Модел. и анализ информ. систем. Т. **22**, № **1** (2015) 38–64

УДК 517.926

Катастрофа голубого неба в системах с неклассическими релаксационными колебаниями[1]

Глызин С. Д.*,**, Колесов А. Ю.*, Розов Н. Х.***

* *Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова*
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14
***НЦЧ РАН, 142432 Россия, Московская область, г. Черноголовка, ул. Лесная, д. 9*
*** *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*
119991 Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1

e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru, kolesov@uniyar.ac.ru, fpo.mgu@mail.ru

получена 20 декабря 2014

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система, релаксационный цикл, асимптотика, устойчивость, катастрофа голубого неба, неклассические релаксационные колебания

Исследуется вопрос о реализуемости известной бифуркации типа катастрофы голубого неба в некотором классе трехмерных сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с одной быстрой и двумя медленными переменными. Характерная особенность рассматриваемых систем состоит в том, что в них происходят так называемые неклассические релаксационные колебания. Таковыми принято называть колебания, у которых медленные компоненты асимптотически близки к некоторым разрывным по времени функциям, а быстрая компонента δ-образна. Разбираются случаи, когда в результате катастрофы голубого неба возникает устойчивый релаксационный цикл или устойчивый двумерный инвариантный тор. Рассматривается также вопрос о появлении гомоклинических структур.

1. Постановка задачи

Прежде всего скажем несколько слов о сути катастрофы голубого неба. Этим термином принято называть нелокальную бифуркацию коразмерности один, которая в простейшем случае состоит в следующем.

Рассмотрим гладкое однопараметрическое семейство векторных полей X_μ в $\mathbb{R}^3$ и предположим, что при $\mu = 0$ поток X_μ имеет периодическую траекторию L_0 типа простой седло-узел. Рассмотрим, далее, некоторую достаточно малую окрестность $\mathscr{U}$ траектории L_0, разделяемую двумерным сильно устойчивым многообразием $W^{ss}(L_0)$ на две области: узловую $\mathscr{U}^+$, все траектории из которой стремятся к L_0

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00158) и РФФИ (грант № 15-01-04066а).

при $t \to +\infty$, и седловую $\mathscr{U}^-$, в которой лежит двумерное неустойчивое многообразие $W^u_{loc}(L_0)$ с краем L_0. Следующее ограничение носит существенно нелокальный характер и состоит в том, что все траектории системы X_0 с начальными условиями из $W^u_{loc}(L_0)$ при увеличении t сначала покидают окрестность $\mathscr{U}$, а затем снова возвращаются в нее, попадая в узловую область $\mathscr{U}^+$. Тогда, очевидно, каждая из упомянутых траекторий оказывается двоякоасимптотической к L_0. И наконец, будем считать, что множество $W^u(L_0)$, получающееся из $W^u_{loc}(L_0)$ после продолжения по траекториям потока X_0, не является топологическим многообразием (в трехмерном случае это означает, что его замыкание не гомеоморфно двумерному тору).

Как показано в [1], при сформулированных ограничениях и при некоторых дополнительных условиях технического характера исчезновение в системе X_μ, $0 < \mu \ll 1$ седло-узлового цикла L_0 приводит к появлению устойчивой замкнутой траектории $L(\mu)$, период и длина которой стремятся к бесконечности при $\mu \to 0$. Сама же траектория $L(\mu)$ имеет своим верхним топологическим пределом при $\mu \to 0$ множество $W^u(L_0) \cup L_0$. Описанная бифуркация получила название "катастрофа голубого неба".

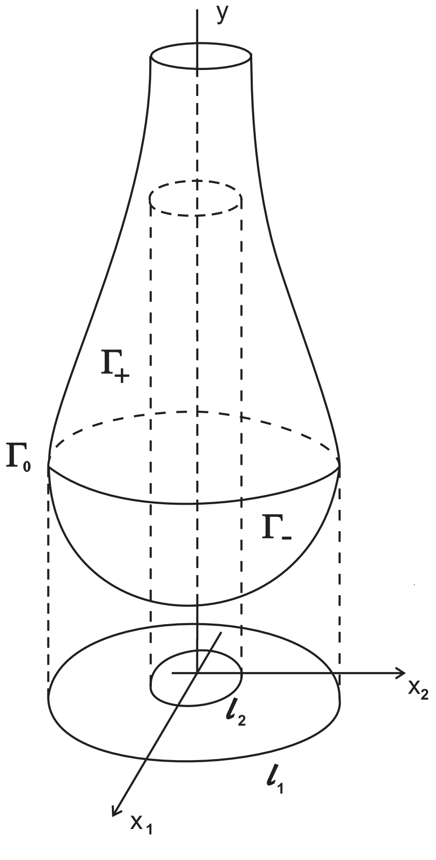

Рис. 1

В работах [2, 3] проиллюстрирована реализуемость упомянутой выше бифуркации в сингулярно возмущенных системах с одной медленной и m, $m \geq 2$ быстрыми переменными. Далее, в статье [4] катастрофа голубого неба изучалась в системе

$$\dot{x} = f(x, y, \mu), \quad \varepsilon \dot{y} = g(x, y), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $|\mu| \ll 1$, а на функции $f, g \in C^\infty$ были наложены стандартные ограничения (см. [5]), обеспечивающие существование так называемых классических релаксационных колебаний. Напомним, что классическими называются колебания, у которых при $\varepsilon \to 0$ медленные компоненты x_1, x_2 стремятся к некоторым непрерывным по t функциям, а быстрая компонента y близка к разрывной функции.

В настоящей статье результаты из [4] распространяются на систему вида (1), где, как и выше, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $|\mu| \leq \mu_0$, а $\mu_0 > 0$ – некоторая достаточно малая константа. Что же касается функций

$$f(x, y, \mu) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times [-\mu_0, \mu_0]; \mathbb{R}^2),$$
$$g(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}),$$

то они будут удовлетворять специальным условиям, гарантирующим реализуемость неклассических релаксационных колебаний.

Приступим к детальному описанию ограничений на правые части системы (1). Как обычно [5], считаем, что уравнение $g(x, y) = 0$ определяет гладкую двумерную поверхность Γ, распадающуюся на непересекающиеся части: устойчивую Γ_-, неустойчивую Γ_+ и линию срыва Γ_0. По определению $(x, y) \in \Gamma_-$, если $g'_y < 0$; $(x, y) \in \Gamma_+$, если $g'_y > 0$; $(x, y) \in \Gamma_0$ при $g'_y = 0$. Но в отличие от [5] здесь будем предполагать, что Γ имеет не форму "полотенца", а форму "кувшина" с бесконечно длинным горлом (см. рис. 1). Последнее означает, что поверхность Γ_- задается уравнением $y = \Phi_-(x)$, $\Phi_- \in C^\infty(\Omega_1)$, где Ω_1 – внутренняя область, ограниченная простой замкнутой кривой $l_1 \in C^\infty$; поверхность Γ_+ определяется равенством $y = \Phi_+(x)$, $\Phi_+ \in C^\infty(\Omega_2)$, где Ω_2 – кольцевая область, ограниченная кривой l_1 и простой замкнутой кривой $l_2 \subset \Omega_1$ класса C^∞; $\Gamma_0 = \{(x, y) : y = \Phi_-(x) = \Phi_+(x), x \in l_1\}$. Предполагаем еще, что $\lim \Phi_+(x) = +\infty$ при $x \to l_2$, $x \in \Omega_2$.

Условие 1. *Считаем, что при* $(x, y) \in \Gamma_0$

$$g''_{yy}(x, y) \neq 0, \quad \big(\operatorname{grad}_x g(x, y), f(x, y, 0)\big) \neq 0, \tag{2}$$

где $(*, *)$ *– евклидово скалярное произведение.*

Отметим, что неравенства (2) – это обычно предполагаемая общность положения на линии срыва Γ_0 (см. [5]). Следующее же условие типично для теории неклассических релаксационных колебаний (см. [6]).

Условие 2. *При* $y \to +\infty$ *равномерно по любому ограниченному подмножеству изменения* x *и по* $\mu \in [-\mu_0, \mu_0]$ *справедливы асимптотические представления*

$$f(x, y, \mu) = y^{n_1}\left(f_0(x, \mu) + \frac{f_1(x, \mu)}{y} + \frac{f_2(x, \mu)}{y^2} + \dots\right), \tag{3}$$

$$g(x, y) = y^{n_2}\left(g_0(x) + \frac{g_1(x)}{y} + \frac{g_2(x)}{y^2} + \dots\right), \tag{4}$$

где $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 0$ *– целые числа, причем* $p = n_1 - n_2 \geq 0$. *Будем считать, что асимптотические равенства* (3), (4) *сохраняют силу при дифференцировании по* x, y, μ *в любом порядке и любое число раз.*

Условие 3. *Введенная выше кривая* $l_2 \subset \Omega_1$ *задается равенством* $l_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : g_0(x) = 0\}$, *причем* $g_0(x) < 0$ (> 0) *во внутренней (внешней) области, ограничиваемой данной кривой.*

Обращаем внимание, что условие 3 согласуется с топологией поверхности медленных движений Γ (см. рис. 1). Действительно, при любом фиксированном x, принадлежащем внешней (внутренней) области, ограничиваемой кривой l_2, и при всех $y \gg 1$ должно выполняться неравенство $g(x, y) > 0$ (< 0). Именно это и гарантируют приведенные выше свойства функции $g_0(x)$ из (4).

Для формулировки очередного ограничения введем в рассмотрение систему

$$\dot{x} = f_0(x, \mu), \tag{5}$$

где $f_0(x, \mu)$ – вектор-функция из (3).

Условие 4. *Предполагаем, что при* $\mu = 0$ *все траектории системы* (5) *с начальными условиями, принадлежащими кривой* l_1, *за конечное время попадают на* l_2 *(см. рис. 2). Считаем еще, что упомянутые траектории не имеют контактов с кривой* l_2, *т.е.*

$$(\operatorname{grad} g_0(x), f_0(x, 0)) < 0 \ \text{ при } \ x \in l_2. \tag{6}$$

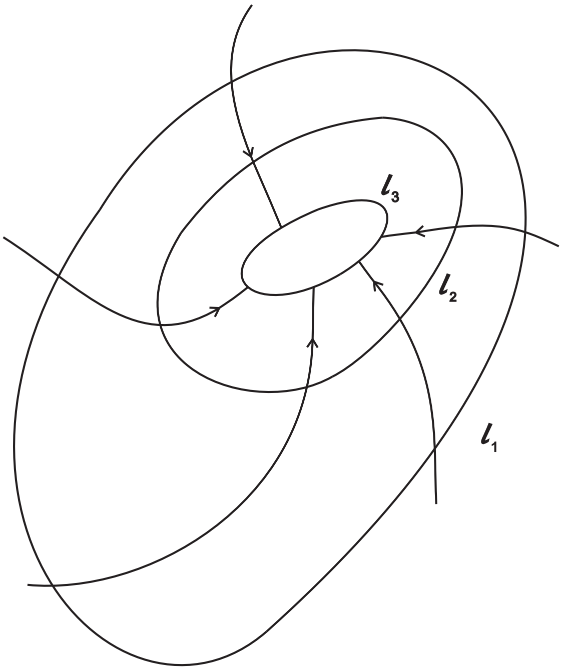

Рис. 2

Заключительная серия ограничений касается поведения траекторий вырожденной системы

$$\dot{x} = f(x, y, \mu), \quad g(x, y) = 0 \tag{7}$$

на поверхности медленных движений Γ_-, которая, напомним, определяется равенством $y = \Phi_-(x)$ при $x \in \Omega_1$. Поэтому в данном случае исследование системы (7) сводится к рассмотрению двумерной системы

$$\dot{x} = f(x, \Phi_-(x), \mu), \quad x \in \Omega_1 \cup l_1. \tag{8}$$

Однако прежде чем сформулировать условия, накладываемые на систему (8), введем в рассмотрение новую кривую l_3, расположенную в области $\{x \in \mathbb{R}^2 : g_0(x) < 0\}$ (см. рис. 2). Способ построения этой кривой описывается ниже.

