

УДК 517.9

О нулях некоторых характеристических квазиполиномов

Глызин Д. С.¹, Кубышкин Е. П., Морякова А. Р.

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14*

e-mail: glyzin@gmail.com, kubysh.e@yandex.ru, alyona_moryakova@mail.ru

получена 20 мая 2014

Ключевые слова: квазиполином, метод D -разбиений, асимптотическое представление

В работе изучается расположение нулей двух характеристических квазиполиномов, возникающих при изучении дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом: первый — при изучении математической модели генератора электромагнитных колебаний с запаздывающей обратной связью, второй — при изучении системы уравнений Ланга–Кобаяши, которая является известной математической моделью квантового генератора. Для квазиполиномов построена картина D -разбиений в пространстве параметров, выявлены возможные критические случаи. Рассмотрен случай большого запаздывания, который важен для приложений. В этом случае для нулей квазиполиномов получены аналитические зависимости от величины, обратной запаздыванию, и построены равномерные асимптотические формулы.

1. Рассмотрим квазиполином вида

$$P_1(\lambda) = \lambda^2 + A\lambda + 1 + k \exp(-\lambda\theta) \quad (\theta > 0) \quad (1)$$

и изучим расположение его нулей на комплексной плоскости. Воспользуемся для этого методом D -разбиений [1], позволяющим построить в плоскости параметров (k, θ) (при различных значениях A) области, связанные с принадлежностью определенного количества нулей квазиполинома (1) правой комплексной полуплоскости. Рассмотрим для этого уравнение $P_1(i\omega) = 0$ ($\omega \geq 0$) и выделим действительную и мнимую части. В результате получим систему уравнений

$$k \cos(\omega\theta) = \omega^2 - 1, \quad k \sin(\omega\theta) = A\omega,$$

из которой находим

¹Работа выполнена при финансовой поддержке проекта 1875 госзадания на НИР №2014/258.

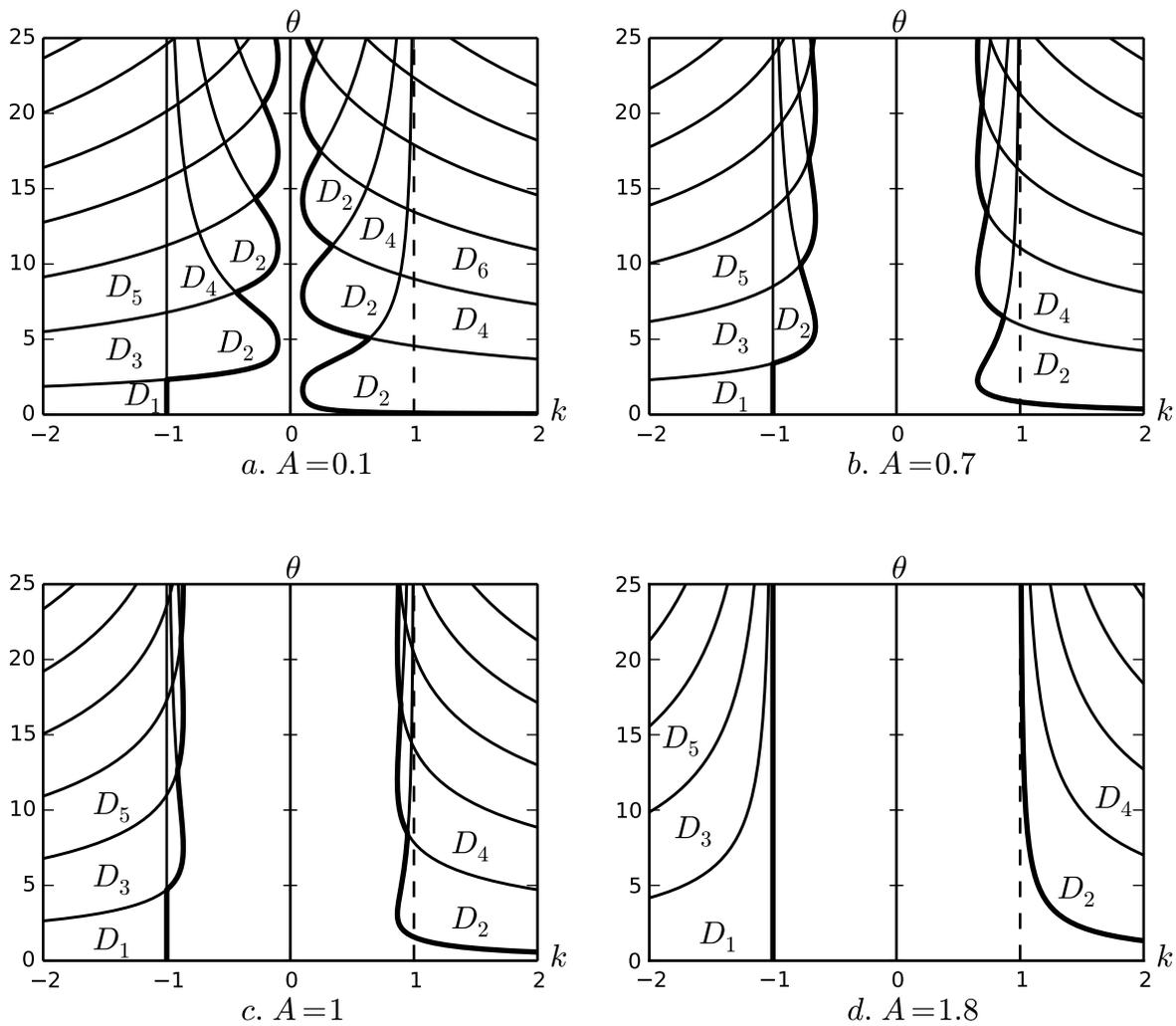


Рис. 1.

$$k_n(\omega) = A\omega / \sin(\omega\theta_n(\omega)), \quad \omega > 0, \quad -\infty < k(\omega) < \infty, \quad (2)$$

$$\theta_n(\omega) = \begin{cases} \omega^{-1}(\operatorname{arctg}(A\omega/(\omega^2 - 1)) + \pi n), & 0 < \omega < 1, \\ -\pi/2 + \pi n, & \omega = 1, \\ \omega^{-1}(\operatorname{arctg}(A\omega/(\omega^2 - 1)) - \pi + \pi n), & 1 < \omega < \infty, \end{cases} \quad (3)$$

$n = 1, 2, \dots$

Рассматривая теперь (2), (3) как функции параметра ω , построим в плоскости (k, ω) кривые, на которых квазиполином (1) имеет нули, лежащие на мнимой оси. При этом точке $\omega = 0$ соответствует прямая $k = -1$. На рис. 1 для различных значений A приведены указанные кривые.

