon f_1(u,x,\varepsilon),$$

где

$$h(u,x) = (u - \varphi_2(x))(u - \varphi_3(x)),$$

и пусть

$$\varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \varphi_3(x) \ \text{ при } \ 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

причём функции $\varphi_i(x)$, $i = 1,2,3$ и $f_1(u,x,\varepsilon)$ являются достаточно гладкими.

Как обычно, требуемый порядок гладкости зависит от порядка асимптотики, которую мы хотим построить. Поскольку речь пойдёт об асимптотике произвольного порядка, будем считать указанные функции бесконечно дифференцируемыми.

Из условия A1 следует, что корни $\varphi_2(x)$ и $\varphi_3(x)$ вырожденного уравнения (4) являются простыми, а корень $\varphi_1(x)$ – двукратным. Как будет видно из дальнейшего, это приводит к качественному изменению характера асимптотики решения задачи (1), (2) с внутренним переходным слоем по сравнению со случаем, когда все корни $\varphi_i(x)$ – простые, причём изменение касается всех слагаемых асимптотического разложения решения – регулярной части, погранслойной части и функций переходного слоя, в частности переходный слой становится многозонным.

Особенности пограничнго слоя в сингулярно возмущённых задачах с кратным корнем вырожденного уравнения исследовались ранее в работах [2, 3]. Результаты этих исследований используются в данной работе. В п. 2 при условии A1 и введённом ниже условии A2 построено асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) с внутренним переходным слоем, в п. 3 при ещё одном условии A3 доказано существование решения с построенной асимптотикой.

2. Построение асимптотики решения

2.1. Вид асимптотики. Обозначим через x_* неизвестную пока точку интервала $(0;1)$, в окрестности которой происходит быстрый переход решения $u(x,\varepsilon)$ от корня $\varphi_1(x)$ к корню $\varphi_3(x)$. Более точно, будем считать, что искомая точка перехода x_* – это та точка, в которой решение $u(x,\varepsilon)$ пересекается с корнем $\varphi_2(x)$ вырожденного уравнения, т.е. выполняется равенство

$$u(x_*,\varepsilon) = \varphi_2(x_*). \tag{6}$$

Асимптотическое разложение искомого решения $u(x,\varepsilon)$ будем строить раздельно слева и справа от точки x_* в виде, традиционном для метода пограничных функций:

$$u(x,\varepsilon) = \begin{cases} u^{(-)}(x,\varepsilon), & 0 \le x \le x_*, \\ u^{(+)}(x,\varepsilon), & x_* \le x \le 1, \end{cases} \tag{7}$$

где

$$u^{(-)}(x,\varepsilon) = \bar{u}^{(-)}(x,\varepsilon) + Q^{(-)}(\tau,\varepsilon) + \Pi^{(-)}(\xi,\varepsilon), \tag{8}$$

$$u^{(+)}(x,\varepsilon) = \bar{u}^{(+)}(x,\varepsilon) + Q^{(+)}(\tau,\varepsilon) + \Pi^{(+)}(\tilde{\xi},\varepsilon), \tag{9}$$

$\bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ – регулярные части асимптотики; $Q^{(\mp)}(\tau,\varepsilon)$ – члены асимптотики, описывающие быстрое изменение решения в окрестности точки перехода x_*, $\tau = \frac{x-x_*}{\varepsilon}$; $\Pi^{(-)}(\xi,\varepsilon)$ и $\Pi^{(+)}(\tilde{\xi},\varepsilon)$ – погранслойные части асимптотики соответственно в окрестностях точек $x=0$ и $x=1$, причём погранслойные переменные ξ и $\tilde{\xi}$ имеют разные масштабы, а именно, $\xi = \frac{x}{\varepsilon^{3/4}}$, $\tilde{\xi} = \frac{1-x}{\varepsilon}$. Забегая вперёд, отметим, что указанное различие в масштабах погранслойных переменных связано с тем, что слева от точки x_* главным членом регулярной части асимптотики будет двукратный корень $\varphi_1(x)$ вырожденного уравнения (4), а справа от точки x_* – однократный корень $\varphi_3(x)$. Построив в виде рядов слагаемые, входящие в правые части равенств (8) и (9), мы докажем затем, что разложения (8) и (9) являются асимптотиками решений двух вспомогательных краевых задач для уравнения (1), первая из которых рассматривается на отрезке $0 \le x \le x_*$ с краевыми условиями

$$\frac{du^{(-)}}{dx}(0,\varepsilon) = 0, \quad u^{(-)}(x_*,\varepsilon) = \varphi_2(x_*), \tag{10}$$

а вторая – на отрезке $x_* \le x \le 1$ с краевыми условиями

$$u^{(+)}(x_*,\varepsilon) = \varphi_2(x_*), \quad \frac{du^{(+)}}{dx}(1,\varepsilon) = 0. \tag{11}$$

После этого будет доказано, что на интервале $(0;1)$ существует (при определённых условиях) такая точка x_*, для которой

$$\frac{du^{(-)}}{dx}(x_*,\varepsilon) = \frac{du^{(+)}}{dx}(x_*,\varepsilon). \tag{12}$$

Тем самым будет доказано, что функция $u(x,\varepsilon)$, определённая для найденного значения x_* формулой (7), является решением задачи (1), (2) с внутренним переходным слоем в окрестности точки x_*.

Отметим, что равенство (12) будет в дальнейшем источником уравнений для нахождения коэффициентов разложения в ряд искомой точки x_*.

2.2. Построение асимптотики решения второй вспомогательной задачи

Начнём построение асимптотики со второй вспомогательной задачи, для неё построение ведётся стандартным способом (см. [1]). Строим асимптотику в виде (9), а каждое слагаемое в (9) ищем в виде ряда по целым степеням ε.

2.2.1. Регулярная часть асимптотики. Слагаемое $\bar{u}^{(+)}(x,\varepsilon)$ из правой части (9) представим в виде ряда

$$\bar{u}^{(+)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{u}_i^{(+)}(x). \tag{13}$$

Стандартным способом, т.е. путём приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε в разложениях обеих частей равенства

$$\varepsilon^2 \frac{d^2\bar{u}^{(+)}}{dx^2}(x,\varepsilon) = f(\bar{u}^{(+)}(x,\varepsilon), x, \varepsilon),$$

получаются уравнения для коэффициентов $\bar{u}_i^{(+)}(x)$ ряда (13). Для $\bar{u}_0^{(+)}(x)$ имеем вырожденное уравнение

$$f(\bar{u}_0^{(+)}, x, 0) = \left(\bar{u}_0^{(+)} - \varphi_1(x)\right)^2 \left(\bar{u}_0^{(+)} - \varphi_2(x)\right) \left(\bar{u}_0^{(+)} - \varphi_3(x)\right) = 0.$$

В качестве $\bar{u}_0^{(+)}(x)$ возьмём корень $\varphi_3(x)$:

$$\bar{u}_0^{(+)}(x) = \varphi_3(x).$$

Следующие члены ряда (13) однозначно определяются из линейных уравнений вида

$$\bar{f}_u^{(+)}(x)\bar{u}_i = f_i^{(+)}(x),$$

где

$$\bar{f}_u^{(+)}(x) = \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi_3(x), x, 0) = (\varphi_3(x) - \varphi_1(x))^2(\varphi_3(x) - \varphi_2(x)) > 0 \text{ при } x_* \le x \le 1. \quad (14)$$

а $f_i^{(+)}(x)$ реккурентно выражаются через $\bar{u}_j^{(+)}(x)$ с номерами $j < i$.