Фиксируем произвольно точку $x = x_0$, лежащую в некоторой достаточно малой окрестности кривой l_1, и обозначим через $x(t, x_0)$, $x(0, x_0) = x_0$ решение задачи Коши $\dot{x} = f_0(x, 0)$, $x|_{t=0} = x_0$. Далее, введем в рассмотрение функцию

$$a(t, x_0) = \int\limits_0^t g_0(x(\theta, x_0))d\theta \tag{9}$$

и заметим, что она обладает свойствами:

$$\begin{gathered} a(0, x_0) = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial t}(t, x_0) = g_0(x(t, x_0)) > 0 \text{ при } 0 \le t < t_*, \\ \frac{\partial a}{\partial t}(t, x_0) < 0 \text{ при } t > t_*, \quad \lim_{t \to +\infty} a(t, x_0) = -\infty, \end{gathered} \tag{10}$$

где $t_* = t_*(x_0)$ – корень уравнения

$$g_0(x(t, x_0)) = 0. \tag{11}$$

Действительно, будем считать точку x_0 настолько близкой к кривой l_1, что $g_0(x_0) > 0$, а для траектории $x = x(t, x_0)$ системы (5) при $\mu = 0$ сохраняется условие 4. Тогда эта траектория с течением времени ровно один раз пересечет кривую l_2 и согласно неравенству (6) при последующем увеличении t останется в области $\{x \in \mathbb{R}^2 : g_0(x) < 0\}$, не приближаясь к ее границе. А отсюда, в свою очередь, заключаем, что, во-первых, уравнение (11) имеет единственный корень $t = t_*(x_0) > 0$ с требуемыми свойствами (см. (10)); во-вторых, при всех достаточно больших t подынтегральное выражение в (9) отрицательно и отделено от нуля. Следовательно, при $t \to +\infty$ заведомо выполняется и фигурирующее в (10) предельное равенство.

Опираясь на свойства (10), нетрудно увидеть, что уравнение $a(t, x_0) = 0$ имеет на полуоси $t > 0$ единственное решение $t = t_{**}(x_0)$. Учитывая это обстоятельство, введем в рассмотрение двумерное отображение

$$\Pi_0 : \; x_0 \to x(t, x_0)|_{t=t_{**}(x_0)} \tag{12}$$

и убедимся, что оно диффеоморфно отображает некоторую достаточно малую окрестность кривой l_1 на окрестность кривой $l_3 = \Pi_0(l_1)$ (см. рис. 2).

Покажем сначала, что оператор (12) является обратимым. Для этого нам потребуются вытекающие из (9), (10) свойства:

$$a(t, x_0) > 0 \text{ при } 0 < t < t_{**}(x_0), \quad a(t, x_0)|_{t=t_{**}(x_0)} = 0, \quad \left.\frac{\partial a}{\partial t}\right|_{t=t_{**}(x_0)} < 0, \tag{13}$$

$$a(t_1 + t_2, x_0) = a(t_1, x_0) + a(t_2, x(t_1, x_0)). \tag{14}$$

Рассмотрим две произвольные точки x_0 и x_1, $x_0 \neq x_1$, достаточно близкие к кривой l_1, и проверим выполнение неравенства

$$\Pi_0(x_0) \neq \Pi_0(x_1).$$

Отметим сразу, что требуемое свойство автоматически справедливо в случае, когда точки x_0, x_1 принадлежат различным фазовым кривым системы (5) при $\mu = 0$. Поэтому разберем оставшийся вариант, когда существует простая дуга

$$D_{x_0,x_1} = \{x = x(t, x_0) : \; 0 \leq t \leq t_0, \; x(0, x_0) = x_0, \; x(t_0, x_0) = x_1\},$$

соединяющая x_0 и x_1. Предположим также противное, т.е. будем считать, что имеет место равенство $\Pi_0(x_0) = \Pi_0(x_1)$.

Введем в рассмотрение точку $x_2 = \Pi_0(x_0) = \Pi_0(x_1)$ и заметим, что она заведомо отлична от x_0, x_1, так как в силу (13) выполняется неравенство

$$g_0(x_2) = \partial a/\partial t|_{t=t_{**}(x_0)} < 0.$$

В случае же x_0, x_1 имеем $g_0(x_j) > 0$, $j = 0, 1$, поскольку эти точки близки к кривой l_1.

Предположим сначала, что $x_2 \notin D_{x_0,x_1}$. Тогда при движении по траектории $x = x(t, x_0)$ точки x_0, x_1, x_2 проходятся в порядке $x_0 \to x_1 \to x_2$. Следовательно, существует простая дуга D_{x_1,x_2}, соединяющая x_1 и x_2. Далее, рассмотрим дугу $D_{x_0,x_2} = D_{x_0,x_1} \cup D_{x_1,x_2}$ и обозначим через $\widetilde{t}(x_0)$ время движения по ней. Из очевидных геометрических соображений следует, что $\widetilde{t}(x_0) = t_0 + \widetilde{t}(x_1)$, где $\widetilde{t}(x_1)$ – время движения по D_{x_1,x_2}. Ясно также, что в простейшем случае моменты времени $t_{**}(x_0)$ и $t_{**}(x_1)$ совпадают с $\widetilde{t}(x_0)$ и $\widetilde{t}(x_1)$ соответственно. Однако возможна и более сложная ситуация, когда траектория $x = x(t, x_0)$ периодична с некоторым периодом $T > 0$ и

$$t_{**}(x_0) = t_0 + \widetilde{t}(x_1) + k_1 T, \quad t_{**}(x_1) = \widetilde{t}(x_1) + k_2 T, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Принимая во внимание эти формулы и опираясь на свойство (14), приходим к серии соотношений

$$\begin{aligned} 0 = a(t_{**}(x_0), x_0) = a(t_0 + \widetilde{t}(x_1) + k_1 T, x_0) = k_1 a(T, x_0) + a(t_0 + \widetilde{t}(x_1), x_0) = \\ = k_1 a(T, x_0) + a(t_0, x_0) + a(\widetilde{t}(x_1), x_1). \end{aligned}$$

А так как в силу (13) имеем $k_1 a(T, x_0) \geq 0$, $a(t_0, x_0) > 0$, $a(\widetilde{t}(x_1), x_1) \geq 0$, то получаем противоречие с исходным допущением $\Pi_0(x_0) = \Pi_0(x_1)$.

Предположим теперь, что $x_2 \in D_{x_0,x_1}$. В этом случае точки x_0, x_1, x_2 проходятся в порядке $x_0 \to x_2 \to x_1$. Но из x_1 мы снова попадаем в x_2, а значит, все три точки лежат на замкнутой фазовой кривой. Тем самым, здесь существует простая дуга D_{x_1,x_0} с начальной точкой x_1 и концом x_0, не содержащая точку x_2. Последующие же рассуждения, приводящие к противоречию, идентичны описанным выше (с естественными заменами $x_0 \to x_1$, $x_1 \to x_0$, $k_1 \to k_2$, $t_0 \to t_1$, где t_1 – время движения по D_{x_1,x_0}).

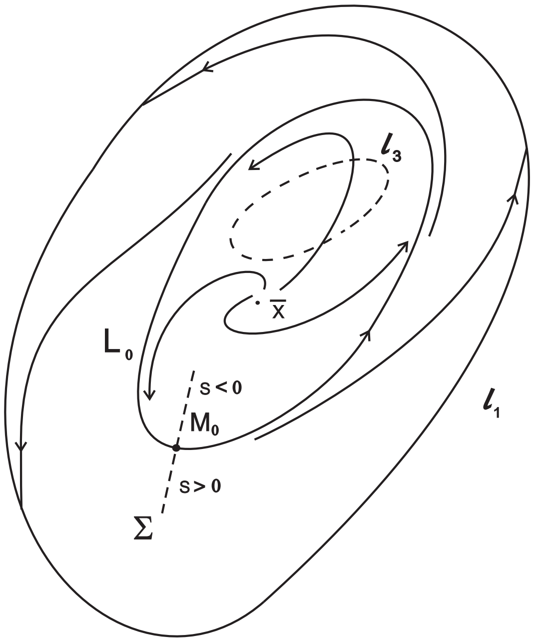

Рис. 3

Итак, мы показали, что отображение (12), принадлежащее, очевидно, классу C^∞, обратимо. Что же касается обратного отображения, то оно задается аналогичным (12) равенством

$$\Pi_0^{-1}(x_0): \ x_0 \to x(-t, x_0)|_{t=\bar{t}(x_0)}, \qquad (15)$$

где теперь точка x_0 близка к кривой l_3, а $t = \bar{t}(x_0) > 0$ – корень уравнения

$$\overline{a}(t, x_0) \overset{\text{def}}{=} -\int_0^t g_0(x(-\theta, x_0))d\theta = 0. \qquad (16)$$

Нетрудно увидеть, что новая функция $\overline{a}(t, x_0)$ связана с $a(t, x_0)$ соотношением

$$\overline{a}(t, \Pi_0(x_0)) = a(t_{**}(x_0) - t, x_0)$$

и в силу этого имеет простой положительный корень $t = \bar{t}(x_0)$, $t_{**}(x_0) = \bar{t}(\Pi_0(x_0))$, обладающий аналогичными (13) свойствами. Более того, из равенств (15), (16) вытекает, что оператор $\Pi_0^{-1}(x_0)$, как и исходный оператор $\Pi_0(x_0)$, принадлежит классу C^∞.

Из проделанных построений следует, что $l_3 = \Pi_0(l_1)$ представляет собой простую замкнутую кривую класса C^∞, принадлежащую области $\{x \in \mathbb{R}^2 : g_0(x) < 0\}$. Данная кривая и является искомой.

Возвращаясь к системе (8), предположим, что выполнен следующий блок ограничений.

Условие 5. *Фазовый портрет системы (8) при $\mu = 0$ имеет вид, показанный на рис. 3: в области Ω_1 существуют единственное состояние равновесия $x = \overline{x}$, являющееся экспоненциально неустойчивым узлом или фокусом, и единственный окружающий его полуустойчивый цикл*

$$L_0: \ x = x_0(\varphi), \ \ \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0, \ \ x_0(\varphi + 2\pi) \equiv x_0(\varphi), \ \ \omega_0 > 0 \qquad (17)$$

типа простой седло-узел. Предполагаем также, что все траектории из кольцевой области, ограничиваемой кривыми l_1 и L_0, за конечное время попадают на кривую l_1. И наконец, считаем, что кривая l_3 лежит в области, ограничиваемой циклом L_0, но не содержит и не окружает точку $x = \overline{x}$ (см. рис. 3).

Для пояснения фигурирующего в условии 5 требования простоты седло-узлового цикла (17) фиксируем произвольно точку $M_0 \in L_0$ и обозначим через Σ достаточно малый отрезок нормали к кривой L_0 в этой точке (см. рис. 3). Параметром s на секущей Σ будем считать расстояние от произвольной точки $M \in \Sigma$ до M_0, взятое со знаком "+", если M лежит на внешней части нормали, и со знаком "−" в противном случае. Тогда, очевидно, на множестве $\{(s,\mu) : |s| \le s_0,\ |\mu| \le \mu_0\}$, где $s_0,\ \mu_0 > 0$ подходящим образом малы, определено отображение последования Пуанкаре

$$s \to R(s,\mu), \quad R \in C^{\infty}\big([-s_0, s_0] \times [-\mu_0, \mu_0]\big) \tag{18}$$

по траекториям системы (8), причем для $R(s,0)$ в точке $s = 0$ справедливо тейлоровское разложение вида

$$R(s,0) = s + d_0 s^2 + O(s^3). \tag{19}$$

Простота седло-узлового цикла L_0 означает, что $d_0 > 0$.

Условие 6. *Считаем, что*

$$\alpha_0 = R'_{\mu}(0,0) > 0, \tag{20}$$

где $R(s,\mu)$ *– функция из* (18).

Из свойств (19), (20) и неравенства $d_0 > 0$ следует, что при $\mu \in [-\mu_0, 0)$ отображение (18) имеет две неподвижные точки $s_{\pm}(\mu) = \pm\sqrt{-\alpha_0\mu/d_0} + O(\mu)$, которым в системе (8) соответствуют два цикла – устойчивый $L_-(\mu)$ и неустойчивый $L_+(\mu)$, $L_{\pm}(0) = L_0$. Таким образом, в этом случае все траектории рассматриваемой системы с начальными условиями, лежащими на кривой l_3, при $t \to +\infty$ стремятся к циклу $L_-(\mu)$. Если же $\mu \in (0, \mu_0]$, то циклы в системе (8) отсутствуют и любая ее траектория с начальным условием из l_3 сначала асимптотически долгое время (порядка $1/\sqrt{\mu}$) вращается в окрестности исчезнувшего цикла L_0, а затем попадает на кривую l_1.

При сформулированных ограничениях согласно результатам монографии [6] любая траектория

$$\big(x(t,\varepsilon,\mu),\, y(t,\varepsilon,\mu)\big) : \quad t \ge 0, \quad x(0,\varepsilon,\mu) = x_0, \quad y(0,\varepsilon,\mu) = y_0 \tag{21}$$

системы (1) с не зависящими от ε, μ начальными условиями x_0, y_0 на качественном уровне ведет себя следующим образом.