Исследуем движение нулей квазиполинома (1) через мнимую ось комплексной полуплоскости. Выберем для некоторого $A = A_0$ точку (k_0, θ_0) , лежащую на одной из кривых, приведенных на рис. 1. Пусть эта точка соответствует значению $\omega = \omega_0$. Положим в (1) $k = k_0(1 + \varepsilon)$, $0 < \varepsilon \ll 1$ и рассмотрим движение корня $\lambda(\varepsilon) = i\omega_0 + \varepsilon\lambda_1 + \dots$ уравнения $P_1(\lambda, \varepsilon) = \lambda^2 + A_0\lambda + 1 + k_0(1 + \varepsilon)\exp(-\lambda\theta_0) = 0$ при

изменении ε . С необходимостью имеем

$$\lambda_1 = -P_{1\varepsilon}(i\omega_0, 0)/P_{1\lambda}(i\omega_0, 0) = (1 - \omega_0^2 + i\omega_0 A_0)/[A_0 + \theta_0(1 - \omega_0^2) + i\omega_0(A_0\theta_0 + 2)].$$

Отсюда

$$\operatorname{Re} \lambda_1 = \{A_0(\omega_0^2 + 1) + \theta_0[(\omega_0^2 - 1)^2 + \omega_0^2 A_0^2]\} / \{[A_0 + \theta_0(\omega_0^2 - 1)]^2 + \omega_0^2(A_0\theta_0 + 2)^2\} > 0.$$

Таким образом, нули квазиполинома (1) при увеличении $|k|$ переходят из левой комплексной полуплоскости в правую. В соответствии с этим построена картина D -разбиений плоскости (k, θ) , приведенная на рис. 1 для различных значений A , на области, соответствующие различному количеству нулей квазиполинома (1), принадлежащих правой комплексной полуплоскости. Эти области принято называть областями D -разбиений и обозначать D_j , где j характеризует количество нулей, расположенных в правой комплексной полуплоскости. На рис. 1 границы области принадлежности нулей квазиполинома (1) левой комплексной полуплоскости (области устойчивости квазиполинома (1)) отмечены жирной линией. При этом, как следует из рис. 1, в случае $k > 0$ потеря устойчивости может происходить с прохождением через мнимую ось как одной, так и двух пар комплексно сопряженных нулей квазиполинома (1).

В случае $k < 0$ возможна потеря устойчивости квазиполиномом (1), связанная с прохождением одного вещественного нуля через нулевую точку комплексной плоскости, одной пары и двух пар комплексно сопряженных нулей через мнимую ось комплексной плоскости, а также возможно совместное прохождение вещественного нуля и одной пары комплексно сопряженных нулей через нулевую точку и мнимую ось. Случай совместного прохождения вещественного нуля и двух пар комплексно сопряженных нулей через нулевую точку и мнимую ось невозможен.

Как оказалось, при прохождении через мнимую ось двух пар чисто мнимых нулей $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ ($0 < \omega_1 < \omega_2$) невозможен «внутренний резонанс» $\omega_1/\omega_2 = 1/2, 1/3$. Легко получить противоречие, если предположить противное и подставить в (1) соответственно $i\omega_1 = i\omega, i\omega_2 = 2i\omega$, а также $i\omega_1 = i\omega, i\omega_2 = 3i\omega$.

Отметим, что квазиполином вида (1) рассматривался в работе [4], где построена граница области неустойчивости в пространстве параметров, аналогичная случаю, приведенному на рис. 1 а, и показана возможность прохождения двух пар комплексно сопряженных нулей через мнимую ось. В монографии [7] для квазиполинома (1) построена асимптотика нулей при $|\lambda| \rightarrow \infty$.

В некоторых задачах представляет интерес характер поведения нулей квазиполинома (1) при больших значениях θ , а также их зависимость от этой величины. Для удобства обозначим $\varepsilon_1 = \theta^{-1}$ и нормируем $\lambda \rightarrow \lambda\varepsilon_1$. В результате квазиполином (1) примет вид

$$P_1(\lambda, \varepsilon_1) = \varepsilon_1^2 \lambda^2 + \varepsilon_1 A \lambda + 1 + k \exp(-\lambda). \quad (4)$$

Положим в (4) $\lambda = i\omega$ ($\omega > 0$) и разрешим относительно ε_1 и k . В результате имеем