2.2.2. Функции переходного слоя. Слагаемое $Q^{(+)}(\tau, \varepsilon)$ из правой части (9) представим в виде ряда

$$Q^{(+)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_i^{(+)}(\tau), \quad \tau = \frac{x - x_*}{\varepsilon} \ge 0. \quad (15)$$

Задачи для функций $Q_i^{(+)}(\tau)$ получаются стандартным способом из уравнения

$$\frac{d^2 Q^{(+)}}{d\tau^2} = Q^{(+)} f := f(\bar{u}^{(+)}(x_* + \varepsilon\tau, \varepsilon) + Q^{(+)}(\tau, \varepsilon), x_* + \varepsilon\tau, \varepsilon) -$$

$$- f(\bar{u}^{(+)}(x_* + \varepsilon\tau, \varepsilon), x_* + \varepsilon\tau, \varepsilon), \quad \tau > 0 \quad (16)$$

с граничными условиями

$$Q^{(+)}(0, \varepsilon) = \varphi_2(x_*) - \bar{u}^{(+)}(x_*, \varepsilon), \quad Q^{(+)}(\infty, \varepsilon) = 0. \quad (17)$$

Первое из этих условий следует из первого условия (11) с учётом того, что погранслойные члены, входящие в $\Pi^{(+)}(\tilde{\xi})$, в точке x_* будут величинами более высокого порядка малости, чем любая положительная степень ε, а второе условие является стандартным для функций типа Q – функций и Π – функций (см. [1]).

Из (16) и (17) для $Q_0^{(+)}(\tau)$ имеем задачу

$$\frac{d^2 Q_0^{(+)}}{d\tau^2} = f(\varphi_3(x_*) + Q_0^{(+)}, x_*, 0), \quad \tau > 0, \quad (18)$$

$$Q_0^{(+)}(0) = \varphi_2(x_*) - \varphi_3(x_*), \quad Q_0^{(+)}(\infty) = 0. \quad (19)$$

Отметим, что неизвестное x_* входит в задачу для $Q_0^{(+)}(\tau)$ (и также будет для следующих $Q_i^{(+)}(\tau), \;\; i = 1, 2, \ldots$) как параметр.

Задача (18), (19) сводится стандартным образом к уравнению первого порядка

$$\frac{dQ_0^{(+)}}{d\tau} = \left[2\int_0^{Q_0^{(+)}} f(\varphi_3(x_*) + s, x_*, 0) ds \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \tau \ge 0 \quad (20)$$

с начальным условием

$$Q_0^{(+)}(0) = \varphi_2(x_*) - \varphi_3(x_*).$$

Уравнение (20) интегрируется в квадратурах, его решение с указанным начальным условием монотонно стремится к нулю при $\tau \to \infty$ и имеет экспоненциальную оценку (см. [1]):

$$\left| Q_0^{(+)}(\tau) \right| \le c \exp(-\kappa\tau), \quad \tau \ge 0. \tag{21}$$

Из (20) при $\tau = 0$ находим:

$$\frac{dQ_0^{(+)}}{d\tau}(0) = \left[2 \int_0^{\varphi_2(x_*)-\varphi_3(x_*)} f(\varphi_3(x_*) + s, x_*, 0) ds \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[2 \int_{\varphi_3(x_*)}^{\varphi_2(x_*)} f(u, x_*, 0) du \right]^{\frac{1}{2}} =: I^{(+)}(x_*). \tag{22}$$

Это выражение для $\frac{dQ_0^{(+)}}{d\tau}(0)$ нам понадобится ниже при рассмотрении условия (12) сшивания производных.

Для следующих коэффициентов $Q_i^{(+)}(\tau)$, $i = 1, 2, \dots$ ряда (15) получаются линейные задачи вида

$$\frac{d^2 Q_i^{(+)}}{d\tau^2} = f_u^{(+)}(\tau) Q_i^{(+)} + q_i^{(+)}(\tau), \quad \tau > 0,$$
$$Q_i^{(+)}(0) = -\bar{u}_i^{(+)}(x_*), \quad Q_i^{(+)}(\infty) = 0, \tag{23}$$

где $f_u^{(+)}(\tau) := \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi_3(x_*) + Q_0^{(+)}(\tau), x_*, 0)$, а функции $q_i^{(+)}(\tau)$ выражаются рекуррентно через $Q_j^{(+)}(\tau)$ с номерами $j < i$ и имеют экспоненциальную оценку типа (21) при условии, что такую же оценку имеют функции $Q_j^{(+)}(\tau)$ с номерами $j < i$. Решение задачи (23) находится в явном виде

$$Q_i^{(+)}(\tau) = -\Phi(\tau)\Phi^{-1}(0)\bar{u}_i^{(+)}(x_*) + \Phi(\tau) \int_0^\tau \Phi^{-2}(s) \int_\infty^s \Phi(\sigma) q_i^{(+)}(\sigma) d\sigma ds, \tag{24}$$

где $\Phi(\tau) = \frac{dQ_0^{(+)}}{d\tau}(\tau)$. Из (24) следует экспоненциальная оценка типа (21) для $Q_i^{(+)}(\tau)$.

