Модел. и анализ информ. систем. Т. **22**, № **1** (2015) 65–73
©*Глазков Д. В.,* 2014

УДК 517.929

Локальная динамика уравнения второго порядка с большим экспоненциально распределенным запаздыванием и существенным трением

Глазков Д. В.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: glazkov_ d@mail.ru

получена 15 мая 2014

Ключевые слова: локальная динамика, запаздывание, нормальная форма, асимптотическая формула, малый параметр

Изучается локальная динамика нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с большим экспоненциально распределенным запаздыванием в окрестности нулевого решения при условии $\gamma>\sqrt{2}$. Параметр γ можно интерпретировать как коэффициент трения. Найдены значения параметров, при которых реализуются критические случаи в задаче об устойчивости. Показано, что характеристическое уравнение для определения устойчивости нулевого решения может иметь сколь угодно много корней в окрестности мнимой оси. Тем самым реализуется критический случай бесконечной размерности. Построены аналоги нормальных форм, описывающие локальную динамику исходного уравнения. Сформулированы результаты о соответствии решений полученных уравнений в частных производных и уравнения второго порядка с большим экспоненциально распределенным запаздыванием. Полученные в работе асимптотические формулы позволяют явно находить характеристики близких к нулю локальных режимов исходной задачи, а также определять области параметров и начальных условий, в которых возможно возникновение решения некоторого заданного вида.

Введение

Многие прикладные задачи могут быть адекватно описаны на языке дифференциальных уравнений с запаздыванием [1–3]. Такие уравнения сложны для исследования, поскольку размерность фазового пространства не ограничена, что ведет к возникновению специфических эффектов. Существенными особенностями некоторых задач являются относительно большие типичные значения времени задержки или зависимость текущего состояния системы не от одного предшествующего состояния («точечное» запаздывание), а от всей предыстории или всех состояний системы на определенном отрезке времени (распределенное запаздывание [4, 5]).

В работе рассматриваются уравнения второго порядка с распределенным запаздыванием. В наиболее общем случае они представимы в виде

$$\ddot{x} + F(\dot{x}, x) = a \int_{-T}^{0} \Phi(x(t+s), s)ds\,.$$

Здесь $x{=}x(t)$ – скалярная функция, $T{>}0$ – параметр запаздывания, F и Φ – некоторые вещественнозначные функции. Параметр a характеризует степень влияния слагаемого с задержкой на динамику системы. Изучение ее свойств удобно начинать со случая $a{=}0$, который сводится к анализу решений ОДУ второго порядка. Состояния равновесия, предельные циклы или гомоклинические траектории при этом являются возможными особыми траекториями. Решение задачи об их устойчивости по Ляпунову при $a{=}0$ не представляет затруднений, однако качественные изменения локальной (или даже глобальной для гомоклинических кривых) динамики уравнения при изменении значений a требуют использования более сложных средств анализа. Целью работы и является изучение решений в малой окрестности особых траекторий вырожденного уравнения при значениях a, близких к критическим в задаче об устойчивости таких особых траекторий. Наиболее содержательным оказывается случай, отвечающий асимптотически большим значениям параметра T, при которых в определенных условиях (в частности, некоторых значениях a) может быть реализована ситуация, когда любое наперед заданное число корней характеристического уравнения оказывается в малой окрестности мнимой оси (или единичной окружности в зависимости от выбранной параметризации). Задачи подобного типа рассматривались ранее в [4–10]. Однако уравнение второго порядка с экспоненциально распределенным запаздыванием, изучаемое в данной работе, насколько известно автору, до настоящего времени никем не исследовалось. Таким образом, данная статья является естественным продолжением большого цикла работ и опирается на полученные в них результаты.