Пусть точка (x_0, y_0) расположена в некоторой достаточно малой окрестности устойчивого многообразия медленных движений Γ_- и x_0 принадлежит кольцевой области, ограничиваемой кривыми L_0 и l_1. Тогда сначала за асимптотически малое время (порядка $\varepsilon\ln(1/\varepsilon)$) происходит "падение" фазовой точки (21) на поверхность Γ_- примерно по прямой $x = x_0$, а затем движение продолжается в асимптотически малой по ε окрестности кривой $\big(x_1(t,\mu), y_1(t,\mu)\big)$, где $y_1(t,\mu) = \Phi_-\big(x_1(t,\mu)\big)$, $\Phi_-(x)$ – функция, задающая Γ_-, $x_1(t,\mu)$ – решение системы (8) с начальным условием $x_1(0,\mu) = x_0$. Далее, в силу условия 5 найдется такой первый момент времени $t_1 = t_1(\mu) > 0$, что $x_1(t_1,\mu) \in l_1$. А отсюда вытекает [6], что при значениях t, асимптотически близких к t_1, происходит "срыв" с многообразия Γ_- и начинается так называемый промежуток быстрого движения. Упомянутый промежуток, в свою очередь, можно разбить на три фрагмента: участок взлета, участок поворота и участок падения.

Для того чтобы проанализировать участок взлета, обратимся к неравенству

$$g(x,y) > 0 \quad \forall\, x \in l_1, \ \ \forall\, y > \Phi_-(x),$$

справедливому в силу условий, наложенных выше на функцию $g(x,y)$. Из этого неравенства следует, что на участке взлета переменная y возрастает до асимптотически больших значений. Точнее говоря, в нашем случае фазовая точка (21) асимптотически быстро движется в асимптотически малой окрестности отрезка

$$\bigl\{(x,y): \ \ x = x_1(\mu), \ \ \Phi_-(x_1(\mu)) \le y \le \varepsilon^{-1/(2(p+1))}\bigr\}, \tag{22}$$

где $x_1(\mu) = x_1(t_1(\mu),\mu) \in l_1$. Характерная особенность этого движения состоит в том, что любая часть отрезка (22), отвечающая промежутку $\overline{y} \le y \le \overline{\overline{y}}$, где $\Phi_-(x_1(\mu))|_{\mu=0} < \overline{y} < \overline{\overline{y}}$, проходится за время порядка ε. Величины же $y = \varepsilon^{-1/(2(p+1))}$ компонента $y(t,\varepsilon,\mu)$ достигает за время порядка $\varepsilon\ln(1/\varepsilon)$ (при $n_2 = 1$) или ε^{β}, $\beta = \min\,[1, (2p+n_2+1)/(2(p+1))]$ (при $n_2 \ne 1$).

Участок поворота соответствует значениям t, при которых фазовая точка (21) находится в полупространстве $\bigl\{(x,y): \ y \ge \varepsilon^{-1/(2(p+1))}\bigr\}$. Для качественного описания этого участка выполним в системе (1) замены $y = u\varepsilon^{-1/(p+1)}$, $t - t_1(\mu) = \theta\varepsilon^{n_1/(p+1)}$ и воспользуемся разложениями (3), (4). В итоге после отбрасывания асимптотически малых по ε слагаемых приходим к задаче Коши

$$\frac{dx}{d\theta} = u^{n_1} f_0(x,\mu), \quad \frac{du}{d\theta} = u^{n_2} g_0(x), \quad x|_{\theta=0} = x_1(\mu), \quad u|_{\theta=0} = 0. \tag{23}$$

Полагая затем в (23) $d\tau = u^{n_1}d\theta$, убеждаемся, что на участке поворота движение фазовой точки $(x(\tau,\varepsilon,\mu), u(\tau,\varepsilon,\mu))$, получающейся из (21) после сделанных замен, происходит в асимптотически малой окрестности кривой

$$\{(x,u): \ \ x = x(\tau,\mu), \ \ u = u(\tau,\mu), \ \ \tau \ge 0\} \cap \{(x,u): \ \ u \ge 0\}. \tag{24}$$

Здесь

$$x(\tau,\mu) = x(t,x_0,\mu)|_{t=\tau,\, x_0=x_1(\mu)}, \quad u(\tau,\mu) = \bigl((p+1)a(t,x_0,\mu)\bigr)^{1/(p+1)}\bigr|_{t=\tau,\, x_0=x_1(\mu)}, \tag{25}$$

через $x(t,x_0,\mu)$ обозначено решение задачи Коши $\dot{x} = f_0(x,\mu)$, $x|_{t=0} = x_0$, а функция $a(t,x_0,\mu)$ задана аналогичным (9) равенством

$$a(t,x_0,\mu) = \int\limits_0^t g_0(x(\theta,x_0,\mu))d\theta. \tag{26}$$

Следует отметить, что в силу малости μ функция (26) обладает аналогичными (10) свойствами. Тем самым, она допускает такой корень $t = t_{**}(x_0,\mu) > 0$, что

$$\begin{gathered} a(t,x_0,\mu) > 0 \ \text{ при } \ 0 < t < t_{**}, \quad a(t,x_0,\mu) < 0 \ \text{ при } \ t > t_{**}, \\ \frac{\partial a}{\partial t}(t,x_0,\mu)\Bigr|_{t=t_{**}} < 0. \end{gathered} \tag{27}$$

Обратим внимание, что согласно равенствам (25), (26) и свойствам (27) фигурирующее в (24) априорное условие $u \geq 0$ выполняется только на отрезке $0 \leq \tau \leq \overline{\tau}(\mu)$, где $\overline{\tau}(\mu) = t_{**}(x_0, \mu)|_{x_0 = x_1(\mu)}$. Точнее говоря, компонента $u(\tau, \mu)$ обладает свойствами

$$u(\tau, \mu) > 0 \ \text{ при } \ 0 < \tau < \overline{\tau}(\mu), \quad u(0, \mu) = u(\overline{\tau}(\mu), \mu) = 0. \tag{28}$$

Такое поведение $u(\tau, \mu)$ означает, что на участке поворота компонента $y(t, \varepsilon, \mu)$ сначала возрастает от $\varepsilon^{-1/(2(p+1))}$ до значений порядка $\varepsilon^{-1/(p+1)}$, а затем снова падает до прежнего уровня $y = \varepsilon^{-1/(2(p+1))}$. Добавим еще, что время Δt прохождения данного участка равномерно по μ асимптотически мало, а точнее говоря,

$$\Delta t = O\left(\varepsilon \int_{\varepsilon^{-1/(2(p+1))}}^{\varepsilon^{-1/(p+1)}} dy/y^{n_2} + \varepsilon^{n_1/(p+1)}\right), \quad \varepsilon \to 0.$$

После поворота наступает так называемый участок падения, который вполне аналогичен описанному ранее участку взлета. На этом участке траектория (21) асимптотически близка к отрезку

$$\big\{(x, y): \ \ x = x_2(\mu), \ \ \Phi_-(x_2(\mu)) \leq y \leq \varepsilon^{-1/(2(p+1))}\big\}, \tag{29}$$

где $x_2(\mu) = x(\tau, \mu)|_{\tau = \overline{\tau}(\mu)}$. Заметим, далее, что в силу определения функций $x(\tau, \mu)$, $\overline{\tau}(\mu)$ из (25), (28) имеем $x_2(\mu) = \Pi_\mu(x_1(\mu))$, где оператор Π_μ задается равенством

$$\Pi_\mu: \ x_0 \to x(t, x_0, \mu)|_{t = t_{**}(x_0, \mu)}$$

и является гладким продолжением по μ оператора (12). Тем самым, автоматически $x_2(\mu) \in l_3(\mu)$, где $l_3(\mu) = \Pi_\mu(l_1)$, $l_3(0) = l_3$. А так как

$$g(x, y) < 0 \quad \forall\, x \in l_3, \ \ \forall\, y > \Phi_-(x),$$

то при движении вдоль отрезка (29) компонента $y(t, \varepsilon, \mu)$ убывает (отсюда и название – участок падения). Длительность участка падения асимптотически мала. Точнее говоря, время взлета от $y = \Phi_-(x_1(\mu)) + 1$ до $y = \varepsilon^{-1/(2(p+1))}$ и время падения от $y = \varepsilon^{-1/(2(p+1))}$ до $y = \Phi_-(x_2(\mu)) + 1$ имеют один и тот же порядок малости по ε.

За падением следует очередной участок медленного движения. На указанном участке фазовая точка (21) находится в асимптотически малой окрестности кривой $\big(x_2(t, \mu), y_2(t, \mu)\big)$, где $y_2(t, \mu) = \Phi_-(x_2(t, \mu))$, а $x_2(t, \mu)$ – решение задачи Коши для системы (8) с начальным условием $x_2(t, \mu)|_{t = t_1(\mu)} = x_2(\mu)$. В зависимости от знака μ здесь возможны следующие два сценария.

Предположим сначала, что параметр μ фиксирован и положителен. Тогда, как уже было сказано выше, система (8) не имеет циклов, а любое ее решение с начальным условием на кривой $l_3(\mu)$ за конечное, хотя и достаточно большое (порядка $1/\sqrt{\mu}$), время попадает на l_1. Последнее означает существование такого момента $t = t_2 > t_1$, что при $t \simeq t_2$ траектория (21) срывается с Γ_-. Затем идет очередной участок быстрого движения и т.д. Ясно также, что в рассматриваемом случае описанный процесс смены участков быстрых и медленных движений продолжается до бесконечности, т.е. в системе (1) реализуются незатухающие неклассические релаксационные колебания.

Пусть теперь параметр μ фиксирован и отрицателен. Тогда, как следует из результатов статьи [7], циклам $L_\pm(\mu)$ системы (8) в исходной системе (1) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ соответствуют устойчивый и неустойчивый циклы $\widetilde{L}_-(\varepsilon, \mu)$ и $\widetilde{L}_+(\varepsilon, \mu)$, причем $\widetilde{L}_\pm(0, \mu) = \{(x, y) : \ \ y = \Phi_-(x), \ \ x \in L_\pm(\mu)\}$. Отметим, далее, что в силу условия 5 интересующая нас траектория (21) при $t > t_1(\mu)$ заведомо попадает в область притяжения цикла $\widetilde{L}_-(\varepsilon, \mu)$. Таким образом, в данном случае релаксационные автоколебания в системе (1) отсутствуют.

Из приведенных качественных соображений вытекает существование критического значения $\mu_*(\varepsilon)$, $\mu_*(0) = 0$ параметра μ, при котором в системе (1) происходит переход от гладких автоколебаний – устойчивого цикла $\widetilde{L}_-(\varepsilon, \mu)$, к релаксационным. Точнее говоря, случай $\mu = \mu_*(\varepsilon)$ соответствует седло-узловой бифуркации, приводящей к слиянию и исчезновению циклов $\widetilde{L}_\pm(\varepsilon, \mu)$. Что же касается интересующей нас катастрофы голубого неба, то она наблюдается в системе (1) при

$$\mu = \mu_*(\varepsilon) + \nu, \quad 0 < \nu \ll 1 \tag{30}$$

и при некотором дополнительном условии, о котором будет сказано ниже.

2. Основные конструкции

Убедимся сначала, что фигурирующее в (30) критическое значение $\mu_*(\varepsilon)$ параметра μ действительно существует.

Лемма 1. *По любому натуральному k можно указать такое достаточно малое $\varepsilon_k > 0$, что на отрезке $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_k$ существует единственная C^k-гладкая по ε функция $\mu_*(\varepsilon)$, $\mu_*(0) = 0$, обладающая следующим свойством: при $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и при $\mu = \mu_*(\varepsilon)$ система (1) имеет полуустойчивый цикл*

$$\widetilde{L}_*(\varepsilon) : \ x = x_*(\varphi, \varepsilon), \quad y = y_*(\varphi, \varepsilon), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_*(\varepsilon) \tag{31}$$

типа простой седло-узел. Здесь C^k-гладкие по (φ, ε) функции $x_*(\varphi, \varepsilon)$, $y_*(\varphi, \varepsilon)$ и C^k-гладко зависящая от ε частота $\omega_*(\varepsilon)$ удовлетворяют равенствам:

$$x_*(\varphi + 2\pi, \varepsilon) \equiv x_*(\varphi, \varepsilon), \quad y_*(\varphi + 2\pi, \varepsilon) \equiv y_*(\varphi, \varepsilon),$$
$$x_*(\varphi, 0) = x_0(\varphi), \quad y_*(\varphi, 0) = \Phi_-(x_0(\varphi)), \quad \omega_*(0) = \omega_0,$$

где вектор-функция $x_0(\varphi)$ и частота ω_0 заимствованы из (17).