2.2.3. Функции пограничного слоя. Слагаемое $\Pi^{(+)}(\tilde{\xi}, \varepsilon)$ из правой части (9) представим в виде ряда

$$\Pi^{(+)}(\tilde{\xi}, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi}), \quad \tilde{\xi} = \frac{1-x}{\varepsilon} \ge 0. \tag{25}$$

Заметим, что ряд (25) начинается с члена порядка ε. Это связано с тем, что второе граничное условие (11) – второго рода. Учитывая, что при $x = 1$ все функции $Q_i^{(+)}(\tau)$ в силу оценки типа (21) являются величинами более высокого порядка малости, чем любая положительная степень ε, запишем второе условие из (11) в виде

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \frac{d\bar{u}_i^{(+)}}{dx}(1) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \frac{d\Pi_i^{(+)}}{d\tilde{\xi}}(0) = 0.$$

Отсюда получаем граничные условия для функций $\Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi})$ при $\tilde{\xi}=0$:

$$\frac{d\Pi_i^{(+)}}{d\tilde{\xi}}(0) = -\frac{d\bar{u}_i^{(+)}}{dx}(1), \quad i=0,1,2,\ldots \tag{26}$$

Уравнение для функций $\Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi})$ получается стандартным способом из равенства

$$\frac{d^2\Pi^{(+)}}{d\tilde{\xi}^2} = \Pi^{(+)}f := f(\bar{u}^{(+)}(1-\varepsilon\tilde{\xi},\varepsilon)+\Pi^{(+)}(\tilde{\xi},\varepsilon),1-\varepsilon\tilde{\xi},\varepsilon)-$$

$$-f(\bar{u}^{(+)}(1-\varepsilon\tilde{\xi},\varepsilon),1-\varepsilon\tilde{\xi},\varepsilon)$$

и имеет вид

$$\frac{d^2\Pi_i^{(+)}}{d\tilde{\xi}^2} = \bar{f}_u^{(+)}(1)\Pi_i^{(+)} + \pi_i^{(+)}(\tilde{\xi}), \quad \tilde{\xi}>0, \tag{27}$$

где $\bar{f}_u^{(+)}(1) := \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi_3(1),1,0) > 0$ в силу (14), а функции $\pi_i^{(+)}(\tilde{\xi})$ выражаются рекуррентно через $\Pi_j^{(+)}(\tilde{\xi})$ с номерами $j<i$, в частности $\pi_0^{(+)}(\tilde{\xi})\equiv 0$.

К уравнению (27) и граничному условию (26) добавим стандартное для пограничных функций условие на бесконечности:

$$\Pi_i^{(+)}(\infty)=0.$$

Решения уравнений (27) с граничными условиями (26) и условием на бесконечности можно последовательно (для $i=0,1,2,\ldots$) найти в явном виде, в частности,

$$\Pi_0^{(+)}(\tilde{\xi}) = \frac{d\varphi_3}{dx}(1)a^{-1}\exp(-a\tilde{\xi}),$$

где $a=\sqrt{\bar{f}_u^{(+)}(1)}$. Все функции $\Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi})$ имеют экспоненциальную оценку

$$\left|\Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi})\right| \le c\exp(-\kappa\tilde{\xi}), \quad \tilde{\xi}\ge 0.$$

2.3. Теорема о существовании решения второй вспомогательной задачи

Обозначим через $U_n^{(+)}(x,\varepsilon)$ частичную сумму построенного разложения (9):

$$U_n^{(+)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\left[\bar{u}_i^{(+)}(x)+Q_i^{(+)}(\tau)+\varepsilon\Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi})\right]. \tag{28}$$

Теорема 1. *Если выполнено условие A1, то для достаточно малых ε краевая задача (1), (11) имеет решение $u^{(+)}(x,\varepsilon)$, для которого справедливо равенство*

$$u^{(+)}(x,\varepsilon) = U_n^{(+)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad x_* \le x \le 1. \tag{29}$$

Доказательство этой теоремы можно провести так же, как и доказательство аналогичной теоремы в [4].

Следствие. *Для производной* $\frac{du^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon)$ *справедливо асимптотическое представление*

$$\frac{du^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon) = \frac{dU_n^{(+)}(x,\varepsilon)}{dx} + O(\varepsilon^n), \quad x_* \le x \le 1. \tag{30}$$

Доказательство. Для функции $U_k^{(+)}(x,\varepsilon)$ в силу самого способа её построения справедливы равенства

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 U_k^{(+)}}{dx^2}(x,\varepsilon) = f\left(U_k^{(+)}(x,\varepsilon), x, \varepsilon\right) + O\left(\varepsilon^{k+1}\right), \quad x_* \le x \le 1,$$

$$\frac{dU_k^{(+)}}{dx}(1,\varepsilon) = o(\varepsilon^N) \text{ для любого } N.$$

Интегрируя обе части первого равенства от 1 до x с учётом второго равенства, получаем

$$\varepsilon^2 \frac{dU_k^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon) = \int_1^x f(U_k^{(+)}(x,\varepsilon), x, \varepsilon)dx + O(\varepsilon^{k+1}). \tag{31}$$

Проинтегрируем также от 1 до x обе части равенства

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u^{(+)}}{dx^2}(x,\varepsilon) = f(u^{(+)}(x,\varepsilon), x, \varepsilon)$$

с учётом условия $\frac{du^{(+)}}{dx}(1,\varepsilon) = 0$. Получим

$$\varepsilon^2 \frac{du^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon) = \int_1^x f(u^{(+)}(x,\varepsilon), x, \varepsilon)dx,$$

а так как $u^{(+)}(x,\varepsilon) = U_k^{(+)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{k+1})$ в силу (29), то

$$\varepsilon^2 \frac{du^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon) = \int_1^x f(U_k^{(+)}(x,\varepsilon), x, \varepsilon)dx + O(\varepsilon^{k+1}). \tag{32}$$

Сравнивая равенства (31) и (32), приходим к равенству

$$\frac{du^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon) = \frac{dU_k^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{k-1}).$$

Для $k = n+1$ последнее равенство принимает вид

$$\frac{du^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon) = \frac{dU_{n+1}^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^n), \tag{33}$$

а поскольку

$$\frac{dU_{n+1}^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon) = \frac{dU_n^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^n),$$

то из (33) следует (30). Следствие доказано.

2.4. Построение асимптотики решения первой вспомогательной задачи

Асимптотика решения задачи (1), (10) будет состоять из трёх частей (см. (8)), но при этом структура каждой части будет качественно отличаться от структуры аналогичных слагаемых в (9). Это обусловлено тем, что в качестве главного члена регулярной части асимптотики решения задачи (1), (10) будет взят двукратный корень вырожденного уравнения (4), т.е. функция $\varphi_1(x)$.

2.4.1. Регулярная часть асимптотики. В отличие от (13) регулярная часть асимптотики в задаче (1), (10) будет рядом по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$\bar{u}^{(-)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{2}} \bar{u}_i^{(-)}(x). \tag{34}$$

Для $\bar{u}_0^{(-)}(x)$ снова получаем вырожденное уравнение (4), но, в отличие от $\bar{u}_0^{(+)}(x)$, в качестве $\bar{u}_0^{(-)}(x)$ возьмём корень $\varphi_1(x)$:

$$\bar{u}_0^{(-)}(x) = \varphi_1(x).$$

Для $\bar{u}_1^{(-)}(x)$ получается квадратное уравнение

$$\bar{h}(x)\left(\bar{u}_1^{(-)}(x)\right)^2 - \bar{f}_1(x) = 0, \tag{35}$$

где

$$\bar{h}(x) := h(\varphi_1(x), x) = (\varphi_1(x) - \varphi_2(x))(\varphi_1(x) - \varphi_3(x)) > 0 \tag{36}$$

в силу (5),

$$\bar{f}_1(x) := f_1(\varphi_1(x), x, 0).$$

Для разрешимости уравнения (35) необходимо и достаточно выполнения неравенства $\bar{f}_1(x) \geq 0$.