1. Постановка задачи

Уточним вид функций F и Φ. Именно, далее будем рассматривать уравнение, которое допустимо отнести к маятниковым и которое содержит слагаемое с экспоненциально распределенным на промежутке $[t{-}T, t]$ запаздыванием [5]:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + x = a \int_{-T}^{0} \delta e^{-\delta(T+s)} x(t+s)ds + f(x)\,. \tag{1}$$

Часть величин в уравнении (1) упоминалась выше. Отметим, что $f(x)$ – достаточно гладкая функция, имеющая в нуле порядок выше первого так, что $f(0){=}f'(0){=}0$, то есть в окрестности нуля

$$f(x) = f_2x^2 + f_3x^3 + \ldots$$

Параметр $\gamma{\geq}0$ можно интерпретировать как коэффициент трения, который при $\gamma{>}\sqrt{2}$ будем называть существенным, $\delta{>}0$ характеризует функцию распределения.

Заметим, что интегральное слагаемое в (1) может быть записано в форме

$$\int\limits_{-T}^{0} \Phi(x(t+s),s)\,ds = \int\limits_{-T}^{0} x(t+s)\,dr(s), \qquad \text{где} \qquad \frac{dr}{ds} = \delta e^{-\delta(T+s)}.$$

В частности, при $\delta\to\infty$ эта функция стремится к дельта-функции, а интегральное слагаемое приближается к величине $ax(t-T)$, у которой запаздывание сконцентрировано в одной точке.

Далее будем считать величину T достаточно большой и представим ее как $T=\varepsilon^{-1}$, где ε – малый положительный параметр. Тогда заменой времени $t\varepsilon^{-1}\to t$ уравнение (1) приводится к виду

$$\varepsilon^3\ddot{x} + \varepsilon^2\gamma\dot{x} + \varepsilon x = a\delta \int\limits_{-1}^{0} e^{-\delta\varepsilon^{-1}(1+s)}x(t+s)ds + \varepsilon f(x)\,. \tag{2}$$

Тем самым вместо соотношения, которое содержит слагаемое с большой задержкой, получаем сингулярно возмущенное уравнение с малыми параметрами при производных по времени, нормированном к промежутку запаздывания.

Поставим задачу исследования локальной динамики (2) в малой окрестности нулевого решения, используя идеи метода нормальных форм. При этом будем предполагать, что $\gamma>\sqrt{2}$.

2. Линейный анализ

Линеаризуя (2) в нуле, получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\varepsilon^3\lambda^2 + \varepsilon^2\gamma\lambda + \varepsilon = a\delta\exp(-\delta\varepsilon^{-1}[1-e^{\delta\varepsilon^{-1}-\lambda}]/(\lambda-\delta\varepsilon^{-1}))\,. \tag{3}$$

Отметим, что при достаточно малых ε равенство $\lambda=\delta\varepsilon^{-1}$ невозможно. Поэтому при $a=0$ и $\gamma>0$ имеем $Re\lambda<0$.

Лемма. *Пусть $|a|<1$. Тогда найдется такое $M>0$, что при всех достаточно малых ϵ для корней (3) выполнено неравенство $Re\lambda<-M$. При этом нулевое решение асимптотически устойчиво, все решения из его достаточно малой окрестности, не зависящей от ε, стремятся к нулю.*

Пусть $|a|>1$. Тогда найдется такое $M>0$, что для каждого достаточно малого ϵ существует корень уравнения (3) $\lambda(\varepsilon)$ такой, что $Re\lambda>M$. В этом случае нулевое решение (2) асимптотически устойчиво, и в некоторой его окрестности нет устойчивых режимов.

Если $|a|=1$, то существует сколь угодно большое число корней (3), стремящихся к мнимой оси при $\varepsilon\to 0$.

Рассмотрим далее обе возможные ситуации

$$a = 1+\mu \qquad \text{и} \qquad a = -(1+\mu), \qquad |\mu| = o(1).$$

Содержательные результаты получаются в предположении, что μ имеет порядок ε^p, где $0<p\leq 2$.