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\omega) = \omega^{-1} [A \operatorname{ctg}(\omega) + (a^2 \operatorname{ctg}^2(\omega) + 4)^{1/2}], \quad (5)$$

$$k = k(\omega) = A\omega\varepsilon_1(\omega)/\sin(\omega). \quad (6)$$

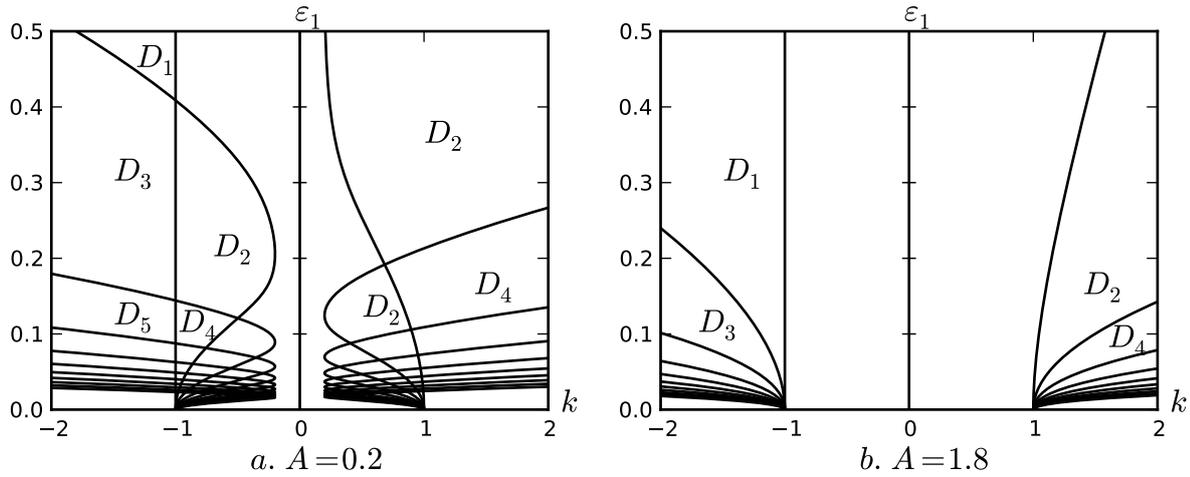


Рис. 2.

На рис. 2 приведена картина D -разбиений плоскости параметров (ε_1, k) квази-полинома (4), построенная согласно (5), (6) для двух значений параметра A .

Положим $k = 1 + \varepsilon_2$ и изучим характер зависимости корней уравнения

$$P_1(\lambda, \varepsilon) \equiv \varepsilon_1^2 \lambda^2 + \varepsilon_1 A \lambda + 1 + (1 + \varepsilon_2) \exp(-\lambda) = 0 \quad (7)$$

от $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. При $\varepsilon = 0$ уравнение (5) имеет корни $\lambda^{(\pm n)}(0) = \pm i\pi(2n - 1)$, $n = 1, 2, \dots$. При малых ε $\lambda^{(\pm n)}(\varepsilon)$ могут быть получены в виде сходящихся рядов по ε , однако при этом радиус сходимости n -го корня стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Для получения аналитической формулы зависимости корней уравнения (7) от ε , заметим, то множество корней уравнения (7) эквивалентно множеству корней последовательности уравнений

$$\lambda + \ln(\varepsilon_1^2 \lambda^2 + \varepsilon_1 A \lambda + 1) = \ln(1 + \varepsilon_2) \pm i\pi(2n - 1), \quad (8)$$

где $\ln \lambda = \ln|\lambda| + i \arg \lambda$ ($-\pi < \arg \lambda \leq \pi$), $n = 1, 2, \dots$

В дальнейшем достаточно рассмотреть в (6) только знак плюс. Рассмотрим уравнение

$$\lambda + \ln(\varepsilon_1^2 \lambda^2 + \varepsilon_1 A \lambda + 1) = w \quad (0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0), \quad (9)$$

относительно λ ($\text{Im } \lambda \geq 0$), считая $w \in \overline{Q}_0 = \{x_1 \leq \text{Re } w \leq x_2, \text{Im } w \geq \pi, x_1 < 0, x_2 > 0\}$. Покажем, что уравнение (9) имеет единственное решение. Для доказательства этого воспользуемся теоремой Руше [2]. Уравнение $\varepsilon_1^2 \lambda^2 + \varepsilon_1 A \lambda + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{\pm}(\varepsilon_1) = (-A + i\sqrt{4 - A^2})/\varepsilon_1$ при $A < 2$ и $\lambda_{1,2}(\varepsilon_1) = (-A + \sqrt{A^2 - 4})/\varepsilon_1$ при $A \geq 2$. Рассмотрим первый случай. Точка $\lambda = \lambda_+(\varepsilon_1)$ является особой точкой левой части уравнения (9). Проведем окружность C_ρ радиуса ρ с центром в этой точке и выполним разрез γ от окружности C_ρ до вещественной оси вида $\lambda = \text{Re } \lambda_+(\varepsilon_1)$. Рассмотрим область Ω_R в верхней комплексной полуплоскости, граница которой состоит из вещественной оси, разреза γ , окружности C_ρ и полуокружности радиуса R с центром в нуле. Выберем ε_1, ρ, R таким образом, чтобы на границе области Ω_R выполнялось условие теоремы Руше $|\lambda - w| > |\ln(\varepsilon_1^2 \lambda^2 + \varepsilon_1 A \lambda + 1)|$. При каждом ε_1 этого можно добиться за счет выбора ρ и R . Таким образом, в области Ω_R при каждом w существует единственное решение уравнения (9). Отсутствие решений в

круге, ограниченном окружностью C_ρ , легко доказывается переходом к полярным координатам с центром в этом круге. Случай $A \geq 2$ рассматривается аналогично.

Покажем, что решение уравнения (9) имеет вид $\lambda(w, \varepsilon) = w + \lambda_1(w, \varepsilon)$ ($\lambda_1(0, \varepsilon_1) \equiv 0$) и является аналитической функцией комплексного переменного $w \in \overline{Q}_0$ равномерно относительно $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ и аналитической функцией ε_1 равномерно относительно w , принадлежащего любой ограниченной подобласти \overline{Q}_0 .