Условие A2. *Пусть* $\bar{f}_1(x) > 0$ *при* $0 \leq x \leq 1$.

Отметим, что случай $\bar{f}_1(x) = 0$ требует отдельного рассмотрения.

При условии A2 уравнение (35) имеет два корня. В качестве $\bar{u}_1^{(-)}(x)$ возьмём положительный корень

$$\bar{u}_1^{(-)}(x) = \left[\bar{h}^{-1}(x)\bar{f}_1(x)\right]^{\frac{1}{2}} > 0. \tag{37}$$

Такой выбор будет оправдан ниже при рассмотрении уравнений для функций $Q_i^{(-)}(\tau)$, $\Pi_i^{(-)}(\xi)$ и далее при доказательстве существования решения задачи (1), (10) с построенной асимптотикой.

Следующие члены $\bar{u}_i^{(-)}(x)$ ряда (34) однозначно определяются из линейных алгебраических уравнений.

2.4.2. Функции переходного слоя. В отличие от $Q^{(+)}(\tau,\varepsilon)$ слагаемое $Q^{(-)}(\tau,\varepsilon)$ из правой части (8) будем строить в виде ряда по целым степеням $\varepsilon^{\frac{1}{4}}$:

$$Q^{(-)}(\tau,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{4}} Q_i^{(-)}(\tau), \tag{38}$$

причём коэффициенты $Q_i^{(-)}(\tau)$ этого ряда будут зависеть не только от τ, но также и от ε, однако для упрощения записи зависимость от ε не будем указывать, т.е. будем писать $Q_i^{(-)}(\tau)$ вместо $Q_i^{(-)}(\tau,\varepsilon)$. Задачи для функций $Q_i^{(-)}(\tau)$ формируются с помощью уравнения и граничных условий, аналогичных (16) и (17):

$$\frac{d^2Q^{(-)}}{d\tau^2} = Q^{(-)}f := f(\bar{u}^{(-)}(x_* + \varepsilon\tau, \varepsilon) + Q^{(-)}(\tau,\varepsilon), x_* + \varepsilon\tau, \varepsilon) -$$

$$- f(\bar{u}^{(-)}(x_* + \varepsilon\tau, \varepsilon), x_* + \varepsilon\tau, \varepsilon), \quad \tau < 0, \tag{39}$$

$$Q^{(-)}(0,\varepsilon) = \varphi_2(x_*) - \bar{u}^{(-)}(x_*,\varepsilon), \quad Q^{(-)}(-\infty,\varepsilon) = 0. \tag{40}$$

Однако извлечение из (39) уравнений для функций $Q_i^{(-)}(\tau)$ производится не стандартным способом (как это делалось для функций $Q_i^{(+)}(\tau)$), а с помощью специального алгоритма, поскольку стандартный способ оказывается непригодным в случае кратного корня вырожденного уравнения (см. [2]).

Опишем алгоритм формирования уравнений для функций $Q_i^{(-)}(\tau)$.

Уравнение для $Q_0^{(-)}(\tau)$ возьмём в виде

$$\frac{d^2Q_0^{(-)}}{d\tau^2} = h(\varphi_1(x_*) + Q_0^{(-)}, x_*)\left[\left(Q_0^{(-)}\right)^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1^{(-)}(x_*)Q_0^{(-)}\right], \quad \tau < 0, \tag{41}$$

а граничные условия получаем из (40):

$$Q_0^{(-)}(0) = \varphi_2(x_*) - \varphi_1(x_*), \quad Q_0^{(-)}(-\infty) = 0. \tag{42}$$

Отметим, что при стандартном алгоритме правая часть уравнения (41) не будет содержать второго слагаемого в квадратных скобках, в результате чего решение $Q_0^{(-)}(\tau)$ будет стремиться к нулю при $\tau \to \infty$ как $O\left(\frac{1}{\tau^2}\right)$, что не соответствует истинному поведению решения задачи (1), (10) в окрестности точки x_*. Задача (41), (42) сводится стандартным образом к уравнению первого порядка

$$\frac{dQ_0^{(-)}}{d\tau} = \left[2\int_0^{Q_0^{(-)}} h(\varphi_1(x_*) + s, x_*)\left(s^2 + 2\sqrt{\varepsilon}u_1^{(-)}(x_*)s\right)ds\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \tau \le 0 \tag{43}$$

с начальным условием

$$Q_0^{(-)}(0) = \varphi_2(x_*) - \varphi_1(x_*). \tag{44}$$

Несложный анализ показывает (см. [2]), что решение $Q_0^{(-)}(\tau)$ задачи (43), (44) монотонно стремится к нулю при $\tau \to -\infty$, причём характер этого стремления различный на разных промежутках изменения τ.

Можно выделить три зоны. Первой зоной является промежуток $-\varepsilon^{-\gamma} \le \tau \le 0$ (т.е. $-\varepsilon^{1-\gamma} \le x \le 0$), где в качестве γ можно взять любое число из промежутка $0 \le \gamma < \frac{1}{4}$. В этой зоне $Q_0^{(-)}(\tau) = O\left(\frac{1}{1+\tau^2}\right)$, т.е. функция $Q_0^{(-)}(\tau)$ убывает с ростом $|\tau|$ степенным образом.

Промежуток $-\varepsilon^{-\frac{1}{4}} \le \tau \le -\varepsilon^{-\gamma}$ (т.е. $-\varepsilon^{\frac{3}{4}} \le x \le -\varepsilon^{1-\gamma}$) является второй (переходной) зоной. Здесь происходит изменение характера убывания функции $Q_0^{(-)}(\tau)$ и изменяется масштаб растянутой переменной.

И, наконец, в третьей зоне, где $\tau \le -\varepsilon^{-\frac{1}{4}}$ (т.е. $x \le -\varepsilon^{\frac{3}{4}}$) функция $Q_0^{(-)}(\tau)$ имеет оценку

$$Q_0^{(-)}(\tau) = O(\sqrt{\varepsilon})\exp(\kappa\zeta), \quad \text{где} \ \ \zeta = \varepsilon^{\frac{1}{4}}\tau = \frac{x - x_*}{\varepsilon^{\frac{3}{4}}},$$

т.е. новая растянутая переменная ζ имеет иной масштаб, нежели старая переменная τ, а функция $Q_0^{(-)}$ убывает экспоненциально при $\zeta \to -\infty$. Отметим, что описанное поведение функции $Q_0^{(-)}(\tau)$ обусловлено тем, что $\bar{u}_1^{(-)}(x_*) > 0$ (см. (37)). Отметим также, что уравнение (43) интегрируется в квадратурах.