Доказательство. Фиксируем произвольно некоторое достаточно малое $\delta_0 > 0$ и на плоскости (x_1, x_2) рассмотрим окрестность цикла (17) вида

$$\mathscr{U} = \bigcup_{\widetilde{x} \in L_0} \mathcal{O}(\widetilde{x}, \delta_0), \tag{32}$$

где $\mathcal{O}(\widetilde{x}, \delta_0)$ – открытый шар радиуса δ_0 с центром в точке $\widetilde{x}$. Как известно (см., например, [8]), по любому натуральному k найдутся такие достаточно малые $\varepsilon_k > 0$,

$\mu_k > 0$, что при всех $(\varepsilon, \mu) \in [0, \varepsilon_k] \times [-\mu_k, \mu_k]$ система (1) имеет экспоненциально орбитально устойчивое (с показателем экспоненты порядка ε^{-1}) инвариантное многообразие медленных движений

$$\{(x, y) : \ y = H(x, \varepsilon, \mu), \ x \in \mathscr{U}\}, \tag{33}$$

где функция $H(x, \varepsilon, \mu)$, $H(x, 0, \mu) = \Phi_-(x)$ является C^k-гладкой по совокупности переменных (x, ε, μ). А это значит, что проблема обоснования леммы сводится к анализу двумерной системы на многообразии (33), имеющей вид

$$\dot{x} = f(x, H(x, \varepsilon, \mu), \mu), \quad x \in \mathscr{U}. \tag{34}$$

Введем в рассмотрение отображение последования

$$s \to R(s, \varepsilon, \mu) \tag{35}$$

по траекториям системы (34), определенное на введенной выше секущей Σ (см. рис. 3) и являющееся C^k-гладким продолжением по ε отображения (18). Рассмотрим, далее, систему уравнений

$$R(s, \varepsilon, \mu) = s, \quad R'_s(s, \varepsilon, \mu) = 1 \tag{36}$$

для нахождения s, μ как функций параметра ε. Нетрудно увидеть, что при $\varepsilon = 0$ эта система имеет решение $(s, \mu) = (0, 0)$, а ее якобиан по переменным s, μ в точке $(s, \varepsilon, \mu) = (0, 0, 0)$ отличен от нуля и равен $-2\alpha_0 d_0$, где α_0, d_0 – постоянные из (19), (20). Тем самым, в силу теоремы о неявной функции система (36) допускает единственное C^k-гладкое по ε решение $\big(s_*(\varepsilon), \mu_*(\varepsilon)\big)$, $s_*(0) = \mu_*(0) = 0$.

Смысл проделанных построений ясен: при $\mu = \mu_*(\varepsilon)$ отображение (35) имеет неподвижную точку $s = s_*(\varepsilon)$ типа простой седло-узел, которой в системе (34) соответствует полуустойчивый цикл

$$L_*(\varepsilon) : \ x = x_*(\varphi, \varepsilon), \quad x_*(\varphi + 2\pi, \varepsilon) \equiv x_*(\varphi, \varepsilon), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_*(\varepsilon), \tag{37}$$

являющийся C^k-гладким продолжением по ε седло-узлового цикла (17). Что же касается интересующего нас цикла (31), то он получается из (37) в результате добавления компоненты $y = y_*(\varphi, \varepsilon)$, где $y_*(\varphi, \varepsilon) = H\big(x_*(\varphi, \varepsilon), \varepsilon, \mu_*(\varepsilon)\big)$. Лемма 1 доказана.

В дополнение к установленной лемме отметим, что в силу условий 1 – 6 каждая траектория системы (1) при $\mu = \mu_*(\varepsilon)$, принадлежащая неустойчивому многообразию $W^u_{loc}\big(\widetilde{L}_*(\varepsilon)\big)$ цикла (31), при $t \to +\infty$ снова стремится к $\widetilde{L}_*(\varepsilon)$, попадая в узловую область этого цикла. Таким образом, $\mu_*(\varepsilon)$ является искомым критическим значением, соответствующим катастрофе голубого неба.

На следующем этапе обратимся к системе

$$\dot{x} = F_*(x, \varepsilon, \nu), \tag{38}$$

получающейся из (34) при учете равенства (30), и преобразуем ее по возможности к наиболее простому виду. Для этого сначала введем в области (32) радиальную и циклическую координаты (s, φ) : $|s| \le s_0$, $s_0 = \mathrm{const} > 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

$(\bmod 2\pi)$, связанные с циклом (37). Точнее говоря, в качестве φ возьмем угловую координату из (37), а через s обозначим параметр на отрезке нормали $\Sigma(\varphi, \varepsilon)$ к кривой $L_*(\varepsilon)$, проведенном через точку $x_*(\varphi, \varepsilon)$ (способ определения этого параметра описан в разделе 1). Далее, из результатов статьи [9] вытекает существование такого достаточно малого $\rho_0 > 0$ и таких C^k-гладких по совокупности переменных $(\rho, \theta, \varepsilon) \in [-\rho_0, \rho_0] \times [0, 2\pi] \times [0, \varepsilon_k]$ функций $h_j(\rho, \theta, \varepsilon)$, $h_j(\rho, \theta + 2\pi, \varepsilon) \equiv h_j(\rho, \theta, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, что после перехода в системе (38) при $\nu = 0$ к координатам (s, φ) и замене $s = \rho + \rho^2 h_1(\rho, \theta, \varepsilon)$, $\varphi = \theta + \rho\, h_2(\rho, \theta, \varepsilon)$ она принимает вид

$$\dot{\rho} = d_1(\varepsilon)\rho^2 + d_2(\varepsilon)\rho^3, \quad \dot{\theta} = \omega_*(\varepsilon). \tag{39}$$

Здесь $\omega_*(\varepsilon)$ – частота из (37), $d_j(\varepsilon)$, $j = 1, 2$ – некоторые функции класса C^k по ε, причем $d_1(0) = d_0/2\pi > 0$, где d_0 – постоянная из (19).

Предположим теперь, что в системе (38) $\nu > 0$. Тогда указанные выше замены преобразуют ее к аналогичному (39) виду

$$\dot{\rho} = d_1(\varepsilon)\rho^2 + d_2(\varepsilon)\rho^3 + \nu\Delta_1(\rho, \theta, \varepsilon, \nu), \quad \dot{\theta} = \omega_*(\varepsilon) + \nu\Delta_2(\rho, \theta, \varepsilon, \nu), \tag{40}$$

где $\Delta_j(\rho, \theta, \varepsilon, \nu)$, $j = 1, 2$ – некоторые C^k-гладкие по $(\rho, \theta, \varepsilon, \nu)$ и 2π-периодические по θ функции. Последующее упрощение системы (40) связано с полиномиальными по ρ, ν заменами переменных, за счет которых можно ослабить зависимость от θ в остатках Δ_j, а точнее говоря, добиться, чтобы функции $\partial\Delta_j/\partial\theta$, $j = 1, 2$ обращались в нуль при $\rho = 0$, $\nu = 0$ вместе с любым наперед заданным количеством своих производных по ρ, ν. В частности, существует замена переменных

$$\rho = r + \nu h_{1,1}(\psi, \varepsilon) + \nu r h_{1,2}(\psi, \varepsilon), \quad \theta = \psi + \nu h_{2,1}(\psi, \varepsilon) + \nu r h_{2,2}(\psi, \varepsilon),$$

где $h_{j,s}(\psi, \varepsilon)$, $h_{j,s}(\psi + 2\pi, \varepsilon) \equiv h_{j,s}(\psi, \varepsilon)$, $j, s = 1, 2$ – некоторые C^k-гладкие по ψ, ε функции (способ их построения описан, например, в [10]), приводящая систему (40) к виду

$$\begin{aligned} \dot{r} &= d_1(\varepsilon)r^2 + d_2(\varepsilon)r^3 + \alpha_1(\varepsilon)\nu + \alpha_2(\varepsilon)\nu r + \nu\Delta_1(r, \psi, \varepsilon, \nu), \\ \dot{\psi} &= \omega_*(\varepsilon) + \beta_1(\varepsilon)\nu + \beta_2(\varepsilon)\nu r + \nu\Delta_2(r, \psi, \varepsilon, \nu). \end{aligned} \tag{41}$$

Здесь $\alpha_j(\varepsilon)$, $\beta_j(\varepsilon)$, $j = 1, 2$ – скалярные функции, C^k-гладко зависящие от ε, а остатки Δ_j, $j = 1, 2$ в (41) удовлетворяют тем же общим требованиям периодичности и гладкости, что и аналогичные им остатки из (40). Однако теперь для них справедливы равенства

$$\Delta_j(0, \psi, \varepsilon, 0) \equiv \frac{\partial\Delta_j}{\partial r}(0, \psi, \varepsilon, 0) \equiv 0, \quad j = 1, 2. \tag{42}$$

Отметим еще необходимое для дальнейшего свойство $\alpha_1(0) = \alpha_0/2\pi > 0$, где α_0 – постоянная (20).

Последующий анализ базируется на некоторых дополнительных геометрических построениях. А именно, введем в рассмотрение две двумерные цилиндрические поверхности $S_\pm$, задающиеся в переменных (r, ψ, v), $v = y - H(x, \varepsilon, \mu)$ равенствами

$$S_\pm = \{(r, \psi, v) : \ r = \pm r_0, \quad 0 \le \psi \le 2\pi \,(\bmod\ 2\pi), \quad |v| \le v_0\}, \tag{43}$$

где постоянные r_0, $v_0 > 0$ фиксированы и достаточно малы. Отметим, далее, что при условии (30) поверхности (43) не имеют контактов с траекториями системы (1), поскольку положительны производные $\dot{r}|_{r=\pm r_0}$ в силу этой системы (данный факт – следствие положительности коэффициентов $d_1(\varepsilon)$, $\alpha_1(\varepsilon)$ нормальный формы (41)). Кроме того, из описанного в разделе 1 качественного характера поведения решений (21) вытекает, что, во-первых, в данном случае корректно определен оператор соответствия $\Pi_{+,-}(\varepsilon,\nu) : \ S_+ \to S_-$ по траекториям системы (1); во-вторых, при $\varepsilon \to 0$, $\nu \to 0$ этот оператор допускает конечный предел

$$\Pi_{+,-}(0,0) : \ (\psi, v) \to (\gamma(\psi), 0), \tag{44}$$

где $\gamma(\psi) \in C^\infty$ – некоторая периодическая с периодом 2π функция.

Остановимся чуть более подробно на способе определения фигурирующей в (44) функции $\gamma(\psi)$. В связи с этим на плоскости (x_1, x_2) рассмотрим две замкнутые кривые $L_{(\pm)}$, которые в переменных (r,ψ) имеют вид

$$L_{(\pm)} = \{(r,\psi) : \ \ r = \pm r_0, \\ 0 \le \psi \le 2\pi \,(\mathrm{mod}\ 2\pi)\}$$

(см. рис. 4, где пунктиром изображен цикл L_0, располагающийся между $L_{(-)}$ и $L_{(+)}$). Фиксируем, далее, произвольную точку на $L_{(+)}$, которой соответствует угол ψ, и выпустим из нее решение системы (8) при $\mu = 0$. В силу второго неравенства из (2) траектории этой системы не имеют контактов с l_1, а значит, по ним осуществляется взаимно однозначное соответствие между кривыми $L_{(+)}$ и l_1. Поэтому будем считать, что кривая l_1 параметризована с помощью той же самой координаты ψ, что и $L_{(+)}$. Точнее говоря, считаем, что точкам из $L_{(+)}$ и l_1, лежащим на одной и той же траектории, отвечают одинаковые значения ψ (см. рис. 4).

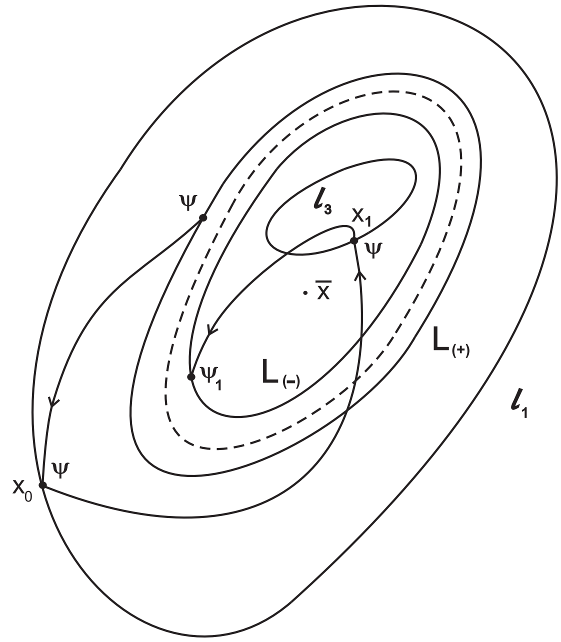

Рис. 4

Обратимся теперь к точке на кривой l_1 с координатой ψ (которую обозначим через x_0) и выпустим из нее отрезок траектории системы (5) при $\mu = 0$, отвечающий значениям $0 \le t \le t_{**}(x_0)$, где $t_{**}(x_0)$ – момент времени из (12). В результате приходим в точку $x_1 = \Pi_0(x_0)$, лежащую на кривой l_3. А так как l_3 получается из l_1 под действием диффеоморфизма (12), то и здесь будем считать, что точки x_0 и x_1 имеют одну и ту же координату ψ (см. рис. 4).

Для завершения построения функции $\gamma(\psi)$ возьмем полученную на предыдущем шаге точку $x_1 \in l_3$ и рассмотрим траекторию системы (8) при $\mu = 0$ с начальным условием в этой точке (см. рис. 4). Привлекая условие 5, убеждаемся, что при увеличении t упомянутая траектория с необходимостью пересечет общим образом кривую $L_{(-)}$ в некоторой точке с координатой $\psi_1 = \gamma(\psi)$, где $\gamma(\psi) \in C^\infty$. А поскольку кривая l_3 не окружает особую точку $x = \overline{x}$ (см. рис. 4), то $\gamma(\psi)$ обладает свойством периодичности первого рода, т.е. $\gamma(\psi + 2\pi) \equiv \gamma(\psi)$.