Обозначим через Q_δ область в верхней комплексной полуплоскости, ограниченную следующими прямыми: $\operatorname{Re} \lambda = x_2$ ($x_2 > 0$ определяет границу \overline{Q}_0); $\operatorname{Im} \lambda = 0, 0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq x_2$; $\operatorname{Im} \lambda = -\kappa \operatorname{Re} \lambda$, где $\kappa = (4/A^2 - 1)^{1/2} + \delta$ при $A < 2$ и $\kappa = \delta$ при $A \geq 2$, а $\delta > 0$ – малое фиксированное число. Заметим, что преобразование

$$\lambda = -\ln(\varepsilon_1^2 w^2 + \varepsilon_1 A w + 1) + w$$

отображает \overline{Q}_δ в \overline{Q}_δ . Для нахождения решения построим итерационный процесс

$$\lambda_k = -\ln(\varepsilon_1^2 \lambda_{k-1}^2 + \varepsilon_1 A \lambda_{k-1} + 1) + w \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \lambda_0 = w. \quad (10)$$

Имеем

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k = -\ln(\varepsilon_1^2 \lambda_k^2 + \varepsilon_1 A \lambda_k + 1) + \ln(\varepsilon_1^2 \lambda_{k-1}^2 + \varepsilon_1 A \lambda_{k-1} + 1) = \varepsilon_1 M(\lambda_k, \lambda_{k-1}, \varepsilon_1)(\lambda_k - \lambda_{k-1}),$$

где

$$M(\lambda_k, \lambda_{k-1}, \varepsilon_1) = -(A + 2\varepsilon_1 \lambda_{k*}) / (\varepsilon_1^2 \lambda_{k*}^2 + \varepsilon_1 A \lambda_{k*} + 1), \\ \lambda_{k*} = \alpha \lambda_k + (1 - \alpha) \lambda_{k-1}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Заметим, что величины $|M(\lambda_k, \lambda_{k-1}, \varepsilon_1)|$ и $|M(\lambda_1, \lambda_0, \varepsilon_1)(\lambda_1 - \lambda_0)|$ равномерно ограничены при $\lambda_k, \lambda_{k-1} \in \overline{Q}_\delta$. Отсюда следует, что последовательность аналитических функций $\lambda_k(w, \varepsilon)$ равномерно относительно w из любой ограниченной подобласти \overline{Q}_0 и $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ сходится к функции

$$\lambda(w, \varepsilon) = w + \lambda^1(w, \varepsilon) = w - \ln(\varepsilon_1^2 (w - \ln(\varepsilon_1^2 (w - \ln(\dots))))^2 + \varepsilon_1 A (w - \ln(\varepsilon_1^2 (w - \ln(\dots)))) + 1),$$

которая обладает аналогичными свойствами.

Отметим следующее.

$$\lambda - \lambda_1 = \lambda(w, \varepsilon) - \lambda_1(w, \varepsilon) = -\ln(\varepsilon_1^2 \lambda^2 + \varepsilon_1 A \lambda + 1) + \ln(\varepsilon_1^2 w^2 + \varepsilon_1 A w + 1) = -\varepsilon_1 (A + 2\varepsilon_1 w_*) / (\varepsilon_1^2 w_*^2 + \varepsilon_1 A w_* + 1) (\lambda - w) = \varepsilon_1 M(\lambda, w, \varepsilon_1) (\lambda - w),$$

где $w_* = \alpha \lambda + (1 - \alpha) w$ ($0 < \alpha < 1$). Обозначив $M_* = \max_{\lambda \in \overline{Q}_\delta, w \in \overline{Q}_0, 0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0} |M(\lambda, w, \varepsilon_1) (\lambda - w)|$, имеем равномерную относительно $w \in \overline{Q}_0$ оценку $|\lambda - \lambda_1| \leq \varepsilon_1 M_*$, из которой следует для корней уравнения (6) равномерное относительно n представление

$$\lambda^{(n)}(\varepsilon) = \ln(1 + \varepsilon_2) + i\pi(2n - 1) - \ln(\varepsilon_1^2 (\ln(1 + \varepsilon_2) + i\pi(2n - 1))^2 + \varepsilon_1 A (\ln(1 + \varepsilon_2) + i\pi(2n - 1)) + 1) + O(|\varepsilon|).$$

Ниже приведены значения первых пяти корней $\lambda^{(n)}(\varepsilon)$ уравнения (7), принадлежащих верхней комплексной полуплоскости, вычисленные с использованием итерационного процесса (10) с точностью до 10^{-5} по невязке, т.е. $|P_1(\lambda^{(j)}(\varepsilon), \varepsilon)| < 10^{-5}$, для различных значений параметра ε_1 при $\varepsilon_2 = 0.1, A = 0.1$. В качестве нулевого приближения берется $\lambda_0^{(n)} = \ln(1 + \varepsilon_2) + i\pi(2n - 1)$. В таблице номер, стоящий рядом со значением корня, указывает требуемое количество итераций при вычислении корня с заданной точностью.

$A = 0.1, \varepsilon_2 = 0.1$

ε_1	$\lambda^{(1)}(\varepsilon)$		$\lambda^{(2)}(\varepsilon)$		$\lambda^{(3)}(\varepsilon)$		$\lambda^{(4)}(\varepsilon)$		$\lambda^{(5)}(\varepsilon)$	
0,01	0,09619+	2	0,10406+	3	0,11998+	3	0,14433+	3	0,17773+	3
	3,13839i		9,41508i		15,69149i		21,96741i		28,24257i	
0,02	0,09903+	3	0,13084+	3	0,19754+	4	0,30631+	4	0,47112+	4
	3,13505i		9,40427i		15,6705i		21,93031i		28,17665i	
0,03	0,1038+	3	0,17683+	4	0,33976+	4	0,63945+	5	1,17798+	9
	3,13153i		9,39096i		15,63579i		21,83433i		27,83991i	
0,04	0,11052+	4	0,24418+	4	0,57017+	6	1,23113+	12	1,48244+	20
	3,12777i		9,37275i		15,56171i		21,43272i		26,30264i	
0,05	0,1192+	4	0,33597+	5	0,91315+	9	1,47247+	22	0,53404+	9
	3,12369i		9,34528i		15,36841i		20,33644i		25,44016i	

Случай $k = -1 + \varepsilon_2$ рассматривается аналогично.