Для $Q_0^{(-)}(\tau)$ нетрудно получить следующую оценку:

$$\left|Q_0^{(-)}(\tau)\right| \le cQ_\kappa(\tau), \quad \tau \le 0, \tag{45}$$

где

$$Q_\kappa(\tau) = \frac{\sqrt{\varepsilon}\exp\left(\varepsilon^{\frac{1}{4}}\kappa\tau\right)}{\left[1 - (1 - \varepsilon^{\frac{1}{4}})\exp(\varepsilon^{\frac{1}{4}}\kappa\tau)\right]^2}. \tag{46}$$

Функция $Q_\kappa(\tau)$ характеризуется таким же поведением, как и функция $Q_0^{(-)}(\tau)$. Она играет роль эталонной (оценочной) функции для членов $Q_i^{(-)}(\tau)$ ряда (38) аналогично тому, как функция $\exp(-\kappa\tau)$ была эталонной функцией для членов $Q_i^{(+)}(\tau)$ ряда (15).

Из (43) при $\tau = 0$ следует равенство

$$\frac{dQ_0^{(-)}}{d\tau}(0) = \left[2\int_{\varphi_1(x_*)}^{\varphi_2(x_*)} \left[f(u, x_*, 0) + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1^{(-)}(x_*)\left(u - \varphi_1(x_*)\right)\right]du\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Разложив правую часть в ряд по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$, получим:

$$\frac{dQ_0^{(-)}}{d\tau}(0) = I^{(-)}(x_*) + \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^{\frac{i}{2}}g_i(x_*), \tag{47}$$

где

$$I^{(-)}(x_*) = \left[2\int_{\varphi_1(x_*)}^{\varphi_2(x_*)} f(u, x_*, 0)du\right]^{\frac{1}{2}},$$

$g_i(x_*)$ – бесконечно дифференцируемые функции.

Задачи для следующих коэффициентов $Q_i^{(-)}(\tau), i = 1, 2, \dots$ ряда (38) имеют вид

$$\frac{d^2Q_i^{(-)}}{d\tau^2} = \alpha(\tau, \varepsilon)Q_i^{(-)} + q_i^{(-)}(\tau, \varepsilon), \quad \tau < 0, \tag{48}$$

$$Q_i^{(-)})0) = \begin{cases} -\bar{u}_{\frac{i}{2}}^{(-)}(x_*), & \text{если } i \text{ – чётное число,} \\ 0, & \text{если } i \text{ – нечётное число,} \end{cases} \qquad Q_i^{(-)}(-\infty) = 0, \tag{49}$$

где

$$\alpha(\tau, \varepsilon) = h_u(\tau)\left[(Q_0^{(-)}(\tau))^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1^{(-)}(x_*)Q_0^{(-)}(\tau)\right] + 2h(\tau)\left[Q_0^{(-)}(\tau) + \sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1^{(-)}(x_*)\right], \tag{50}$$

$h_u(\tau) = \frac{\partial h}{\partial u}(\varphi(x_*) + Q_0^{(-)}(\tau), x_*)$ и аналогичный смысл имеет обозначение $h(\tau)$, а функции $q_i^{(-)}(\tau,\varepsilon)$ рекуррентно выражаются через $Q_j^{(-)}(\tau)$ с номерами $j < i$ и формируются не стандартным способом. Чтобы описать этот способ, перепишем правую часть уравнения (39) в следующем виде (учитывая, что $x = x_* + \varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta$):

$$Q^{(-)}f = h\left(\bar{u}^{(-)}(x_* + \varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta, \varepsilon) + Q^{(-)}(\tau,\varepsilon), x_* + \varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta\right)\Big[\bar{u}^{(-)}(x_* + \varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta, \varepsilon) -$$

$$-\varphi_1(x_* + \varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta) + Q^{(-)}(\tau,\varepsilon)\Big]^2 - h\left(\bar{u}^{(-)}(x_* + \varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta, \varepsilon), x_* + \varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta\right)\cdot$$

$$\cdot\Big[\bar{u}^{(-)}(x_* + \varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta, \varepsilon) - \varphi_1(x_* + \varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta\Big]^2 - \varepsilon Q^{(-)}f_1.$$

Разложим правую часть этого равенства в ряд по целым степеням $\varepsilon^{\frac{1}{4}}$ и обозначим коэффициент при $(\varepsilon^{\frac{1}{4}})^i$ через $\beta_i(\zeta, Q_0^{(-)}, \ldots, Q_{i-1}^{(-)})$. В этот коэффициент мы не включаем слагаемые $\left[h_u(\tau)(Q_0^{(-)}(\tau))^2 + 2h(\tau)Q_0^{(-)}(\tau)\right]Q_i^{(-)}$, они вошли в выражение для $\alpha(\tau,\varepsilon)Q_i^{(-)}$ (см. (50)).

Если какое-то слагаемое (обозначим его $\beta_{ij}(\zeta, Q_0^{(-)}, \ldots, Q_{i-1}^{(-)})$), входящее в состав $\beta_i(\zeta, Q_0^{(-)}, \ldots, Q_{i-1}^{(-)})$, имеет оценку по модулю, содержащую не менее двух сомножителей $|Q_k^{(-)}(\tau|$ с какими-то номерами $k < i$, т.е. $|\beta_{ij}| \le c|Q_k^{(-)}(\tau)| \cdot |Q_l^{(-)}(\tau)|,\ \ k < i,\ \ l < i$, то это слагаемое, заменив ζ на $\varepsilon^{\frac{1}{4}}\tau$, включаем в $q_i^{(-)}(\tau,\varepsilon)$; если же оценка по модулю β_{ij} содержит только один сомножитель $|Q_k^{(-)}(\tau)|,\ \ k < i$, то это слагаемое, умноженное на $\sqrt{\varepsilon}$, включаем в $q_{i-2}^{(-)}(\tau,\varepsilon)$, заменив, как и в первом случае, ζ на $\varepsilon^{\frac{1}{4}}\tau$.

Отметим, что $q_1^{(-)}(\tau,\varepsilon) \equiv 0$, поэтому $Q_1^{(-)}(\tau) \equiv 0$, и выпишем в качестве примера выражение для $q_2^{(-)}(\tau,\varepsilon)$:

$$q_2^{(-)}(\tau,\varepsilon) = \big(h(\tau) - \bar{h}(x_*)\big)\cdot\sqrt{\varepsilon}\left(\bar{u}_1^{(-)}(x_*)\right)^2 + 2h(\tau)\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_2^{(-)}(x_*)Q_0^{(-)}(\tau) +$$

$$+h_u(\tau)\bar{u}_1^{(-)}(x_*)\Big[\left(Q_0^{(-)}(\tau)\right)^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1^{(-)}(x_*)Q_0^{(-)}(\tau)\Big] + \sqrt{\varepsilon}Q_0 f_1.$$

Описанная процедура формирования функций $q_i^{(-)}(\tau,\varepsilon)$ позволяет получить для них последовательно (для $i = 2, 3, \ldots$) оценку вида

$$|q_i^{(-)}(\tau,\varepsilon)| \le c\left(Q_\kappa^2(\tau) + \sqrt{\varepsilon}Q_\kappa(\tau)\right), \tag{51}$$

где функция $Q_\kappa(\tau)$ определена формулой (46), а постоянные c и κ будут, вообще говоря, различными для разных i.