В случае $p{=}2$ асимптотическое представление корней (3), вещественная часть которых близка к нулю при малых ε, в ситуации, когда a близко к $+1$, следующее:

$$\lambda_n(\varepsilon) = i2n\pi(1{+}\varepsilon\alpha_1{+}\varepsilon^2\alpha_2) + \alpha(n)\varepsilon^2 + a_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \tag{4}$$

а в ситуации, когда a близко к -1, имеет вид

$$\lambda_n(\varepsilon) = i(2n{+}1)\pi(1{+}\varepsilon\beta_1{+}\varepsilon^2\beta_2) + \beta(n)\varepsilon^2 + b_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \tag{5}$$

В случае $0{<}p{<}2$ при $a = 1{+}\varepsilon^p a_1$ разложение корней (3), близких к мнимой оси, таково:

$$\lambda_n(\varepsilon) = i2n(\varepsilon^{p/2-1}\omega{+}\theta(\varepsilon){+}\varepsilon^{p/2}\alpha_1\pi{+}\varepsilon^p\alpha_2\pi) + \alpha(n)\varepsilon^p + a_p\varepsilon^p + o(\varepsilon^p), \tag{6}$$

а в ситуации, когда $a = -(1{+}\varepsilon^p a_1)$, следующее:

$$\lambda_n(\varepsilon) = i(2n{+}1)(\varepsilon^{p/2-1}\omega{+}\theta(\varepsilon){+}\varepsilon^{p/2}\beta_1\pi{+}\varepsilon^p\beta_2\pi) + \beta(n)\varepsilon^p + b_p\varepsilon^p + o(\varepsilon^p). \tag{7}$$

Здесь величина $\theta(\varepsilon)$ дополняет $\varepsilon^{p/2-1}\omega$ до четно кратного π в (6) и нечетно кратного π в (7). Отметим, что $p/2{-}1{<}0$, то есть первое слагаемое в разложениях (6), (7) является большим по модулю, но при этом чисто мнимым и $\exp(in(\varepsilon^{p/2-1}\omega{+}\theta(\varepsilon))){=}1$ в (6) и -1 в (7). Коэффициенты в других слагаемых в разложениях (4), (5), (6), (7) после подстановки в (3) определяются следующим образом:

$$\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1{-}\gamma\delta}{\delta}, \qquad \alpha_2 = \beta_2 = \left(\frac{1{-}\gamma\delta}{\delta}\right)^2;$$

$$\alpha(n) = -(2n\pi)^2\frac{1{+}(\gamma^2{-}2)\delta^2}{2\delta^2}, \qquad \beta(n) = -((2n{+}1)\pi)^2\frac{1{+}(\gamma^2{-}2)\delta^2}{2\delta^2}.$$

Заметим, что в случае $\gamma{>}\sqrt{2}$

$$\frac{1{+}(\gamma^2{-}2)\delta^2}{2\delta^2} > 0 \qquad \text{а} \qquad \alpha(n) \le 0, \quad \beta(n) < 0$$

при любых целых n.

Отдельно укажем, что

$$a_2 = b_2 = a_p = b_p = a_1,$$

то есть при выполнении определенных условий за счет выбора a_1 при фиксированных значениях прочих параметров можно добиться перемещения некоторого наперед заданного количества корней $\lambda_n(\varepsilon)$ характеристического уравнения (3) из левой комплексной полуплоскости в правую.

В завершение подчеркнем, что уравнение (3) имеет лишь четное число корней, несмотря на зависимость формул (6), (7) от непрерывного параметра ω. При $\varepsilon{\to}0$ за счет разрывной функции $\theta(\varepsilon)$ происходит «перескок» из окрестности одного корня в окрестность другого. Таким образом, модуль каждого корня $\lambda_n(\varepsilon)$ неограниченно растет при $\varepsilon{\to}0$. Выбор величины ω влияет лишь на скорость указанного перехода между корнями.

Таким образом, все коэффициенты в первых членах разложений (4), (5), (6), (7) определены, и линейный анализ устойчивости нулевого решения (2) тем самым выполнен.

3. Нелинейный анализ

В случае p=2 в соответствии с методом, изложенным в [6–9], решение задачи (2) представим в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра в предположении $\tau = \varepsilon^2 t$. В случае, когда a близко к $+1$, этот ряд имеет вид

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon^2 u(\tau, r) + \varepsilon^4 u_2(\tau, r) + \dots, \tag{8}$$

где

$$r = (1+\varepsilon\alpha_1+\varepsilon^2\alpha_2)\, t = \sigma(\varepsilon)\, t,$$

а в случае, когда a близко к -1,

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon u(\tau, r) + \varepsilon^2 u_2(\tau, r) + \varepsilon^3 u_3(\tau, r) + \dots, \tag{9}$$