2. Рассмотрим квазиполином

$$P_2(\lambda) = \lambda - A(1 + i\alpha) - \gamma \exp(-\lambda\tau - i\varphi_0), \quad (11)$$

где $A, \alpha, \gamma, \tau > 0, \varphi_0 \in [0, 2\pi)$ — вещественные параметры. Характеристический квазиполином возникает при изучении уравнения Ланга–Кобаяши [3]. Изучим расположение нулей квазиполинома (11) в зависимости от параметров, используя метод D -разбиений. Положим $\lambda = i\omega, \omega \in R$ и приравняем нулю вещественную и мнимую части. В результате получим систему уравнений

$$A + \gamma \cos(\omega\tau + \varphi_0) = 0, \quad \omega - \alpha A + \gamma \sin(\omega\tau + \varphi_0) = 0. \quad (12)$$

Обозначив $1 + i\alpha = (1 + \alpha^2) \exp(i\beta), \beta = \arccos(1/\sqrt{1 + \alpha^2})$, из уравнений (12) имеем уравнение

$$\sin(\omega\tau + \varphi_0 + \beta) = -\omega/(\gamma\sqrt{1 + \alpha^2}) \quad (13)$$

для определения $\tau = \tau(\omega)$. Уравнение (13) разрешимо при $-\gamma\sqrt{1 + \alpha^2} \leq \omega \leq \gamma\sqrt{1 + \alpha^2}$ и дает две серии решений

$$\tau_1^m(\omega) = \omega^{-1}(\pi + \arcsin(\omega/(\gamma\sqrt{1 + \alpha^2})) - \varphi_0 - \beta + 2\pi m), \quad (14)$$

$$\tau_2^m(\omega) = -\omega^{-1}(\arcsin(\omega/(\gamma\sqrt{1 + \alpha^2})) + \varphi_0 + \beta - 2\pi m), \quad (15)$$

$m = 0, \pm 1, \dots$ Подставим (14) и (15) в первое уравнение (12). В результате будем иметь

$$A_1(\omega) = (\alpha\omega + \sqrt{\gamma^2(1 + \alpha^2) - \omega^2})/(1 + \alpha^2), \quad (16)$$

$$A_2(\omega) = (\alpha\omega - \sqrt{\gamma^2(1 + \alpha^2) - \omega^2})/(1 + \alpha^2). \quad (17)$$

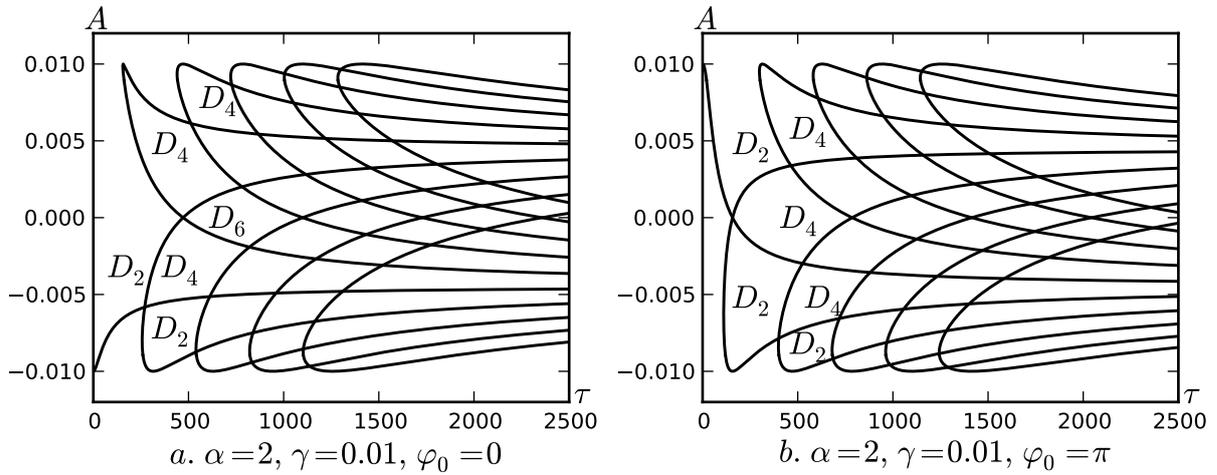


Рис. 3.

Вычислим значения функций $A_1(\omega)$ и $A_2(\omega)$ в нуле и на границах допустимого интервала изменения ω :

$$A_1^0 = A_1(0) = \gamma/\sqrt{1+\alpha^2} > 0, \quad A_1^- = A_1(-\gamma\sqrt{1+\alpha^2}) = -\alpha\gamma/\sqrt{1+\alpha^2} = -\alpha A_1^0, \\ A_1^+ = A_1(\gamma\sqrt{1+\alpha^2}) = \alpha\gamma/\sqrt{1+\alpha^2} = \alpha A_1^0,$$

$$A_2^0 = A_2(0) = -\gamma/\sqrt{1+\alpha^2} = -A_1^0, \quad A_2^- = A_2(-\gamma\sqrt{1+\alpha^2}) = -\alpha\gamma/\sqrt{1+\alpha^2} = A_1^-, \\ A_2^+ = A_2(\gamma\sqrt{1+\alpha^2}) = \alpha\gamma/\sqrt{1+\alpha^2} = -A_2^-.$$

Подставив те же значения в (14) и (15), заметим, что при $\omega = 0$ на плоскости параметров (τ, A) есть две горизонтальные асимптоты $\pm A_1^0$, а при значениях $\omega = \pm\gamma\sqrt{1+\alpha^2}$ имеется два уровня склейки графиков: A_1^- и A_1^+ .

Верхним решением Γ_{m_1, m_2}^+ назовем пару кривых $(\tau_1^{m_1}(\omega), A_1(\omega))$, $(\tau_2^{m_2}(\omega), A_2(\omega))$, $0 < \omega \leq \gamma\sqrt{1+\alpha^2}$, где m_1 и m_2 выбраны так, чтобы эти кривые склеивались (это произойдет на уровне A_1^+).