Неравенство (51) обеспечивает для всех $Q_i^{(-)}(\tau)$ оценку типа (45):

$$|Q_i^{(-)}(\tau)| \le cQ_\kappa(\tau), \quad ,\tau \le 0 \quad i = 2, 3, \ldots, \tag{52}$$

с различными c и κ для разных i. Из этой оценки следует, что все $Q_i^{(-)}(\tau)$ имеют такое же поведение, как и $Q_0^{(-)}(\tau)$. Оценка (52) доказывается так же, как и в [2], с использованием явного выражения для $Q_i^{(-)}(\tau)$:

$$Q_i^{(-)}(\tau) = \Psi(\tau)\Psi^{-1}(0)Q_i^{(-)}(0) + \Psi(\tau)\int_0^\tau \Psi^{-2}(s)\int_{-\infty}^s \Psi(\sigma)q_i^{(-)}(\sigma,\varepsilon)d\sigma ds,$$

где

$$\Psi(\tau) = \frac{dQ_0^{(-)}}{d\tau}(\tau).$$

2.4.3. Функции пограничного слоя. Слагаемое $\Pi^{(-)}(\xi, \varepsilon)$ из правой части (7) будем строить в виде ряда

$$\Pi^{(-)}(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{3}{4}} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{4}} \Pi_i^{(-)}(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\varepsilon^{\frac{3}{4}}} \geq 0. \tag{53}$$

Заметим, что погранслойная переменная ξ имеет другой масштаб, нежели переменная $\tilde{\xi}$ в (25). Это связано с двукратностью корня $\varphi_1(x)$ вырожденного уравнения, а то обстоятельство, что ряд (53) начинается с члена порядка $\varepsilon^{\frac{3}{4}}$, обусловлено граничным условием $\frac{du^{(-)}}{dx}(0, \varepsilon) = 0$ (см. (10)). Из этого условия получаются граничные условия при $\xi = 0$ для членов ряда (53):

$$\frac{d\Pi_i^{(-)}}{d\xi}(0) = \begin{cases} -\frac{d\bar{u}_{\frac{i}{2}}^{(-)}}{dx}(0), & \text{если } i \text{ – чётное число,} \\ 0, & \text{если } i \text{ – нечётное число.} \end{cases} \tag{54}$$

Уравнения для функций $\Pi_i^{(-)}(\xi)$ извлекаются стандартным способом из равенства

$$\sqrt{\varepsilon}\frac{d^2\Pi^{(-)}}{d\xi^2} = \Pi^{(-)}f := f\left(\bar{u}^{(-)}(\varepsilon^{\frac{3}{4}}\xi, \varepsilon) + \Pi^{(-)}, \varepsilon^{\frac{3}{4}}\xi, \varepsilon\right) - f\left(\bar{u}^{(-)}(\varepsilon^{\frac{3}{4}}\xi, \varepsilon), \varepsilon^{\frac{3}{4}}\xi, \varepsilon\right)$$

и имеет вид

$$\frac{d^2\Pi_i^{(-)}}{d\xi^2} = k^2\Pi_i^{(-)} + \pi_i^{(-)}(\xi), \quad \xi > 0, \tag{55}$$

где $k = \left[2\bar{h}(0)\bar{u}_1^{(-)}(0)\right]^{\frac{1}{2}} > 0$ в силу (36) и (37), а функции $\pi_i^{(-)}(\xi)$ выражаются рекуррентно через $\Pi_j^{(-)}(\xi)$ с номерами $j < i$, в частности, $\pi_0^{(-)}(\xi) \equiv 0$. Таким образом, положительность $\bar{u}_1^{(-)}(x)$ играет важную роль и при определении функций $\Pi_i^{(-)}(\xi)$.

К уравнению (55) и граничному условию (54) добавим традиционное для пограничных функций условие на бесконечности:

$$\Pi_i^{(-)}(\infty) = 0. \tag{56}$$

Решения задач (54) – (56) последовательно (для $i = 0, 1, 2, \ldots$) находятся в явном виде, в частности

$$\Pi_0^{(-)}(\xi) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(0)k^{-1}\exp(-k\xi).$$

Все функции $\Pi_i^{(-)}(\xi)$ имеют экспоненциальную оценку

$$|\Pi_i^{(-)}(\xi)| \leq c\exp(-\kappa\xi), \quad \xi \geq 0.$$

2.5. Теорема о существовании решения первой вспомогательной задачи

Обозначим через $U_n^{(-)}(x,\varepsilon)$ следующую частичную сумму построенного разложения (8):

$$U_n^{(-)}(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{\frac{i}{2}}\bar{u}_i^{(-)}(x)+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{\frac{i}{4}}Q_i^{(-)}(\tau)+\varepsilon^{\frac{3}{4}}\sum_{i=0}^{2n}\varepsilon^{\frac{i}{4}}\Pi_i^{(-)}(\xi). \tag{57}$$

Теорема 2. *Если выполнены условия A1, A2, то для достаточно малых ε краевая задача (1), (10) имеет решение $u^{(-)}(x,\varepsilon)$, для которого справедливо равенство*

$$u^{(-)}(x,\varepsilon)=U_n^{(-)}(x,\varepsilon)+O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right),\ \ 0\le x\le x_*. \tag{58}$$

Доказательство этой теоремы можно провести так же, как и доказательство аналогичной теоремы в [2].

Следствие. *Для производной $\frac{du^{(-)}}{dx}(x,\varepsilon)$ справедливо асимптотическое представление*

$$\frac{du^{(-)}}{dx}(x,\varepsilon)=\frac{dU_n^{(-)}}{dx}(x,\varepsilon)+O\left(\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}\right),\ \ 0\le x\le x_*. \tag{59}$$

Доказательство проводится так же, как и доказательство следствия из теоремы 1.