где

$$r = (1+\varepsilon\beta_1+\varepsilon^2\beta_2)\, t = \sigma(\varepsilon)\, t.$$

В силу α_j=β_j правомерно использовать здесь то же обозначение $\sigma(\varepsilon)$, что и ранее. Функция u представима в виде (a близко к -1)

$$u(\tau, r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n(\tau)\, e^{i\pi(2n+1)r} \qquad \text{так, что} \qquad u(\tau, r+1) = -u(\tau, r),$$

или (a близко к $+1$)

$$u(\tau, r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n(\tau)\, e^{i2\pi n r} \qquad \text{так, что} \qquad u(\tau, r+1) = u(\tau, r).$$

Функции u_j, j=$2, 3, \dots$ являются периодическими по r.

Выполнив стандартные преобразования в случае $a = 1+\varepsilon^2 a_1$, из условия разрешимости задачи относительно u_2 в качестве нормальной формы получаем параболическое уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1+(\gamma^2-2)\delta^2}{2\delta^2}\, \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + f_2 u^2, \tag{10}$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(\tau, r+1) = u(\tau, r)\,. \tag{11}$$

Справедлива

Теорема 1. *Пусть краевая задача (10)–(11) имеет решение u=$u_*(\tau, r)$. Тогда уравнение (2) при $a = 1+\varepsilon^2 a_1$ имеет быстро осциллирующее асимптотическое по невязке решение*

$$x_*(t) = \varepsilon^2 u_*\big(\varepsilon^2 t, \sigma(\varepsilon) t\big) + o(\varepsilon^2). \tag{12}$$

Доказательство этого утверждения основано на технике работы с асимптотическими рядами, предлагаемой и используемой в [4–9], а также цитируемых там

источниках. Подстановка (8) в (2) и выделение слагаемых одного порядка по малому параметру ε приводит при рассмотрении слагаемых порядка ε^2 к указанной задаче в частных производных. Аналогичным образом выполняется обоснование всех последущих теорем.

Возможно, в данном случае имеет место следующее

Утверждение. *Пусть краевая задача (10)–(11) имеет состояние равновесия $u{=}u_0(r)$, у которого только один мультипликатор равен по модулю* 1. *Тогда при малых ε уравнение (2) имеет периодическое решение вида (12) той же устойчивости, что и $u_0(r)$.*

Это утверждение аналогично теореме 2 из [5], доказательство которой там не приводится и никак не комментируется, но, по-видимому, в общих чертах оно повторяет схему доказательства подобного результата (теоремы 2–5) в [7].

В случае $a = -(1{+}\varepsilon^2 a_1)$ на третьем шаге из условия разрешимости задачи относительно u_3 в качестве нормальной формы получаем параболическое уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1{+}(\gamma^2{-}2)\delta^2}{2\delta^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + (f_2^2{+}f_3)u^3, \tag{13}$$

с антипериодическими краевыми условиями

$$u(\tau, r{+}1) = -u(\tau, r)\,. \tag{14}$$

Теорема 2. *Пусть краевая задача (13)–(14) имеет решение $u{=}u_*(\tau, r)$. Тогда уравнение (2) при $a = -(1{+}\varepsilon^2 a_1)$ имеет быстро осциллирующее асимптотическое по невязке решение*

$$x_*(t) = \varepsilon u_*\big(\varepsilon^2 t, \sigma(\varepsilon)t\big) + o(\varepsilon). \tag{15}$$

Рассмотрим далее случай, когда надкритичность μ имеет порядок ε^p, где $0{<}p{<}2$. Замены, аналогичные (8), (9), имеют вид

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon^p u(\tau, r) + \varepsilon^{2p} u_2(\tau, r) + \ldots, \tag{16}$$

где

$$r = (\varepsilon^{p/2-1}\omega{+}\theta(\varepsilon){+}\varepsilon^{p/2}\alpha_1{+}o(\varepsilon^{p/2}))\,t = \sigma_p(\varepsilon)\,t,$$