Нижним решением Γ_{m_1, m_2}^- назовем пару кривых $(\tau_1^{m_1}(\omega), A_1(\omega))$, $(\tau_2^{m_2}(\omega), A_2(\omega))$, $-\gamma\sqrt{1+\alpha^2} \leq \omega < 0$, где m_1 и m_2 выбраны так, чтобы эти кривые склеивались (это произойдет на уровне A_1^-).

Совокупность кривых, определяемых этими уравнениями для разных значений α , γ , φ_0 , приведена на рис. 3.

Выберем точку τ_0, A_0 на одной из этих кривых. Пусть они соответствуют точке ω_0 . Положим $A = A_0 + \varepsilon$. Определяя $\lambda(\varepsilon) = i\omega_0 + \varepsilon\lambda_1 + \dots$, из уравнения $\lambda - (A_0 + \varepsilon)(1 + i\alpha) - \gamma \exp(-\lambda\tau_0 + i\varphi_0) = 0$ находим

$$\lambda_1 = (1 + i\alpha)/[1 + \gamma\tau_0 \exp(-i\omega_0\tau_0 + i\varphi_0)] = \\ \{1 + \tau_0[\alpha\omega_0 - (1 + \alpha^2)A_0] + i(\alpha - \tau_0\omega_0)\}/[(1 - \tau_0A_0)^2 + \tau_0^2(\sigma - \alpha A_0)^2].$$

Знак $\text{Re } \lambda_1$ определяется в соответствии с (16), (17) знаком величины

$$1 + \tau_0[\alpha\omega_0 - (1 + \alpha^2)A_0] = 1 \mp \tau_0\sqrt{\gamma^2(1 + \alpha^2) - \omega_0^2}. \quad (18)$$

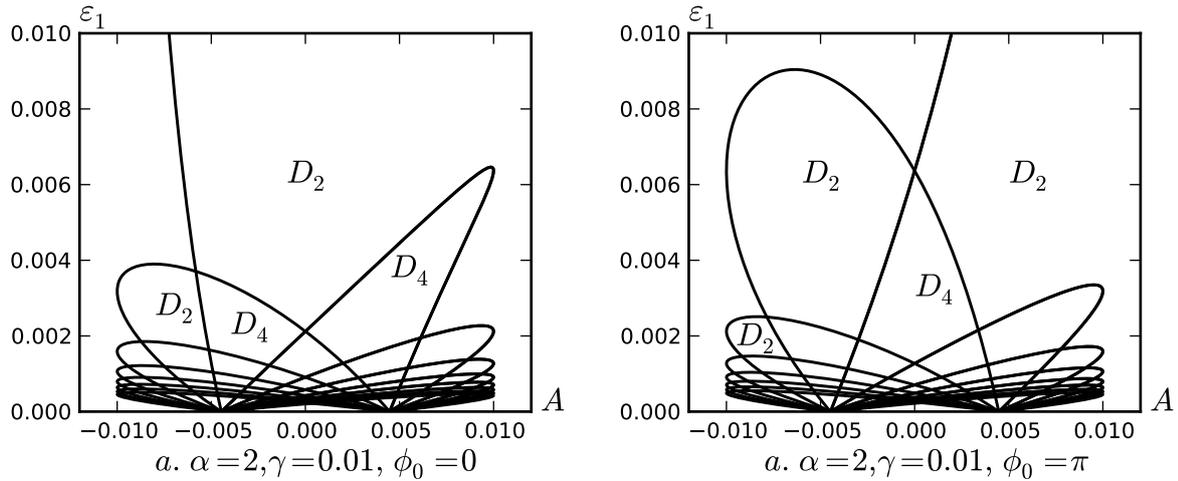


Рис. 4.

Таким образом, в соответствии с (18) на нижней составляющей каждой из кривых $\Gamma_{m_1 m_2}^\pm$ нули квазиполинома (11) переходят из левой комплексной полуплоскости в правую; на верхней составляющей каждой из кривых $\Gamma_{m_1 m_2}^\pm$ до изгиба корни переходят из левой комплексной полуплоскости в правую, после изгиба — наоборот, из правой в левую. В соответствии с этим на рис. 3 построена картина D -разбиений плоскости параметров (τ, A) .

Рассмотрим случай большого τ . Обозначив $\tau^{-1} = \varepsilon_1$ и нормировав в (11)) $\lambda \rightarrow \lambda \varepsilon_1$, получим квазиполином

$$P_2(\lambda, \varepsilon_1) \equiv \varepsilon_1 \lambda - A(1 + i\alpha) - \gamma \exp(-\lambda - i\varphi_0). \quad (19)$$

Положим в (19) $\lambda = i\omega$, $\omega \in R$ и приравняем нулю вещественную и мнимую части

$$A + \gamma \cos(\omega + \varphi_0) = 0, \quad \varepsilon_1 \omega - \alpha A + \gamma \sin(\omega + \varphi_0) = 0. \quad (20)$$

Из (20) находим

$$A(\omega) = -\gamma \cos(\omega + \varphi_0), \quad (21)$$

$$\varepsilon_1(\omega) = -\omega^{-1} \gamma (1 + \alpha^2)^{1/2} \sin(\omega + \varphi_0 + \beta), \quad (22)$$

$$-\varphi_0 - \beta + \pi(2n - 1) = \omega_{n-1} \leq \omega \leq \omega_n = -\varphi_0 - \beta + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Из (21), (22) следует, что при $\varepsilon(\omega_{n-1}) = \varepsilon(\omega_n) = 0$ соответственно имеем $A(\omega_{n-1}) = \gamma/(1 + \alpha^2)^{1/2} = A_1^0$, $A(\omega_n) = -\gamma/(1 + \alpha^2)^{1/2} = A_2^0$. В соответствии с этим на рис. 4 для двух вариантов значений параметров $\alpha, \gamma, \varphi_0$ приведены картины D -разбиения плоскости параметров (A, ε_1) .