3. Доказательство существования решения задачи (1), (2) с внутренним переходным слоем

Докажем теперь, что при определённом условии (см. ниже условие A3) для достаточно малых ε существует такое $x_*(\varepsilon)\in(0;1)$, для которого выполнено равенство (12). Перепишем это равенство в виде

$$\frac{du^{(-)}}{dx}(x_*,\varepsilon)-\frac{du^{(+)}}{dx}(x_*,\varepsilon)=0,$$

умножим на ε и подставим вместо $u^{(-)}$ и $u^{(+)}$ разложения (8) и (9), учитывая, что в точке x_* функции $\Pi_i^{(-)}$ и $\Pi_i^{(+)}$ и все их производные являются величинами порядка $o(\varepsilon^N)$ для любого N, а $Q_1^{(-)}(\tau)=0$. Получим уравнение относительно x_* в виде

$$\varepsilon\left(\frac{d\varphi_1}{dx}(x_*)+\sqrt{\varepsilon}\frac{d\bar{u}_1^{(-)}}{dx}(x_*)+\cdots\right)+\left(\frac{dQ_0^{(-)}}{d\tau}(0)+\sqrt{\varepsilon}\frac{dQ_2^{(-)}}{d\tau}(0)+\cdots\right)-$$

$$-\varepsilon\left(\frac{d\varphi_3}{dx}(x_*)+\varepsilon\frac{d\bar{u}_1^{(+)}}{dx}(x_*)+\cdots\right)-\left(\frac{dQ_0^{(+)}}{d\tau}(0)+\varepsilon\frac{dQ_1^{(+)}}{d\tau}(0)+\cdots\right)=0. \tag{60}$$

Будем искать x_* в виде ряда

$$x_*=x_0+\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{\frac{i}{4}}x_i. \tag{61}$$

Подставим это выражение для x_* в (60), разложим левую часть уравнения в ряд по целым степеням $\varepsilon^{\frac{1}{4}}$ и будем приравнивать нулю коэффициенты этого разложения. В нулевом приближении, используя выражения (22) и (47) для $\frac{dQ_0^{(+)}}{d\tau}(0)$ и $\frac{dQ_0^{(-)}}{d\tau}(0)$, получим уравнение относительно x_0:

$$I(x_0) := I^{(-)}(x_0) - I^{(+)}(x_0) = 0,$$

которое с помощью выражений для $I^{(-)}(x_0)$ и $I^{(+)}(x_0)$ сводится к виду

$$\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_3(x_0)} f(u, x_0, 0)du = 0. \tag{62}$$

Условие A3. *Пусть уравнение (62) имеет корень* $x_0 = \bar{x}_0 \in (0;1)$, *и пусть* $I'(\bar{x}_0) \neq 0$.

Для следующих коэффициентов $x_i, i = 1, 2, \ldots$ ряда (61) последовательно получаются линейные уравнения

$$I'(\bar{x}_0)x_i + m_i = 0, \tag{63}$$

где m_i – известные числа, выражающиеся определённым образом через найденные уже x_j с номерами $j < i$. Так как $I'(\bar{x}_0) \neq 0$, то из уравнения (63) однозначно определяется x_i. Обозначим решение через $\bar{x}_i$. Отметим, что $\bar{x}_1 = 0$.

Вернёмся теперь к вспомогательным краевым задачам (1), (11) и (1), (10) и рассмотрим их, положив

$$x_* = x_\delta := \bar{x}_0 + \sqrt{\varepsilon}\bar{x}_2 + \cdots + \varepsilon^{\frac{2m+1}{4}}(\bar{x}_{2m+1} + \delta),$$

где $m \geq 2$, а δ – произвольное число, которое может зависеть от ε, но является ограниченным при $\varepsilon \to 0$.

В силу теорем 1 и 2 для достаточно малых ε существуют решения $u^{(+)}(x, \varepsilon, \delta)$ и $u^{(-)}(x, \varepsilon, \delta)$ этих задач, имеющие асимптотические разложения (9) и (8), в которых функции $Q_i^{(+)}$ и $Q_i^{(-)}$ зависят от $\tau_\delta = \frac{x - x_\delta}{\varepsilon}$, а для производных решений справедливы представления (30) и (59). Используя представление (59) для $n = m$, а представление (30) для $n = \left[\frac{2m+1}{4}\right]$ (целая часть числа $(2m+1)/4$), составим умноженную на ε разность производных функций $u^{(-)}$ и $u^{(+)}$, взятых в точке x_δ, и разложим полученное выражение по целым степеням $\varepsilon^{\frac{1}{4}}$. В результате придём к равенству

$$\varepsilon\left(\frac{du^{(-)}}{dx}(x_\delta, \varepsilon, \delta) - \frac{du^{(+)}}{dx}(x_\delta, \varepsilon, \delta)\right) = \bar{I}(\bar{x}_0) + \sum_{i=2}^{2m} \varepsilon^{\frac{i}{4}}(I'(\bar{x}_0)\bar{x}_i + m_i) +$$

$$+\varepsilon^{\frac{2m+1}{4}} I'(\bar{x}_0)\delta + O\left(\varepsilon^{\frac{2m+2}{4}}\right). \tag{64}$$

Так как $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_i$ являются решениями уравнений (62) и (63), то в правой части (64) остаются только два последних слагаемых, причём величина $O\left(\varepsilon^{\frac{2m+2}{4}}\right)$ зависит также от δ, но является величиной указанного порядка малости равномерно относительно δ из фиксированной окрестности точки $\delta = 0$. А поскольку $I'(\bar{x}_0) \neq 0$, то существует такое $\delta = \bar{\delta}(\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{4}}\right)$, для которого правая часть равенства (64) равна нулю, т.е.

$$\frac{du^{(-)}}{dx}(x_{\bar{\delta}}, \varepsilon, \bar{\delta}) = \frac{du^{(+)}}{dx}(x_{\bar{\delta}}, \varepsilon, \bar{\delta}).$$

Отсюда следует, что функция

$$u(x,\varepsilon) = \begin{cases} u^{(-)}(x,\varepsilon,\bar{\delta}), & 0 \le x \le x_{\bar{\delta}}, \\ u^{(+)}(x,\varepsilon,\bar{\delta}), & x_{\bar{\delta}} \le x \le 1 \end{cases}$$

является решением задачи (1), (2) с внутренним переходным слоем в окрестности точки $x_{\bar{\delta}}$.

Согласно теоремам 1 и 2 частичная сумма $U^{(+)}_{m-2}(x,\varepsilon)$ при $m \ge 2$ является асимптотическим приближением для $u^{(+)}(x.\varepsilon,\bar{\delta})$ с точностью порядка $O\left(\varepsilon^{m-1}\right)$, а частичная сумма $U^{(-)}_{m-2}(x,\varepsilon)$ – асимптотическим приближением для $u^{(-)}(x,\varepsilon,\bar{\delta})$ с точностью порядка $O\left(\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}\right)$. Если заменить x_δ на $(x_*)_{2m+1} := \sum_{i=0}^{2m+1} \varepsilon^{\frac{i}{4}} \bar{x}_i$ (т.е. отбросить в выражении для x_δ слагаемое $\varepsilon^{\frac{2m+1}{4}}\delta = O\left(\varepsilon^{\frac{2m+2}{4}}\right)$), а τ_δ заменить на $\bar{\tau} = [x-(x_*)_{2m+1}]/\varepsilon$, то указанная точность приближения сохранится, т.е.

$$u(x,\varepsilon) = \begin{cases} U^{(-)}_{m-2}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}), & 0 \le x \le (x_*)_{2m+1}, \\ U^{(+)}_{m-2}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m-1}), & (x_*)_{2m+1} \le x \le 1, \end{cases} \tag{65}$$

где $Q^{(\mp)}_i = Q^{(\mp)}_i(\bar{\tau})$.