Применяя к системе (1) общие результаты монографии [6], касающиеся классических и неклассических релаксационных колебаний, приходим к следующему утверждению.

Лемма 2. *При выполнении условий 1 – 6 и соотношения* (30) *имеет место предельное равенство*

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\,\nu\to 0}\Pi_{+,-}(\varepsilon,\nu)=\Pi_{+,-}(0,0) \tag{45}$$

в метрике C^k по переменным $(\psi,v)\in[0,2\pi]\times[-v_0,v_0]$ при любом фиксированном k.

Заключительный этап исследования поведения решений системы (1) при условии (30) связан с рассмотрением оператора соответствия $\Pi_{-,+}(\varepsilon,\nu)$ по ее траекториям, действующего из S_- в S_+. Убедимся сначала, что при любом $0<\nu\ll 1$ данный оператор действительно существует. Для этого выполним в (1) замену $y-H(x,\varepsilon,\mu)=v$ и учтем равенство (30). В результате приходим к системе вида

$$\dot x=F(x,v,\varepsilon,\nu),\quad \varepsilon\,\dot v=G(x,v,\varepsilon,\nu)v,\quad (x,v)\in\mathscr{U}\times[-v_0,v_0]. \tag{46}$$

Здесь C^k-гладкие по совокупности переменных (x,v,ε,ν) функции G, F таковы, что

$$F(x,0,\varepsilon,\nu)=F_*(x,\varepsilon,\nu),\quad G(x,0,0,0)=g'_y\big(x,\Phi_-(x)\big)<0, \tag{47}$$

где F_* – правая часть системы (38).

Из свойства (47) функции G следует, что компонента v любого решения системы (46) с начальным условием, заданным при $t=0$ и принадлежащим поверхности S_-, за любое конечное время $t_0=\mathrm{const}>0$ становится по модулю величиной порядка $\exp(-c_0/\varepsilon)$, $c_0=\mathrm{const}>0$. Таким образом, проблема существования оператора $\Pi_{-,+}(\varepsilon,\nu)$ сводится к аналогичному вопросу для оператора соответствия $\Pi^*_{-,+}(\varepsilon,\nu):$ $L_{(-)}\to L_{(+)}$ по траекториям системы (41), получающейся из (46) при $v=0$ и при переходе к координатам r,ψ. Последний же корректно определен, так как в случае $\nu>0$, $r\in[-r_0,r_0]$ правая часть уравнения для r из (41) строго положительна. Более того, для $\Pi^*_{-,+}(\varepsilon,\nu)$ справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *По любому натуральному k можно указать такие достаточно малые постоянные $\varepsilon_k>0$, $\nu_k>0$, что при всех $0<\nu\le\nu_k$, $0\le\varepsilon\le\varepsilon_k$ оператор $\Pi^*_{-,+}(\varepsilon,\nu)$ допускает представление*

$$\Pi^*_{-,+}(\varepsilon,\nu):\ \psi\to\psi+c_*(\varepsilon,\nu)/\sqrt{\nu}+\sqrt{\nu}\,\Psi(\psi,\varepsilon,\nu)\,(\mathrm{mod}\ 2\pi), \tag{48}$$

где функция $c_*(\varepsilon,\nu)$, $c_*(0,0)>0$ непрерывна по совокупности переменных (вплоть до значения $\nu=0$). Что же касается 2π-периодической по ψ функции $\Psi(\psi,\varepsilon,\nu)$, то она непрерывна и ограничена на множестве $(\psi,\varepsilon,\nu)\in[0,2\pi]\times[0,\varepsilon_k]\times(0,\nu_k]$ вместе со своими производными $\partial^m\Psi/\partial\psi^m$, $m\le k$.

Доказательство. Фиксируем произвольно натуральное k и подберем постоянные r_0, ε_k, $\nu_k>0$ таким образом, чтобы правые части системы (41) имели по переменным

$$(r,\psi,\varepsilon,\nu)\in S=[-r_0,r_0]\times[0,2\pi]\times[0,\varepsilon_k]\times[0,\nu_k] \tag{49}$$

гладкость C^k. Далее, примем в этой системе r за новое время (что возможно в силу положительности $\dot r$). В результате после некоторых преобразований приходим к скалярному неавтономному уравнению с 2π-периодической по ψ правой частью, имеющему вид:

$$\frac{d\psi}{dr} = \omega_*(\varepsilon)/\bigl[\delta(r,\varepsilon,\nu) + \nu\Delta(r,\psi,\varepsilon,\nu)\bigr], \tag{50}$$

где $\delta(r,\varepsilon,\nu) = d_1(\varepsilon)r^2 + d_2(\varepsilon)r^3 + \alpha_1(\varepsilon)\nu + \alpha_2(\varepsilon)\nu r$, а остаток $\Delta \in C^k(S)$ удовлетворяет вытекающим из (42) равенствам

$$\frac{\partial^m \Delta}{\partial \psi^m}(0,\psi,\varepsilon,0) \equiv \frac{\partial^{m+1}\Delta}{\partial r \partial \psi^m}(0,\psi,\varepsilon,0) \equiv 0, \quad m = 0,1,\ldots,k. \tag{51}$$

Для анализа уравнения (50) нам потребуется функция

$$V(r,\psi,\varepsilon,\nu) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \nu^{n-1}\bigl(\Delta(r,\psi,\varepsilon,\nu)/\delta(r,\varepsilon,\nu)\bigr)^n, \tag{52}$$

являющаяся непрерывной на множестве (49) вместе со своими производными по ψ до порядка k включительно. Действительно, равномерную сходимость ряда (52), а также рядов, получающихся из данного после m-кратного дифференцирования по ψ $(m \le k)$, гарантируют оценки

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial \psi^m}\Delta(r,\psi,\varepsilon,\nu)\right| \le N_1(r^2+\nu), \quad m \le k; \quad \delta(r,\varepsilon,\nu) \ge N_2(r^2+\nu), \tag{53}$$

справедливые в силу свойств (51) и неравенств $d_1(0) > 0$, $\alpha_1(0) > 0$. Здесь и ниже буквами N, N_1, N_2 и т.д. обозначаем различные универсальные (не зависящие от r, ψ, ε, ν) положительные постоянные, точные значения которых несущественны.

Используя функцию (52), перейдем от (50) к более удобному для дальнейшего исследования уравнению

$$\frac{d\psi}{dr} = \omega_*(\varepsilon)\bigl[1 + \nu V(r,\psi,\varepsilon,\nu)\bigr]/\delta(r,\varepsilon,\nu) \tag{54}$$

и дополним его начальным условием $\psi|_{r=-r_0} = \psi_0$, где $\psi_0 \in [0,2\pi]$ произвольно фиксировано. Решение получившейся задачи Коши будем искать в виде

$$\psi = \psi_0 + \psi_*(r,\varepsilon,\nu) + \sqrt{\nu}\,h, \quad \psi_*(r,\varepsilon,\nu) = \omega_*(\varepsilon)\int_{-r_0}^{r}\frac{ds}{\delta(s,\varepsilon,\nu)}, \quad h|_{r=-r_0} = 0. \tag{55}$$

В результате после подстановки равенств (55) в (54) для определения функции $h = h(r,\psi_0,\varepsilon,\nu)$ приходим к интегральному уравнению

$$h = \sqrt{\nu}\,\omega_*(\varepsilon)\int_{-r_0}^{r}\frac{V(s,\ \psi_0 + \psi_*(s,\varepsilon,\nu) + \sqrt{\nu}\,h,\ \varepsilon,\ \nu)}{\delta(s,\varepsilon,\nu)}ds. \tag{56}$$

Обозначим через E – банахово пространство функций $h(r,\psi_0)$, 2π-периодических по ψ_0 и непрерывных по $(r,\psi_0) \in [-r_0,r_0]\times[0,2\pi]$ вместе с производными $\partial^m h/\partial\psi_0^m$, $m \le k$. Норму в E определим формулой

$$||h||_E = \sum_{m=0}^{k}\max_{(r,\psi_0)\in[-r_0,r_0]\times[0,2\pi]}\left|\frac{\partial^m h}{\partial \psi_0^m}\right|.$$

Привлекая, далее, отмеченные выше свойства гладкости по ψ функции (52) и вытекающую из (53) оценку

$$\left|\left|\sqrt{\nu}\,\omega_*(\varepsilon)\int_{-r_0}^{r}\frac{f(s,\psi_0)}{\delta(s,\varepsilon,\nu)}ds\right|\right|_E \le N_3||f||_E \quad \forall\, f(r,\psi_0)\in E,$$

приходим к выводу, что нелинейный оператор, порождаемый правой частью уравнения (56) в пространстве E, преобразует в себя некоторый замкнутый шар вида $\{h\in E:\ ||h||_E\le N\}$ и является в этом шаре сжимающим (с константой сжатия порядка $\sqrt{\nu}$). А отсюда и из принципа сжимающих отображений заключаем, что уравнение (56) имеет единственное решение $h=h_*(r,\psi_0,\varepsilon,\nu)$, непрерывное и ограниченное на множестве

$$(r,\psi_0,\varepsilon,\nu)\in[-r_0,r_0]\times[0,2\pi]\times[0,\varepsilon_k]\times(0,\nu_k] \tag{57}$$

вместе со своими производными $\partial^m h_*/\partial\psi_0^m$, $m\le k$. Подчеркнем, что в отличие от (49) в (57) исключен случай $\nu=0$. Связано это с тем, что фигурирующая в (55), (56) функция $\psi_*(r,\varepsilon,\nu)$ при $\nu\to 0$ стремится к бесконечности как $1/\sqrt{\nu}$.

Из проделанных построений следует, что интересующий нас оператор $\Pi^*_{-,+}(\varepsilon,\nu)$ записывается в виде

$$\Pi^*_{-,+}(\varepsilon,\nu):\ \psi_0\to\psi_0+\psi_*(r_0,\varepsilon,\nu)+\sqrt{\nu}\,h_*(r_0,\psi_0,\varepsilon,\nu).$$

Таким образом, функция $\Psi(\psi,\varepsilon,\nu)$ из (48) задается равенством $\Psi=h_*(r_0,\psi,\varepsilon,\nu)$ и в силу этого обладает всеми требуемыми в лемме свойствами. Что же касается аддитивной добавки $\psi_*(r_0,\varepsilon,\nu)$, то из явного выражения для $\psi_*(r,\varepsilon,\nu)$ (см. (55)) для нее вытекает представление $\psi_*(r_0,\varepsilon,\nu)=c_*(\varepsilon,\nu)/\sqrt{\nu}$, где $c_*(\varepsilon,\nu)$ – непрерывная по $(\varepsilon,\nu)\in[0,\varepsilon_0]\times[0,\nu_0]$ функция и $c_*(0,0)=\pi\omega_0/\sqrt{\alpha_0 d_0}>0$. Лемма 3 доказана.

Обратимся теперь к исходному оператору $\Pi_{-,+}(\varepsilon,\nu)$. Из проделанных выше построений вытекает следующая

Лемма 4. *Для любого натурального k найдутся такие достаточно малые $\varepsilon_k>0$, $\nu_k>0$, что при всех $0<\nu\le\nu_k$, $0\le\varepsilon\le\varepsilon_k$ оператор $\Pi_{-,+}(\varepsilon,\nu)$ допускает представление*

$$\Pi_{-,+}(\varepsilon,\nu):\quad \begin{aligned} &\psi\to\psi+c_*(\varepsilon,\nu)/\sqrt{\nu}+\Psi_1(\psi,v,\varepsilon,\nu)\,(\mathrm{mod}\ 2\pi),\\ &v\to\Psi_2(\psi,v,\varepsilon,\nu)\exp\left(-\frac{c_{**}}{\varepsilon\sqrt{\nu}}\right). \end{aligned} \tag{58}$$

Здесь функция $c_*(\varepsilon,\nu)$ обладает теми же свойствами, что и аналогичная функция из (48), $c_{**}=const>0$, а 2π-периодические по ψ функции Ψ_j, $j=1,2$ и их всевозможные частные производные по ψ, v до порядка k непрерывны по $(\psi,v,\varepsilon,\nu)\in[0,2\pi]\times[-v_0,v_0]\times[0,\varepsilon_k]\times[0,\nu_k]$. Кроме того, выполняется равенство $\Psi_1(\psi,v,0,0)\equiv 0$.