а в случае, когда a близко к -1

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon^{p/2} u(\tau, r) + \varepsilon^p u_2(\tau, r) + \varepsilon^{3p/2} u_3(\tau, r) + \ldots, \tag{17}$$

где

$$r = (\varepsilon^{p/2-1}\omega{+}\theta(\varepsilon){+}\varepsilon^{p/2}\beta_1{+}o(\varepsilon^{p/2}))\,t = \sigma_p(\varepsilon)\,t.$$

Здесь время τ, параметры α_1 и β_1 те же, что и ранее. Функция u представима в виде (a близко к -1)

$$u(\tau, r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n(\tau)\, e^{i(2n+1)r} \qquad \text{так, что} \qquad u(\tau, r{+}\pi) = -u(\tau, r),$$

или (a близко к $+1$)

$$u(\tau,r)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n(\tau)\,e^{i2nr}\qquad\text{так, что}\qquad u(\tau,r{+}\pi)=u(\tau,r).$$

Функции u_2 и u_3 являются периодическими по r.

В результате стандартных преобразований в случае $a=1{+}\varepsilon^p a_1$, из условия разрешимости уравнения относительно u_2 в качестве нормальной формы получаем краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=\omega^2\frac{1{+}(\gamma^2{-}2)\delta^2}{2\delta^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+a_1u+f_2u^2, \tag{18}$$

$$u(\tau,r{+}\pi)=u(\tau,r)\,. \tag{19}$$

Теорема 3. *Пусть при некотором $\omega{>}0$ краевая задача (18)–(19) имеет определенное при всех $\tau{\geq}0$ ограниченное решение $u{=}u_*(\tau,r)$. Тогда уравнение (2) при $a=1{+}\varepsilon^p a_1$ имеет асимптотическое по невязке при $t{\geq}0$ решение*

$$x_*(t)=\varepsilon^p u_*\big(\varepsilon^2 t,\sigma_p(\varepsilon)t\big)+o(\varepsilon^p). \tag{20}$$

В случае $a=-(1{+}\varepsilon^p a_1)$ из условия разрешимости уравнения относительно u_3 в качестве нормальной формы получаем краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=\omega^2\frac{1{+}(\gamma^2{-}2)\delta^2}{2\delta^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+a_1u+(f_2^2{+}f_3)u^3, \tag{21}$$

$$u(\tau,r{+}\pi)=-u(\tau,r)\,. \tag{22}$$

Теорема 4. *Пусть при некотором $\omega{>}0$ краевая задача (21)–(22) имеет определенное при всех $\tau{\geq}0$ ограниченное решение $u{=}u_*(\tau,r)$. Тогда уравнение (2) при $a=-(1{+}\varepsilon^p a_1)$ имеет асимптотическое по невязке при $t{\geq}0$ решение*

$$x_*(t)=\varepsilon^{p/2} u_*\big(\varepsilon^2 t,\sigma_p(\varepsilon)t\big)+o(\varepsilon^{p/2}). \tag{23}$$

Отметим, что в уравнениях (10), (13), (18), (21) величина

$$\frac{1{+}(\gamma^2{-}2)\delta^2}{2\delta^2}\to\frac{\gamma^2{-}2}{2}\qquad\text{при}\qquad\delta\to\infty.$$

Это означает, что в случае обычного «точечного» запаздывания при $\delta{\to}\infty$ полученные соотношения (10), (13) перейдут в соответствующие параболические уравнения из [8].

Заключение

Выводы о существовании сколь угодно большого числа периодических решений уравнения с большим экспоненциально распределенным запаздыванием в малой окрестности нулевого состояния равновесия при $\varepsilon{\to}0$, сделанные в работе [5], аналогичным образом получаются и в рассматриваемой задаче при $a=-(1{+}\varepsilon^p a_1)$, где

$0<p<2$. В самом деле, краевая задача (21)–(22) имеет такую же структуру, что и квазинормальная форма в [5] при $a = -(1+\varepsilon^p a_1)$. Это влечет существование постоянных по τ и периодических по r при $f_2^2+f_3>0$ решений (21)–(22) с ненулевым наименьшим периодом, среди которых могут быть устойчивые. Уравнение (2) в случае $\gamma>\sqrt{2}$ допускает существование устойчивых периодических решений, близких к (23).