Положим в (19) $A = A_1^0(1 + \varepsilon_2)$ и изучим характер зависимости корней уравнения

$$P_2(\lambda, \varepsilon) = \varepsilon_1 \lambda - A(1 + \varepsilon_2)(1 + i\alpha) - \gamma \exp(-\lambda - i\varphi_0) = 0 \quad (23)$$

от $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. При $\varepsilon = 0$ уравнение имеет корни $i\sigma_n = i\pi(2n - 1) - i\varphi_0 - i\beta$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. При малых ε все множество корней уравнения (23) представляет

собой семейство аналитических функций $\lambda^{(n)}(\varepsilon)$ ($\lambda^{(n)}(0) = i\sigma_n$), которые могут быть получены в виде сходящихся рядов по степеням ε , однако радиус сходимости этих рядов стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Для получения равномерного по n выражения для корней (23) заметим, что множество корней уравнения (23) совпадает с множеством корней следующей последовательности уравнений:

$$\lambda = -\ln(\varepsilon_1\gamma^{-1}\lambda - (1 + \varepsilon_2)\exp(i\beta)) + i(-\varphi_0 + 2\pi n), \quad (24)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Рассмотрим уравнение

$$\lambda = -\ln(\varepsilon_1\gamma^{-1}\lambda - (1 + \varepsilon_2)\exp(i\beta)) + w, \quad (25)$$

считая $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $w \in \overline{Q}_0 = \{x_1 \leq \operatorname{Re} w \leq x_2, x_1 < 0, x_2 > 0\}$. Уравнение (25) имеет единственное решение, принадлежащее области $\overline{Q}_1 = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \leq x_3 < (1 - \varepsilon_2)\cos\beta, x_3 > x_2\}$. Доказательство этого проводится аналогично доказательству разрешимости уравнения (19). Для нахождения решения $\lambda = \lambda(w, \varepsilon)$ уравнения (25) построим итерационный процесс

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -\ln(-(1 + \varepsilon_2)\exp(i\beta)) + w, \\ \lambda_k &= -\ln(\varepsilon_1\gamma^{-1}\lambda_{k-1} - (1 + \varepsilon_2)\exp(i\beta)) + w, \end{aligned} \quad (26)$$

$k = 1, 2, \dots$ Заметим, что

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} - \lambda_k &= -\ln(\varepsilon_1\gamma^{-1}\lambda_k - (1 + \varepsilon_2)\exp(i\beta)) + \ln(\varepsilon_1\gamma^{-1}\lambda_{k-1} - (1 + \varepsilon_2)\exp(i\beta)) = \\ &= -\varepsilon_1\gamma^{-1}/[\varepsilon_1\gamma^{-1}\lambda_k^* - (1 + \varepsilon_2)\exp(i\beta)](\lambda_k - \lambda_{k-1}), \end{aligned} \quad (27)$$

где λ^* находится на прямой, соединяющей λ_k и λ_{k-1} .

Обозначим $K_0 = \max_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \lambda \in \overline{Q}_1} |\gamma^{-1}/[\varepsilon_1\gamma^{-1}\lambda - (1 + \varepsilon_2)\exp(i\beta)]|$. Из (27) имеем

$$|\lambda_{k-1} - \lambda_k| \leq \varepsilon_1 K_0 |\lambda_k - \lambda_{k-1}|. \quad (28)$$

Из (28) следует равномерная сходимость последовательности функций $\lambda_k(w, \varepsilon)$, являющихся аналитическими w и ε , в любой ограниченной подобласти \overline{Q}_0 и $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$.
Предельная функция

$$\begin{aligned} \lambda(w, \varepsilon) = w + \lambda^1(w, \varepsilon) &= w - \ln(\varepsilon_1\gamma^{-1}(-\ln(\varepsilon_1\gamma^{-1}(-\ln(\varepsilon_1\gamma^{-1}(\dots) - \\ &= - (1 + \varepsilon_2)\exp(i\beta)) + w) - (1 + \varepsilon_2)\exp(i\beta)) + w) - (1 + \varepsilon_2)\exp(i\beta)) \end{aligned} \quad (29)$$

обладает теми же свойствами и является решением уравнения (25).

Имеет место легко проверяемое, с учетом (29), равенство

$$\begin{aligned} \lambda(w, \varepsilon) - \lambda_1(w, \varepsilon) &= -\ln(\varepsilon_1\gamma^{-1}(-\ln(\varepsilon_1\gamma^{-1}\lambda(w, \varepsilon) - (1 + \varepsilon_2)\exp(i\beta)) + w) - \\ &= - (1 + \varepsilon_2)\exp(i\beta)) + \ln(\varepsilon_1\gamma^{-1}(-\ln(-(1 + \varepsilon_2)\exp(i\beta)) + w) - (1 + \varepsilon_2)\exp(i\beta)) = \\ &= \varepsilon_1\gamma^{-1}K(\lambda(w, \varepsilon), w, \varepsilon), \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$K(\lambda, w, \varepsilon) = [-\varepsilon_1 \gamma^{-1} (\ln(\varepsilon_1 \gamma^{-1} \lambda - (1 + \varepsilon_2) \exp(i\beta)) \alpha + \ln(-(1 + \varepsilon_2) \exp(i\beta))(1 - \alpha)) + w - (1 + \varepsilon_2) \exp(i\beta)]^{-1} \ln(1 - \varepsilon_1 \gamma^{-1} \lambda \exp(-i\beta)(1 + \varepsilon_1)^{-1}),$$

$\alpha = \alpha(\lambda, w)$, $0 < \alpha < 1$. Функция $K(\lambda, w, \varepsilon)$ ограничена при $\lambda \in \overline{Q}_1, w \in \overline{Q}_0, |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$. Обозначив $K_* = \max_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \lambda \in \overline{Q}_1, w \in \overline{Q}_0} |K(\lambda, w, \varepsilon)|$ на основании (30) имеем оценку

$$|\lambda(w, \varepsilon) - \lambda_1(w, \varepsilon)| \leq \gamma^{-1} K_* \varepsilon_1. \quad (31)$$