Равенство (65) доказано для любого $m \ge 2$. Обозначив $m-2$ через n, приходим к следующему основному утверждению.

Теорема 3. *Если выполнены условия A1 – A3, то для достаточно малых ε существует решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (1), (2), для которого при любом натуральном n справедливо асимптотическое равенство*

$$u(x,\varepsilon) = \begin{cases} U^{(-)}_{n}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}), & 0 \le x \le (x_*)_{2n+5}, \\ U^{(+)}_{n}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), & (x_*)_{2n+5} \le x \le 1, \end{cases} \tag{66}$$

где

$$(x_*)_{2n+5} = \sum_{i=0}^{2n+5} \varepsilon^{\frac{i}{4}} \bar{x}_i,$$

а функции $U^{(-)}_n(x,\varepsilon)$ и $U^{(+)}_n(x,\varepsilon)$ определены формулами (57) и (28), в которых $\tau = [x-(x_*)_{2n+5}]/\varepsilon$.

4. Заключительные замечания

4.1. Из (66) следует предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,\varepsilon) = \begin{cases} \varphi_1(x) & 0 \le x < \bar{x}_0, \\ \varphi_3(x), & \bar{x}_0 < x \le 1. \end{cases} \tag{67}$$

Решение $u(x, \varepsilon)$ называют также *контрастной структурой типа ступеньки* с переходом от $\varphi_1(x)$ к $\varphi_3(x)$ [1]. При тех же условиях A1 – A3 существует контрастная структура типа ступеньки с переходом от $\varphi_3(x)$ к $\varphi_1(x)$, т.е. существует решение задачи (1), (2), для которого в предельном равенстве (67) нужно поменять местами функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_3(x)$.

4.2. Как уже отмечалось, функции $Q_i^{(-)}(\tau)$, описывающие быстрое изменение решения в переходном слое слева от точки перехода x_*, имеют различное поведение в разных зонах. Были выделены три зоны слева от точки x_*. Ещё одной зоной переходного слоя является зона справа от точки x_*, где функции $Q_i^{(+)}(\tau)$ убывают экспоненциально с ростом τ. Таким образом, можно сказать, что рассмотренное решение $u(x, \varepsilon)$ обладает четырёхзонным переходным слоем.

4.3. Аналогично изученному можно рассмотреть случай, когда оба корня $\varphi_1(x)$ и $\varphi_3(x)$ вырожденного уравнения являются двукратными. Так будет, например, если функция $f(u, x, \varepsilon)$ имеет вид

$$f(u, x, \varepsilon) = -(u - \varphi_1(x))^2(u - \varphi_2(x))(u - \varphi_3(x))^2 - \varepsilon f_1(u, x, \varepsilon),$$

причём $\varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \varphi_3(x)$ при $0 \leq x \leq 1$. Условие A3 в этом случае сохраняется, а условие A2 принимает вид:

$$f_1(\varphi_1(x), x, 0) > 0, \quad f_1(\varphi_3(x), x, 0) < 0 \ \text{ при } \ 0 \leq x \leq 1.$$

Асимптотика решения с переходным слоем и слева, и справа от точки перехода x_* строится так же, как это делалось в рассмотренной задаче слева от точки x_*. В результате переходный слой будет шестизонным.

4.4. Для упрощения выкладок мы рассмотрели случай, когда

$$f(u, x, 0) = (u - \varphi_1(x))^2(u - \varphi_2(x))(u - \varphi_3(x)).$$

Если в правую часть этого равенства входит ещё один сомножитель (обозначим его $g(u, x)$), причём $g(u, x) > 0$ при $\varphi_1(x) \leq u \leq \varphi_3(x), 0 \leq x \leq 1$, то качественные особенности асимптотики решения с переходным слоем сохраняются, но выкладки становятся более громоздкими.

4.5. Представляет интерес рассмотрение случая, когда один из корней $\varphi_1(x)$ и $\varphi_3(x)$ вырожденного уравнения (либо оба корня) является трёхкратным. Погранслойные решения в случае трёхкратного корня рассматривались в работе [3].

Список литературы

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с. [*Vasilieva A. B., Butuzov V. F.* Asimptoticheskiye metody v teorii singulyarnyh vozmusheniy. Moskva: Vysshaya shkola, 1990 (in Russian).]

2. *Бутузов В. Ф.* Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущённых задачах с кратным корнем вырожденного уравнения // Математические заметки. 2013. Т. 94. Вып. 1. С. 68–80. [English transl.: *Butuzov V. F.* On the Special Properties of the Boundary Layer in Singularly Perturbed Problems with Multiple Root of the Degenerate Equation // Mathematical Notes. 2013. V. 94, No 1. P. 60–70.]

3. *Бутузов В. Ф.* О периодических решениях сингулярно возмущённых параболических задач в случае кратных корней вырожденного уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2011. Т. 51. №1. С. 44–55. [English transl.: *Butuzov V. F.* On periodic solutions to singularly perturbed parabolic problems in the case of multiple roots of the degenerate equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2011. V. 51, No 1, 40–50.]

4. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущённых уравнений. М.: Наука. 1973. [*Vasilieva A. B., Butuzov V. F.* Asimptoticheskiye razlozheniya resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy. Moskva: Nauka, 1973 (in Russian).]

Singularly Perturbed Boundary Value Problem with Multizonal Interior Transitional Layer

Butuzov V. F.

M.V. Lomonosov Moscow State University
Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia

Keywords: singularly perturbed equation, interior transitional layer, asymptotic expansion of solution

Two-point boundary value problem for a singularly perturbed ordinary differential equation of second order is considered in the case when the degenerate equation has three unintersecting roots from which one root is two-tuple and two roots are one-tuple. It is prooved that for sufficiently small values of the small parameter the problem has a solution with the transition from the two-tuple root of the degenerate equation to the one-tuple root in the neighbourhood of an internal point of the interval. The asymptotic expansion of this solution is constructed. It distinguishes from the known expansion in the case when all roots of the degenerate equation are one-tuple, in particular, the transitional layer is multizonal.

Сведения об авторе:
Бутузов Валентин Федорович,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математики физического факультета