Кроме того полученные в работе асимптотические формулы позволяют явно находить характеристики близких к нулю локальных режимов исходной задачи, а также определять области параметров и начальных условий, в которых возможно возникновение решения некоторого заданного вида.

Список литературы

1. *Ланда П.С.* Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1983. (*Landa P.S.* Avtokolebaniya v raspredelennyh sistemah. M: Nauka, 1983 [in Russian]).

2. *Kilias T., Kutzer K., Moegel A., Schwarz W.* Electronic chaos generators design and applications // International Journal of Electronics. 1995. Vol. 79, №6. P. 737–753.

3. *Глазков Д.В., Кащенко И.С.* Уравнения динамики лазера. Ярославль: ЯрГУ, 2012. 128 с. (*Glazkov D.V., Kaschenko I.S.* Laser dynamics equations. Yaroslavl: YarSU, 2012. 128 p. [in Russian]).

4. *Кащенко И.С.* Нормализация уравнения с линейно распределенным запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16, №4. С. 109—116. (*Kaschenko I.S.* Normalization of equation with linear distributed delay // Modeling and analysis of information systems. 2011. V. 16, №4. P. 109—116 [in Russian]).

5. *Кащенко И.С.* Локальная динамика уравнения с длительным экспоненциально распределенным запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. 2011. Т. 18, №3. С. 42—49. (*Kaschenko I.S.* Local dynamics of an equation with large exponential distributed delay // Modeling and analysis of information systems. 2011. V. 18, №3. P. 42—49 [in Russian]).

6. *Кащенко С.А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, №8. С. 1448—1451. (*Kashchenko S.A.* Normalization Techniques as Applied to the Investigation of Dynamics of DifferenceDifferential Equations with a Small Parameter Multiplying the Derivative // Differ. Uravn. 1989. V. 25. P. 1448—1451 [in Russian]).

7. *Кащенко С.А.* Асимптотика быстро осциллирующих контрастных пространственных структур // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. Т. 30, №2. С. 254—269. (English transl.: *Kashchenko S.A.* Asymptotic behaviour of rapidly oscillating contrasting spatial structures // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1990. V. 30. №1. P. 186—197).

8. *Кащенко С.А.* Уравнения Гинзбурга–Ландау – нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38, №3. С. 457—465. (English transl.: *Kashchenko S.A.* The Ginzburg–Landau equation

as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1998. V. 38. №3. P. 443—451).

9. *Кащенко С.А.* Локальная динамика нелинейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, №10. С. 1343–1355. (*Kaschenko S.A.* Local dynamics of nonlinear singularly perturbed delay systems // Differ. Uravneniya. 1999. V. 35, №10. P. 1343–1355).

10. *Глазков Д.В.* Локальная динамика уравнения с сильно запаздывающей обратной связью // Моделирование и анализ информационных систем. 2011. Т. 18, №1. С. 75—85. (*Glazkov D.V.* Local dynamics of an equation with long delay feedback // Modeling and analysis of information systems. 2011. V. 18, №1. P. 75—85 [in Russian]).

Local Dynamics of a Second Order Equation with Large Exponentially Distributed Delay and Considerable Friction

Glazkov D. V.

P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: local dynamics, delay, normal form, asymptotic formula, small parameter

We study local dynamics of a nonlinear second order differential equation with a large exponentially distributed delay in the vicinity of the zero solution under the condition $\gamma>\sqrt{2}$. The parameter γ can be interpreted as a friction coefficient. We find such parameter values that critical cases in the stability problem are realized. We show that the characteristic equation for zero solution stability can have arbitrary many roots in the vicinity of imaginary axis. So, the critical case of an infinite dimension is realized. We construct normal forms analogues to describe dynamics of the origin equation. We formulate results about the correspondence of solutions of received PDE and second order DDE with a large exponentially distributed delay. The received asymptotic formulas allow us to evidently find characteristics of origin problem local regimes that are close to the zero solution and also to obtain domains of parameters and initial conditions, where the appearance of any given-type solution is possible.

Сведения об авторе:
Глазков Дмитрий Владимирович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
кандидат физико-математических наук, доцент