На основании (24), (29) имеем следующую формулу для корней уравнения (23):

$$\lambda^{(n)}(\varepsilon) = \lambda(i(-\varphi_0 + 2\pi n), \varepsilon) = i(-\varphi_0 + 2\pi n) + \lambda^1(i(-\varphi_0 + 2\pi n), \varepsilon),$$

$n = 0, \pm 1, \dots$ При этом на основании (28) равномерно относительно n

$$\lambda^{(n)}(\varepsilon) = i(-\varphi_0 + 2\pi k) - \ln(\varepsilon_1 \gamma^{-1} (-\ln(-(1 + \varepsilon_2) \exp(i\beta)) + i(-\varphi_0 + 2\pi n)) - (1 + \varepsilon_2) \exp(i\beta)) + O(|\varepsilon|). \quad (32)$$

Отметим, что аналогичным образом можно получить оценку

$$|\lambda(w, \varepsilon) - \lambda_2(w, \varepsilon)| \leq K_{**} \varepsilon_1^2 \quad (K_{**} > 0)$$

и получить приближение $\lambda^{(n)}(\varepsilon)$ с точностью до $O(|\varepsilon^2|)$, аналогичное (32).

Ниже приведены значения пяти корней $\lambda^{(j)}(\varepsilon)$, $j = 1, 2, \dots, 5$, уравнения (23) для различных значений ε_1 при $\varepsilon_2 = 0.1; \alpha = 2; \gamma = 0.07; \phi_0 = \pi/2$. Вычисления проводились с помощью итерационного процесса (26) с точностью 10^{-5} по невязке.

ε_1	$\lambda^{(1)}(\varepsilon)$		$\lambda^{(2)}(\varepsilon)$		$\lambda^{(3)}(\varepsilon)$		$\lambda^{(4)}(\varepsilon)$		$\lambda^{(5)}(\varepsilon)$	
0.01	-0.03857+	5	0.85085+	9	-0.27215+	6	-0.78968+	5	-1.12969+	5
	0.49906i		8.37526i		15.2917i		21.713i		28.0616i	
0.02	0.03737+	7	-0.54527+	7	-1.26381+	6	-1.67449+	5	-1.96436+	5
	0.52309i		9,03985i		15.4645i		21.8083i		28.1261i	
0.03	0.13146+	11	-1.12342+	7	-1.75623+	6	-2.13855+	6	-2.4141+	5
	0.51977i		9,10273i		15.4913i		21.8244i		28.1374i	
0.04	0.22121+	23	-1.48932+	7	-2.08564+	6	-2.45481+	6	-2.72354+	5
	0.47333i		9,11708i		15.4972i		21.8277i		28.1395i	
0.05	0.27635+	131	-1.75768+	7	-2.33349+	6	-2.695+	6	-2,9597+	6
	0.39895i		9,11869i		15.4971i		21.8272i		28,1388i	

Случай $A = A_2^0(1 + \varepsilon)$ рассматривается аналогично.

В заключение отметим, что в работах [4–6] используется некоторое представление нулей квазиполиномов (7), (23) посредством разрывных по параметру ε функций. Такое представление не является равномерным по n .

Список литературы

1. *Неймарк Ю.И.* Структура D-разбиения пространства квазиполиномов диаграммы Вышнеградского и Найквиста // Доклады АН СССР. 1948. Т.60. С. 1503–1506. [*Neymark Yu.I.* Struktura D-razbienia prostranstva quasipolinomov diagrammi Vishnegradskogo i Nyquista // Doklady AN SSSR. 1948. T. 60. С. 1503–1506 (in Russian).]

2. *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексного переменного. М.: Наука. 1979. 320с. [*Sveshnikov A.G., Tikhonov A.N.* The Theory of Functions of a Complex Variable. Translated from Russian by G. Yankovsky. Moscow, Russia: Mir Publ., 1974.]
3. *Lang R., Kobayashi.* Abundance of strange attractors // IEEE. J. Quantum Electron. 1980. 16(1). P. 347–355.
4. *Grigorieva E.V., Haken H., Kaschenko S.A.* Theory of quasi-periodicity in model of lasers with delayed optoelectronic feedback // Optics Communications. 1999. V. 165. P. 279–292.
5. *Grigorieva E.V., Bestehorn M., Haken H., Kaschenko S.A.* Order parameters for class-B lasers with a long time delayed feedback // Physica D. 2000. V. 145. P. 111–130.
6. *Григорьева Е.В., Кащенко И.С., Кащенко С.А.* Мультистабильность в модели лазера с большим запаздыванием // Модел. и анализ информ. систем. 2010. 17:2 С. 17–27. [*Grigorieva E.V., Kaschenko I.S., Kaschenko S.A.* Multistability in a laser model with large delay // Modeling and Analysis of Information Systems. 2010. V. 17, N 2. P. 17–27 (in Russian).]
7. *Bellman R., Cooke K.L.* Differential-Difference Equations. Academic Press. New York – London, 1963.

On the Location of Some Characteristic Quasipolynomial Roots

Glyzin D.S., Kubyshkin E.P., Moryakova A.R.

P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: quasi-polynomial, D-partition method, asymptotic representation

The location of zeros of two characteristic quasi-polynomials arising from studying the differential equations with a retarded argument is considered. The first one originates from the mathematical model of electromagnetic oscillations generator with a delayed feedback, the second one — from the Lang-Kobayashi system that is a well-known mathematical model of a quantum generator. The D-partition figures are presented in a parameter space and possible critical cases are found out. The large delay case important for applications is considered. In this case, for quasi-polynomial roots obtained are the analytical dependencies on a value reciprocal to the delay, and uniform asymptotical formulas are constructed.

Сведения об авторах:

Глызин Дмитрий Сергеевич,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
канд. физ.-мат. наук

Кубышкин Евгений Павлович,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
доктор физ.-мат. наук, профессор

Морякова Алёна Романовна,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
аспирант