Доказательство сформулированного утверждения по существу сводится к применению предыдущей леммы 3. Действительно, выполним в системе (46) гладкую замену переменных вида $x + \varepsilon w(x, v, \varepsilon, \nu) \to x$, распрямляющую сильно устойчивое инвариантное слоение над многообразием (33) (см. [10]). В результате получаем треугольную систему

$$\dot{x} = \widetilde{F}(x, \varepsilon, \nu), \quad \varepsilon\, \dot{v} = \widetilde{G}(x, v, \varepsilon, \nu)v, \tag{59}$$

где C^k-гладкие по (x, ε, ν) и (x, v, ε, ν) функции $\widetilde{G}$ и $\widetilde{F}$ отличаются от фигурирующих в (46), (47) функций F_*, G на величины порядка ε. Далее, нормализуем первое уравнение из (59), т.е. перейдем от x к координатам $(\widetilde{r}, \widetilde{\psi})$, в которых это уравнение принимает аналогичный (41) вид. Затем рассмотрим секущие $\widetilde{S}_\pm$, задающиеся аналогичными (43) равенствами, и определим оператор соответствия $\widetilde{\Pi}_{-,+}(\varepsilon, \nu) : \widetilde{S}_- \to \widetilde{S}_+$ по траекториям системы (59).

Из структуры уравнений (59) и из леммы 3 следует, что интересующий нас оператор $\widetilde{\Pi}_{-,+}(\varepsilon, \nu)$ также имеет треугольный вид, а точнее говоря, допускает представление

$$\widetilde{\Pi}_{-,+}(\varepsilon, \nu) : \quad \begin{aligned} &\widetilde{\psi} \to \widetilde{\psi} + c_*(\varepsilon, \nu)/\sqrt{\nu} + \sqrt{\nu}\, \widetilde{\Psi}_1(\widetilde{\psi}, \varepsilon, \nu), \\ &v \to \widetilde{\Psi}_2(\widetilde{\psi}, v, \varepsilon, \nu) \exp\left(-\frac{c_{**}}{\varepsilon\sqrt{\nu}}\right). \end{aligned} \tag{60}$$

Здесь $c_{**} = \mathrm{const} > 0$, функции $c_*(\varepsilon, \nu)$, $\widetilde{\Psi}_1(\widetilde{\psi}, \varepsilon, \nu)$ обладают свойствами, описанными в лемме 3, а 2π-периодическая по $\widetilde{\psi}$ функция $\widetilde{\Psi}_2$ непрерывна по всем своим переменным $(\widetilde{\psi}, v, \varepsilon, \nu) \in [0, 2\pi] \times [-v_0, v_0] \times [0, \varepsilon_k] \times [0, \nu_k]$ вместе с производными по $(\widetilde{\psi}, v)$ до порядка k. Добавим еще, что указанная в (60) экспоненциальная малость компоненты v вытекает из вида второго уравнения системы (59), свойства $\widetilde{G}(x, 0, 0, 0) = G(x, 0, 0, 0) < 0$ (см. (47)) и того факта, что любая траектория этой системы проводит между секущими $\widetilde{S}_\pm$ время

$$T \sim \int_{-r_0}^{r_0} d\widetilde{r}/\delta(\widetilde{r}, \widetilde{\psi}, \varepsilon, \nu) = O(1/\sqrt{\nu}).$$

Здесь $\delta(\widetilde{r}, \widetilde{\psi}, \varepsilon, \nu) = O(\widetilde{r}^2 + \nu)$ – правая часть уравнения для $\widetilde{r}$, аналогичная правой части уравнения для r из (41).

Для завершения обоснования леммы 4 заметим, что после перехода от $(\widetilde{r}, \widetilde{\psi})$ к прежним координатам (r, ψ) отображение (60) принимает требуемый вид (58).

3. Сводка результатов

Проделанные в предыдущем разделе построения позволяют определить оператор последования Пуанкаре

$$\Pi(\varepsilon, \nu) = \Pi_{-,+}(\varepsilon, \nu) \circ \Pi_{+,-}(\varepsilon, \nu) : \ S_+ \to S_+ \tag{61}$$

по траекториям системы (1) при условии (30). Из соотношений (45), (58) вытекает следующее утверждение, являющееся основным результатом данной статьи.

Теорема 1. *Для любого натурального k найдутся такие достаточно малые $\varepsilon_k > 0$, $\nu_k > 0$, что при $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_k$, $0 < \nu \le \nu_k$ оператор* (61) *имеет вид*

$$\Pi(\varepsilon,\nu): \quad \begin{aligned} &\psi \to c_*(\varepsilon,\nu)/\sqrt{\nu} + \gamma(\psi) + \Lambda_1(\psi,v,\varepsilon,\nu) \,(\mathrm{mod}\ 2\pi), \\ &v \to \Lambda_2(\psi,v,\varepsilon,\nu) \exp\left(-\frac{c_{**}}{\varepsilon\sqrt{\nu}}\right). \end{aligned} \tag{62}$$

Здесь $\gamma(\psi)$ и $c_*(\varepsilon,\nu)$ – функции из (44) *и* (58) *соответственно, $c_{**} = const > 0$, а 2π-периодические по ψ функции Λ_j, $j = 1, 2$ и их производные по (ψ, v) до порядка k включительно непрерывны по $(\psi,v,\varepsilon,\nu) \in [0,2\pi]\times[-v_0,v_0]\times[0,\varepsilon_k]\times[0,\nu_k]$. Кроме того, выполняется равенство $\Lambda_1(\psi,v,0,0) \equiv 0$.*

Опираясь на представление (62), нетрудно увидеть, что $\Pi(\varepsilon,\nu)S_+ \subset S_+$. А это значит, что отображение (61) имеет максимальный аттрактор

$$A_{\max} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Pi^n(\varepsilon,\nu)S_+. \tag{63}$$

Ясно также, что в первом приближении за структуру множества (63) отвечает одномерное отображение

$$\Pi_\varkappa: \ \psi \to \overline{\psi} = \varkappa + \gamma(\psi), \tag{64}$$

где $\varkappa = c_*(\varepsilon,\nu)/\sqrt{\nu}$, получающееся из (62) после отбрасывания асимптотически малых по ε, ν слагаемых. В дальнейшем будем рассматривать это отображение, считая $\varkappa$ независимым параметром, пробегающим всю числовую ось $\mathbb{R}$.

При анализе аттрактора (63) ограничимся тремя основными случаями. Начнем с простейшего из них, а именно, предположим, что

$$|\gamma'(\psi)| < 1 \quad \forall \psi \in [0,2\pi]. \tag{65}$$

Тогда, как нетрудно увидеть, отображение (64) имеет единственную непрерывно зависящую от $\varkappa$ неподвижную точку

$$\psi = \psi_0(\varkappa), \quad \psi_0(\varkappa + 2\pi) \equiv \psi_0(\varkappa) + 2\pi. \tag{66}$$

Что же касается исходного отображения (62), то при условии (65) оно очевидным образом является сжимающим. Тем самым, в рассматриваемом случае приходим к следующему утверждению.

Теорема 2 (о катастрофе голубого неба)**.** *Пусть выполнено неравенство* (65)*. Тогда аттрактор* (63) *состоит из единственной экспоненциально устойчивой неподвижной точки $(\psi,v) = \big(\psi(\varepsilon,\nu), v(\varepsilon,\nu)\big)$, для компонент которой при $\nu \to 0$ справедливы равномерные по ε асимптотические представления*

$$\psi(\varepsilon,\nu) = \psi_0(\varkappa)|_{\varkappa = c_*(\varepsilon,\nu)/\sqrt{\nu}} + o(1), \quad v(\varepsilon,\nu) = O\left(\exp\left(-\frac{c_{**}}{\varepsilon\sqrt{\nu}}\right)\right), \tag{67}$$

где $c_{**} > 0$ – постоянная из (62)*, а $\psi_0 = \psi_0(\varkappa)$ – функция* (66)*.*

Следует отметить, что установленная теорема гарантирует реализуемость в системе (1) при условии (30) интересующей нас катастрофы голубого неба. Действительно, неподвижной точке (67) оператора последования (61) отвечает устойчивый релаксационный цикл $\widetilde{L}(\varepsilon,\nu)$ этой системы, период и длина которого равномерно по ε стремятся к бесконечности при $\nu \to 0$. Кроме того, в силу первого равенства из (67) множество всех частичных пределов компоненты $\psi(\varepsilon,\nu)$ при $\nu \to 0$, взятое по модулю 2π, совпадает с отрезком $[0,2\pi]$. А это значит, что верхний топологический предел кривой $\widetilde{L}(\varepsilon,\nu)$ при $\nu \to 0$ равен $W^u\big(\widetilde{L}_*(\varepsilon)\big) \cup \widetilde{L}_*(\varepsilon)$, где $\widetilde{L}_*(\varepsilon)$ – седло-узловой цикл (31), а W^u – его неустойчивое многообразие, продолженное по траекториям системы (1) при $\mu = \mu_*(\varepsilon)$ и состоящее, как уже говорилось в разделе 2, из двоякоасимптотических к $\widetilde{L}_*(\varepsilon)$ решений.

Предположим теперь, что на некотором отрезке $[\varkappa_0, \varkappa_0 + 2\pi]$ изменения параметра $\varkappa$ отображение (64) имеет непрерывную по $\varkappa$ неустойчивую неподвижную точку $\psi_{(0)} = \psi_{(0)}(\varkappa)$, $|\gamma'(\psi_{(0)})| > 1$, и непрерывную по $\varkappa \in [\varkappa_0, \varkappa_0 + 2\pi]$ гомоклиническую орбиту $\{\psi_{(-n)} = \psi_{(-n)}(\varkappa),\ n \in \mathbb{N}\}$, определяющуюся равенствами (см. рис. 5, где изображен случай $\gamma'(\psi_{(0)}) < -1$):

$$\Pi_\varkappa(\psi_{(-n)}) = \psi_{(-n+1)}, \quad \gamma'(\psi_{(-n)}) \neq 0 \quad \text{при} \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad \lim_{n\to\infty} \psi_{(-n)} = \psi_{(0)}. \tag{68}$$

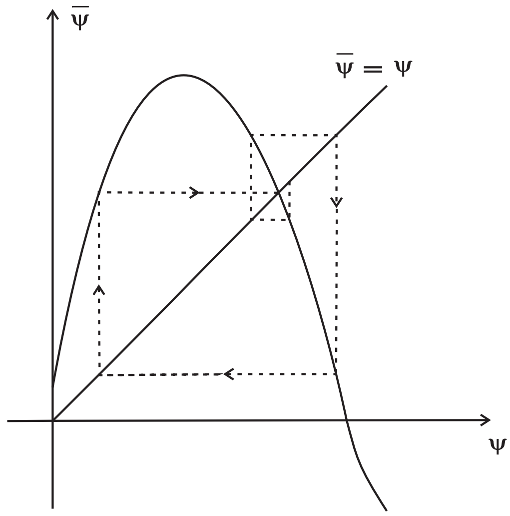

Рис. 5

Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon, \nu > 0$ аттрактор (63) отображения (62) содержит инвариантное гиперболическое подмножество, являющееся носителем сложной динамики. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнены сформулированные чуть выше ограничения. Тогда найдутся такие достаточно малые* ε_0, $\nu_0 > 0$, *что при всех* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, $0 < \nu \le \nu_0$ *отображение* (62) *имеет седловую неподвижную точку*

$$\begin{gathered} O(\varepsilon,\nu) = \big(\psi(\varepsilon,\nu), v(\varepsilon,\nu)\big): \ \psi(\varepsilon,\nu) = \psi_{(0)}\big(\widetilde{\varkappa}(\varepsilon,\nu)\big) + o(1), \quad \widetilde{\varkappa}(\varepsilon,\nu) = \\ = c_*(\varepsilon,\nu)/\sqrt{\nu} - 2\pi \cdot \left[\frac{1}{2\pi}\left(c_*(\varepsilon,\nu)/\sqrt{\nu} - \varkappa_0\right)\right] \in [\varkappa_0, \varkappa_0 + 2\pi), \\ [*] - \textit{целая часть}, \quad v(\varepsilon,\nu) = O\left(\exp\left(-\frac{c_{**}}{\varepsilon\sqrt{\nu}}\right)\right), \quad \nu \to 0 \end{gathered} \tag{69}$$

с грубой гомоклинической кривой.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что аддитивная добавка $c_*(\varepsilon,\nu)/\sqrt{\nu}$ в (62) заменена на $\widetilde{\varkappa}(\varepsilon,\nu)$ (см. (69)). Тогда существование у отображения $\Pi(\varepsilon,\nu)$ требуемой неподвижной точки $O(\varepsilon,\nu)$ – очевидное следствие предполагаемой грубости решения $\psi = \psi_{(0)}(\varkappa)$ уравнения $\psi = \varkappa + \gamma(\psi)$ при $\varkappa \in [\varkappa_0, \varkappa_0 + 2\pi]$. Более того, нетрудно увидеть, что устойчивое и неустойчивое многообразия $W^s(O)$

и $W^u(O)$ этой точки при $\varepsilon,\nu\to 0$ стремятся (в C^k-метрике) к соответствующим отрезкам $\{(\psi,v):\ \psi=\psi(\varepsilon,\nu),\ |v|\le v_0\}$ и $\{(\psi,v):\ |\psi-\psi(\varepsilon,\nu)|\le\delta_0,\ v=0\}$ (см. рис. 6), где $\delta_0>0$ – некоторая не зависящая от ε, ν положительная постоянная.

Дальнейший анализ связан со следующими геометрическими построениями. Фиксируем такие достаточно большое натуральное n_0 и достаточно малое $\delta_1>0$, для которых выполняется включение

$$I_{\delta_1,n_0}=\big[\psi_{(-n_0)}\big(\widetilde{\varkappa}(\varepsilon,\nu)\big)-\delta_1,\ \psi_{(-n_0)}\big(\widetilde{\varkappa}(\varepsilon,\nu)\big)+\delta_1\big]\subset\big[\psi(\varepsilon,\nu)-\delta_0,\ \psi(\varepsilon,\nu)+\delta_0\big].\quad(70)$$

Заметим, что в силу непрерывности по $\varkappa\in[\varkappa_0,\varkappa_0+2\pi]$ компонент $\psi_{(-n_0)}(\varkappa)$ и $\psi_{(0)}(\varkappa)$ из (68) фигурирующие в (70) числа n_0, δ_1 можно выбрать не зависящими от ε,ν. Далее, обозначим через σ кусок многообразия $W^u(O)$, координата ψ которого принадлежит отрезку I_{δ_1,n_0}, и рассмотрим его образ $\Pi^{n_0}(\varepsilon,\nu)\sigma$ под действием оператора $\Pi^{n_0}(\varepsilon,\nu)$. Покажем, что это множество расположено по отношению к точке $O(\varepsilon,\nu)$ так, как изображено на рис. 6. Точнее говоря, на этом рисунке с некоторой долей условности представлен один из возможных случаев, когда $\Pi^{n_0}(\varepsilon,\nu)\sigma$ лежит выше участка многообразия $W^u(O)$ при $|\psi-\psi(\varepsilon,\nu)|\le\delta_0$. Условность же состоит в том, что на самом деле расстояние от $\Pi^{n_0}(\varepsilon,\nu)\sigma$ до $O(\varepsilon,\nu)$ имеет порядок малости $\exp\Big(-\dfrac{c_{**}}{\varepsilon\sqrt{\nu}}\Big)$.

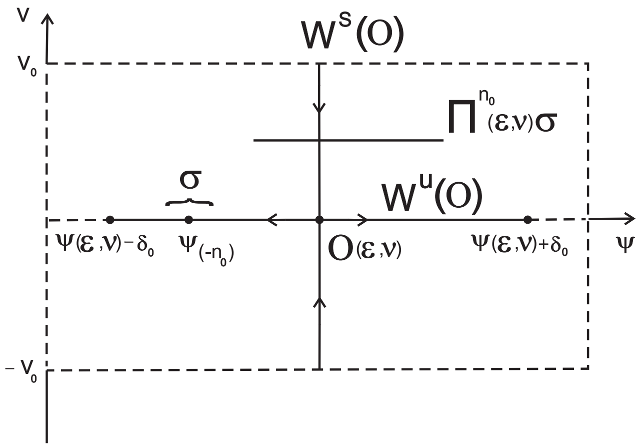

Рис. 6

Действительно, снова опираясь на свойства орбиты (68), убеждаемся, что после n_0-кратного применения отображения (64) (при $\varkappa=\widetilde{\varkappa}(\varepsilon,\nu)$) отрезок I_{δ_1,n_0} переходит в некоторый отрезок J_{δ_1,n_0}, имеющий компоненту $\psi=\psi_{(0)}\big(\widetilde{\varkappa}(\varepsilon,\nu)\big)$ своей внутренней точкой. Тем самым, проекция множества $\Pi^{n_0}(\varepsilon,\nu)\sigma$ на ось ψ параллельно оси v, которая, подчеркнем, при ε, $\nu\to 0$ асимптотически близка к отрезку J_{δ_1,n_0}, заведомо "накрывает" координату $\psi=\psi(\varepsilon,\nu)$ неподвижной точки $O(\varepsilon,\nu)$ (см. рис. 6). А это означает, что многообразие $W^u(O)$ после продолжения по траекториям отображения (62) с необходимостью пересечет общим образом кривую $W^s(O)$. Теорема 3 доказана.

В дополнение к установленной теореме заметим, что, несмотря на наличие сложной динамики, существуют сколь угодно малые положительные значения параметра ν, при которых в аттракторе (63) содержится хотя бы одна экспоненциально устойчивая неподвижная точка оператора (62). Упомянутые значения принадлежат множеству $B_q(\varepsilon)$, которое определяется следующим образом. Будем говорить, что $\nu\in B_q(\varepsilon)$, если уравнение $\psi=\varkappa+\gamma(\psi)$ при $\varkappa=c_*(\varepsilon,\nu)/\sqrt{\nu}$ допускает решение $\psi=\widetilde{\psi}$, для которого $|\gamma'(\widetilde{\psi})|\le q$, где $q\in(0,1)$ – некоторая наперед заданная не зависящая от ε,ν постоянная. Обращаем внимание, что поскольку

$$\{\psi:|\gamma'(\psi)|\le q\}\ne\varnothing$$

при $\forall q\in(0,1)$, то множество $B_q(\varepsilon)$ заведомо не пусто и всегда имеет своей предельной точкой $\nu=0$.

Заканчивая исследование аттрактора (63), рассмотрим ситуацию, когда в условии 5 кривая l_3 по-прежнему лежит в области, ограничиваемой циклом L_0, но окружает состояние равновесия $x = \overline{x}$ и не имеет контактов с траекториями системы (8) при $\mu = 0$ (см. рис. 7). В этом случае фигурирующая в (44) функция $\gamma(\psi)$ обладает свойствами

$$\begin{aligned} &\gamma(\psi + 2\pi) \equiv \gamma(\psi) + 2\pi, \\ &\gamma'(\psi) > 0 \ \ \forall\, \psi \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \tag{71}$$

Что же касается всех приведенных выше конструкций и итоговой теоремы 1, то они остаются в силе. Более того, справедливо следующее утверждение.

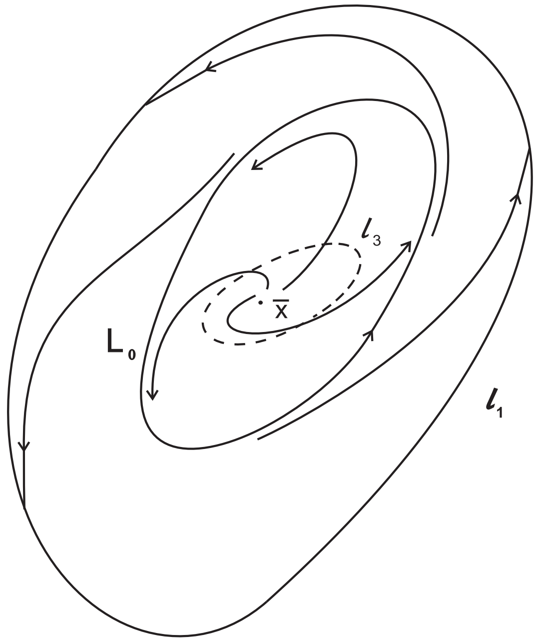

Рис. 7

Теорема 4. *Пусть условие 5 модифицировано описанным выше образом. Тогда аттрактор* (63) *отображения* (62) *состоит из инвариантной кривой*

$$\left\{(\psi, v): \quad v = \mathscr{V}(\psi, \varepsilon, \nu) \exp\left(-\frac{c_{**}}{\varepsilon\sqrt{\nu}}\right)\right\}. \tag{72}$$

Здесь $c_{**} > 0$, а 2π-периодическая по ψ функция $\mathscr{V}(\psi, \varepsilon, \nu)$ обладает теми же свойствами непрерывности и гладкости, что и функция $\Lambda_2(\psi, 0, \varepsilon, \nu)$ из (62).

Для доказательства заметим, что свойства (71) позволяют применить к отображению (62) известный принцип кольца (см. [10, 11]). Из этого принципа вытекает существование в множестве S_+ единственной глобально экспоненциально устойчивой инвариантной кривой вида (72). Добавим еще, что в исходной системе (1) при условии (30) данной кривой отвечает устойчивый двумерный инвариантный тор.

4. Заключение

В первую очередь разберемся с вопросом о реализуемости условий 1 – 6. Точнее говоря, убедимся, что любую систему на плоскости, в которой при изменении некоторого параметра происходит седло-узловая бифуркация цикла, можно достроить до трехмерной релаксационной системы вида (1), удовлетворяющей требуемым условиям.

Действительно, возьмем произвольную систему

$$\dot{x} = f_1(x, \mu), \tag{73}$$

где $f_1(x, \mu) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times [-\mu_0, \mu_0]; \mathbb{R}^2)$, а $\mu_0 > 0$ достаточно мало, и предположим, что при $\mu = 0$ у этой системы существует единственное экспоненциально неустойчивое

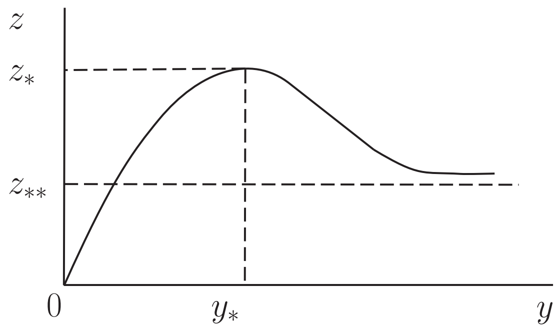

Рис. 8

состояние равновесия $x = \overline{x}$ типа узла или фокуса и единственный окружающий его полуустойчивый цикл L_0. Считаем также, что для данной системы выполняются неравенства $d_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$, где d_0, α_0 – постоянные из (19), (20).

Далее, перейдем от (73) к трехмерной релаксационной системе

$$\dot{x} = f_1(x,\mu) + y\Delta(y)f_2(x), \quad \varepsilon\, \dot{y} = g(x) - h(y), \tag{74}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, а функции $f_2(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$, $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $h(y) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\Delta(y) \in C^\infty(\mathbb{R})$ удовлетворяют серии специальных ограничений.

Начнем с функций $g(x)$, $h(y)$. Предположим, что, во-первых, $g(x) > 0\ \forall\, x \neq 0$, $g(0) = 0$; во-вторых, при любом фиксированном $z > 0$ уравнение $g(x) = z$ определяет в $\mathbb{R}^2$ замкнутую кривую класса C^∞, гомеоморфную окружности; в-третьих, найдется такое $y = y_* > 0$, что $h'(y) > 0$ при $y < y_*$, $h'(y) < 0$ при $y > y_*$, $h'(y_*) = 0$, $h''(y_*) < 0$, $h(y_*) = z_* > 0$; в-четвертых, имеет место равенство $h(0) = 0$, а при $y \to +\infty$ справедливо асимптотическое разложение

$$h(y) = z_{**} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{y^k}, \quad z_{**} \in (0, z_*), \tag{75}$$

сохраняющее силу при дифференцировании по y любое число раз. Считаем еще, что кривая $l_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : g(x) = z_*\}$ окружает цикл L_0 и не имеет контактов с траекториями системы (73) при $\mu = 0$, т.е.

$$(\operatorname{grad} g(x), f_1(x,0)) > 0 \quad \forall\, x \in l_1. \tag{76}$$

Наглядное представление о свойствах функции $z = h(y)$ дает ее график, показанный на рис. 8. Что же касается поверхности медленных движений $\Gamma = \{(x,y) : g(x) - h(y) = 0\}$, то она имеет вид, представленный на рис. 1.

Действительно, обозначим через $y = y_1(z)$ и $y = y_2(z)$ корни уравнений $h(y) = z$ при $z \in (-\infty, z_*]$ и $h(y) = z$ при $z \in (z_{**}, z_*]$ из промежутков $(-\infty, y_*]$ и $[y_*, +\infty)$ соответственно (существование этих корней вытекает из условий, наложенных на функцию $h(y)$). Далее, нетрудно увидеть, что в нашем случае поверхность Γ разбивается на части $\Gamma_- \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_+$, где

$$\begin{gathered} \Gamma_- = \{(x,y) :\ y = \Phi_-(x),\ x \in \Omega_1\}, \quad \Gamma_+ = \{(x,y) :\ y = \Phi_+(x),\ x \in \Omega_2\}, \\ \Gamma_0 = \{(x,y) :\ y = y_*,\ x \in l_1\}, \end{gathered} \tag{77}$$

$$\Phi_-(x) = y_1(z)|_{z=g(x)}, \quad \Phi_+(x) = y_2(z)|_{z=g(x)}. \tag{78}$$

Добавим еще, что в (77) через $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ обозначена внутренняя область, ограниченная фигурирующей в (76) простой замкнутой кривой l_1, а $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ представляет собой кольцевую область, ограниченную кривой l_1 и простой замкнутой кривой $l_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : g(x) = z_{**}\} \subset \Omega_1$, где z_{**} – постоянная из (75). Заметим также, что поскольку $y_2(z) \to +\infty$ при $z \to z_{**} + 0$, то в силу (78) выполняется и требуемое предельное равенство $\lim \Phi_+(x) = +\infty$ при $x \to l_2$, $x \in \Omega_2$.

В случае функции $f_2(x)$ ситуация следующая. Рассмотрим вспомогательную систему

$$\dot{x} = f_2(x) \tag{79}$$

и предположим, что для нее справедлив аналог условия 4. Иными словами, будем считать, что все траектории системы (79) с начальными условиями из l_1 за конечное время попадают на кривую l_2 и не имеют контактов с этой кривой. Тогда, как мы уже знаем, в некоторой достаточно малой окрестности l_1 определен диффеоморфизм Π_0. Точнее говоря, он задается формулой (12), в которой теперь $x(t, x_0)$ – решение задачи Коши $\dot{x} = f_2(x)$, $x|_{t=0} = x_0$, а $t = t_{**}(x_0)$ – единственный положительный корень уравнения

$$a(t, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^t [g(x(\theta, x_0)) - z_{**}] d\theta = 0.$$

Далее, рассмотрим кривую $l_3 = \Pi_0(l_1)$ и будем считать, что она лежит в области, ограничиваемой циклом L_0, но не содержит особую точку $x = \overline{x}$ (см. рис. 3 или рис. 7).

Заключительная часть ограничений касается функции $\Delta(y)$. Предполагаем, что $\Delta(y) \equiv 0$ при $0 \le y \le y_*$, $\Delta(y) \equiv 1$ при $y \ge y_* + 1$. В этом случае система (8) совпадает с (73), а разложение (3) состоит из одного слагаемого $y f_2(x)$.

Суммируя вышесказанное, приходим к выводу, что система (74) заведомо удовлетворяет всем условиям 1 – 6 (в условии 5 мы объединяем два варианта взаимного расположения точки $x = \overline{x}$ и кривой l_3). Таким образом, установлено, что любая система на плоскости с седло-узловой бифуркацией цикла может быть достроена по описанным выше правилам до трехмерной релаксационной системы, к которой применим наш основной результат – теорема 1.

В заключение рассмотрим вопрос о перенесении полученных результатов на многомерный вариант системы (1), когда $x \in \mathbb{R}^m$, $m \ge 3$, $y \in \mathbb{R}$, а условия 1 – 6 надлежащим образом модифицированы. Точнее говоря, условия 1 – 3 здесь сохраняются практически дословно. Однако теперь в соответствующих равенствах

$$\begin{gathered} \Gamma_- = \{(x, y) : \ y = \Phi_-(x), \ x \in \Omega_1\}, \quad \Gamma_+ = \{(x, y) : \ y = \Phi_+(x), \ x \in \Omega_2\}, \\ \Gamma_0 = \{(x, y) : \ y = \Phi_-(x) = \Phi_+(x), \ x \in l_1\} \end{gathered} \tag{80}$$

множество Ω_1 представляет собой внутреннюю область, ограниченную замкнутой $(m-1)$-мерной поверхностью l_1 класса C^∞, а Ω_2 является кольцевой областью, ограниченной поверхностью l_1 и замкнутой $(m-1)$-мерной поверхностью $l_2 \subset \Omega_1$ класса C^∞. Считаем, что поверхности l_1 и l_2 гомеоморфны сфере, а функция $\Phi_+(x)$ из (80) такова, что $\lim \Phi_+(x) = +\infty$ при $x \to l_2$, $x \in \Omega_2$.

Условия 4 и 5 в отличие от трех предыдущих нуждаются в более существенной переработке. А именно, считаем, что в области Ω_1 система (8) при $\mu = 0$ по-прежнему имеет цикл L_0 типа простой седло-узел. Далее, предполагаем, что траектории данной системы с начальными условиями, лежащими на неустойчивом двумерном многообразии $W^u(L_0)$ указанного цикла, с течением времени попадают на поверхность l_1. А так как в силу второго неравенства из (2) эти траектории не имеют контактов с l_1, то множество $W^u(L_0) \cap l_1$ представляет собой простую замкнутую кривую $\mathcal{C}_1$ класса C^∞.

Группу ограничений, касающихся системы (5), не только в многомерном случае, но даже и при $m = 2$, можно несколько ослабить. Пожертвовав некоторой геометрической наглядностью и отказавшись от неравенства вида (6), будем считать, для любого $x_0 \in \mathcal{C}_1$ функция (9) имеет корень $t = t_{**}(x_0) > 0$, удовлетворяющий требованиям (13). Эти свойства, в свою очередь, позволяют в некоторой достаточно малой окрестности кривой $\mathcal{C}_1$ корректно определить оператор (12).

Следующее ограничение касается поведения траекторий системы (8) при $\mu = 0$ с начальными условиями на кривой $\mathcal{C}_2 = \Pi_0(\mathcal{C}_1)$, где Π_0 – диффеоморфизм (12). Будем считать, что все эти траектории при $t \to +\infty$ стремятся к циклу L_0, касаясь его двумерного экспоненциально устойчивого центрального многообразия $W^c(L_0)$.

Для того чтобы сформулировать аналог условия 6, введем в рассмотрение экспоненциально устойчивое двумерное инвариантное многообразие W_μ системы (8), являющееся продолжением по μ многообразия $W^c(L_0)$, о котором говорилось выше. Далее, рассмотрим двумерную систему, представляющую собой сужение (8) на W_μ, и определим для нее аналогичное (18) отображение последования Пуанкаре. Как и прежде, предполагаем, что в тейлоровском разложении (19) этого отображения коэффициент d_0 строго положителен и выполняется неравенство вида (20).

Из проделанных в разделах 2, 3 построений, сохраняющих силу и в многомерном случае, вытекает, что при $x \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 3$ за аттракторы системы (1), (30) отвечает аналогичное (62) отображение

$$\Pi(\varepsilon,\nu): \begin{aligned} &\psi \to c_*(\varepsilon,\nu)/\sqrt{\nu} + \gamma(\psi) + \Lambda_1(\psi, v_1, v_2, \varepsilon, \nu) \pmod{2\pi}, \\ &v_1 \to \Lambda_2(\psi, v_1, v_2, \varepsilon, \nu) \exp\left(-\frac{c_{**}}{\varepsilon\sqrt{\nu}}\right), \\ &v_2 \to \Lambda_3(\psi, v_1, v_2, \varepsilon, \nu) \exp\left(-\frac{c_{***}}{\sqrt{\nu}}\right), \end{aligned} \tag{81}$$

определенное в некотором кольце

$$K = \{(\psi, v_1, v_2): \ 0 \leq \psi \leq 2\pi \pmod{2\pi}, \ |v_1| \leq v_{0,1}, \ ||v_2|| \leq v_{0,2}\}. \tag{82}$$

Здесь $v_1 \in \mathbb{R}$, $v_2 \in \mathbb{R}^{m-2}$, $||*||$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^{m-2}$, постоянные $v_{0,1}, v_{0,2} > 0$ достаточно малы, функция $c_*(\varepsilon,\nu)$ обладает теми же свойствами, что и аналогичная функция в (62), $c_{**}, c_{***} = \text{const} > 0$. Что же касается функций Λ_j, $j = 1,2,3$, то они непрерывны по совокупности переменных (вплоть до значений $\varepsilon = 0$, $\nu = 0$) вместе со своими частными производными по (ψ, v_1, v_2) до порядка k включительно (k – любое наперед заданное натуральное число). И наконец, следует добавить, что $\Lambda_1(\psi, v_1, 0, 0, 0) \equiv 0$.

Как и в случае $m = 2$, за аттракторы отображения (81) в кольце (82) отвечает в конечном итоге одномерное отображение окружности в себя вида (64). В свою очередь, фигурирующая в нем функция $\gamma(\psi) \in C^\infty$ допускает представление

$$\gamma(\psi) = n_0\psi + \gamma_0(\psi), \quad \gamma_0(\psi + 2\pi) \equiv \gamma_0(\psi), \tag{83}$$

где $n_0 \in \mathbb{Z}$ – некоторый топологический инвариант.

При $m = 2$ в формуле (83) возможны лишь случаи $n_0 = 0$ и $n_0 = 1$. В первом из них кривая l_3 не окружает особую точку $x = \overline{x}$ (см. рис. 3), а во втором окружает (см. рис. 7). Выше для каждого из этих случаев были получены свои результаты (см. теоремы 2 – 4). Данные результаты сохраняются, естественно, и при $m \geq 3$. Однако уже при $m = 3$ возможна принципиально новая ситуация, когда

$$|n_0| \geq 2, \quad |n_0 + \gamma_0'(\psi)| > 1 \;\; \forall\, \psi \in [0, 2\pi]. \tag{84}$$

Из содержащихся в [1] построений следует, что при условиях (84) отображение (81) имеет в кольце (82) хаотический гиперболический аттрактор типа соленоида Смейла–Вильямса.

Список литературы

1. *Тураев Д. В., Шильников Л. П.* О катастрофах голубого неба // ДАН. 1995. Т. 342. № 5. С. 596–599. [English transl.: *Turaev D.V., Shilnikov L.P.* Blue sky catastrophes // Dokl. Math. 1995. V. 51. P. 404–407.

2. *Shilnikov A., Shilnikov L., Turaev D.* Blue sky catastrophe in singularly-perturbed systems. Preprint WIAS. № 841. Berlin, 2003.

3. *Shilnikov A., Shilnikov L., Turaev D.* Blue-sky catastrophe in singularly perturbed systems // Moscow Mathematical Journal. 2005. V. 5. № 1. P. 269–282.

4. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Катастрофа голубого неба в релаксационных системах с одной быстрой и двумя медленными переменными // Диф. уравн. 2008. Т. 44. № 2. С. 158–171. [English transl.: *Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Blue Sky Catastrophe in Relaxation Systems with One Fast and Two Slow Variables // Differential Equations. 2008. V. 44, No. 2. P. 161–175.]

5. *Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М: Наука, 1975. [English transl.: *Mishchenko E. F., Rozov N. Kh.* Differential equations with small parameters and relaxation oscillations. New York: Plenum Press, 1980.]

6. *Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995. [English transl.: *Mishchenko E. F., Kolesov Yu. S., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Asymptotic methods in singularly perturbed systems. New York: Consult. Bureau, Plenum Publ. Corp., 1994.]

7. *Аносов Д. В.* О предельных циклах систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных // Матем. сб. 1960. Т. 50. № 3. С. 299–334. [English transl.: *Anosov D.V.* On limit cycles in systems of differential equations with a small parameter in the highest derivatives // AMS Translations. 1963. V. 33. Ser. 2. P. 233–275].

8. *Стрыгин В. В., Соболев В. А.* Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988. [*Strygin V. V., Sobolev V. A.* Razdeleniye dvizheniy metodom integral'nykh mnogoobraziy. M.: Nauka, 1988 (in Russian).]

9. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Разделение движений в окрестности полуустойчивого цикла // Диф. уравн. 2007. Т. 43. № 5. С. 598–615. [English transl.: *Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Separation of Motions in a Neighborhood of a Semistable Cycle // Differential Equations. 2007. V. 43, No. 5. P. 613–630.]

10. *Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. [English transl.: *Shilnikov L., Shilnikov A., Turaev D., and Chua L.* Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I , Singapore: World Scientific, 1998.]

11. *Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М.: Физматлит, 2004. [*Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Invariantnyye tory nelineynykh volnovykh uravneniy. M.: Fizmatlit, 2004 (in Russian).]

Blue Sky Catastrophe in Systems with Non-classical Relaxation Oscillations

Glyzin S. D.[*,**], Kolesov A. Yu.[*], Rozov N. Kh.[***]

[*] *P.G. Demidov Yaroslavl State University,*
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia
[**] *Scientific Center in Chernogolovka RAS*
Lesnaya str., 9, Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia
[***] *M.V. Lomonosov Moscow State University,*
Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia

Keywords: singularly perturbed system, relaxation cycle, asymptotic behavior, stability, blue sky catastrophe, non-classical relaxation oscillations

The feasibility of a known blue-sky bifurcation in a class of three-dimensional singularly perturbed systems of ordinary differential equations with one fast and two slow variables is studied. A characteristic property of the considered systems is that they permit so-called nonclassic relaxation oscillations, that is, oscillations with slow components asymptotically close to time-discontinuous functions and a δ-like fast component. Cases when blue-sky bifurcation leads to a relaxation cycle or stable two-dimensional torus are analyzed. Also the question of homoclinic structure emergence is considered.

Сведения об авторах:
Глызин Сергей Дмитриевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей;
Отдел прикладных сетевых исследований НЦЧ РАН,
ведущий научный сотрудник;
Колесов Андрей Юрьевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений
Розов Николай Христович,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
д-р физ.-мат. наук, профессор, член-корреспондент РАЕН, декан факультета педагогического образования