Модел. и анализ информ. систем. Т. **22**, № **1** (2015) 85–104

УДК 519.977

Асимптотика приближения нулевого порядка решения трехтемповой линейно-квадратичной задачи оптимального управления

Калашникова М. А.

Воронежский государственный университет
394006 Россия, г. Воронеж, Университетская пл., 1

e-mail: margarita.kalashnikova@mail.ru

получена 8 августа 2014

Ключевые слова: линейно-квадратичная задача оптимального управления, сингулярные возмущения, асимптотическое разложение, разнотемповые системы

Данная работа посвящена построению приближения нулевого порядка решения сингулярно возмущенной линейно-квадратичной трехтемповой задачи оптимального управления методом прямой схемы. Алгоритм метода заключается в непосредственной подстановке постулируемого асимптотического разложения решения в условие задачи и построении серии задач для нахождения членов асимптотики. Асимптотическое разложение решения в данном случае содержит регулярные функции и четыре пограничные функции экспоненциального типа, которые определяются из решения пяти линейно-квадратичных задач оптимального управления. Показано, что система уравнений для членов приближения нулевого порядка асимптотического решения задачи, вытекающей из условий оптимальности управления исходной возмущенной задачи, соответствует системе уравнений, получаемой из условий оптимальности управления в построенных пяти задачах оптимального управления для нахождения асимптотического приближения решения нулевого порядка методом прямой схемы. Приведен иллюстративный пример.

Введение

Реальные процессы описываются динамическими системами с малыми параметрами. Трехтемповые системы, представляющие собой систему дифференциальных уравнений с параметрами различных порядков малости при производных, используются в ряде приложений (см., например, [1], [2], [3] с. 134–136).

Сингулярно возмущенным линейным системам посвящено большое число публикаций (см., например, [4], [5], [6], [7]). Задача устойчивости линейных разнотемповых систем рассмотрена в [8]. В статье [9] предложена схема анализа управляемости разнотемповых линейных систем путем поэтапного исследования управляемости систем меньшей размерности. Решение разнотемповых линейных систем методом интегральных многообразий представлено в [3]. В [10] для системы двух линейных уравнений с двумя независимыми малыми параметрами получено асимптотическое разложение решения. Линейно-квадратичные задачи оптимального управления рассмотрены в [1], [2], [11], [12].

В настоящей статье методом прямой схемы, заключающимся в непосредственной подстановке постулируемого асимптотического разложения решения в условие задачи и построении серии задач оптимального управления для нахождения членов асимптотики, построено приближение нулевого порядка решения трехтемповой линейно-квадратичной задачи оптимального управления. Помимо функций, зависящих от t, разложение содержит четыре вида пограничных функций экспоненциального типа. Полученные результаты иллюстрируются на конкретном примере.

Далее, $\varepsilon \geq 0$ – малый параметр, $t \in [0,T]$, $T > 0$ – задано, штрих означает транспонирование, а угловые скобки – скалярное произведение в соответствующих пространствах. Разложение произвольной функции $\omega = \omega(\varepsilon)$ в ряд по степеням ε определим следующим образом:

$$\omega(\varepsilon) = \sum_{j\geq 0} \varepsilon^j \omega_j = \{\omega\}_{j-1} + \varepsilon^n [\omega]_n + \alpha(\varepsilon^{n+1}),$$

где $[\omega]_n = \omega_n$, $\{\omega\}_{n-1} = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \varepsilon^j \omega_j$, а $\alpha(\varepsilon^{n+1})$ означает сумму членов разложения порядка ε^{n+1} и выше.

1. Постановка задачи

Рассматривается следующая задача:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T (<w, \mathbb{W}(t,\varepsilon)w> + <u, R(t,\varepsilon)u>)\, dt \to \min, \tag{1}$$

$$\mathbb{E}(\varepsilon)\frac{dw}{dt} = \mathbb{A}(t,\varepsilon)w + \mathbb{B}(t,\varepsilon)u, \tag{2}$$

$$w(0,\varepsilon) = w^0. \tag{3}$$

Здесь $w(t,\varepsilon) = (x(t,\varepsilon)', y(t,\varepsilon)', z(t,\varepsilon)')'$, $w(0,\varepsilon) = (x(0,\varepsilon)', y(0,\varepsilon)' z(0,\varepsilon)')' = w^0 = (x^{0\prime}, y^{0\prime}, z^{0\prime})'$; $x(t,\varepsilon) \in R^{n_1}$, $y(t,\varepsilon) \in R^{n_2}$, $z(t,\varepsilon) \in R^{n_3}$, $u(t,\varepsilon) \in R^m$; $\mathbb{E}(t,\varepsilon) = diag(I_{n_1}, \varepsilon I_{n_2}, \varepsilon^2 I_{n_3})$, I_{n_1}, I_{n_2}, I_{n_3} – единичные операторы, действующие в пространствах R^{n_1}, R^{n_2}, R^{n_3}, соответственно; матрицы $\mathbb{W}(t,\varepsilon)$, $R(t,\varepsilon)$, $\mathbb{A}(t,\varepsilon)$, $\mathbb{B}(t,\varepsilon)$ являются достаточно гладкими по совокупности переменных при всех $t \in [0,T]$, $\varepsilon \geq 0$, кроме того, $\mathbb{W}(t,\varepsilon)$ и $R(t,\varepsilon)$ – симметричны, а $\mathbb{W}(t,0)$, $R(t,0)$ – положительно определены при $t \in [0,T]$. Так как $\mathbb{W}(t,0)$, $R(t,0)$ положительно определены при всех $t \in [0,T]$, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ таковыми будут и матрицы $\mathbb{W}(t,\varepsilon)$, $R(t,\varepsilon)$. Будем использовать следующие представления матриц $\mathbb{W}(t,\varepsilon)$, $\mathbb{A}(t,\varepsilon)$, $\mathbb{B}(t,\varepsilon)$:

$$\mathbb{W} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21}' & W_{22} & W_{23} \\ W_{31}' & W_{32}' & W_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \ \mathbb{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что выполнено условие:

(i) матрицы A_{33}, $(A_{22} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{32})$ являются устойчивыми, т.е. действительные части их собственных значений отрицательны.

Приведем далее формализм построения приближения нулевого порядка асимптотического решения задачи (1) – (3) методом прямой схемы.

2. Формализм построения асимптотики

Следуя методу прямой схемы [13] и методу пограничных функций [4], решение исходной задачи $v(t,\varepsilon) = (x(t,\varepsilon)', y(t,\varepsilon)', z(t,\varepsilon)', u(t,\varepsilon)')'$ будем искать в виде разложения

$$v(t,\varepsilon) = \bar{v}(t,\varepsilon) + \sum_{i=0}^{1}(\Pi_i v(\tau_i,\varepsilon) + Q_i v(\eta_i,\varepsilon)), \tag{4}$$

где $\bar{v}(t,\varepsilon) = \sum\limits_{j\geq 0} \varepsilon^j \bar{v}_j(t)$, $\Pi_i v(\tau_i,\varepsilon) = \sum\limits_{j\geq 0} \varepsilon^j \Pi_{ij} v(\tau_i)$, $Q_i v(\eta_i,\varepsilon) = \sum\limits_{j\geq 0} \varepsilon^j Q_{ij} v(\eta_i)$, $\tau_i = \frac{t}{\varepsilon^{i+1}}$, $\eta_i = \frac{t-T}{\varepsilon^{i+1}}$, $\bar{v}_j(t)$ – регулярные функции, $\Pi_{ij}v(\tau_i)$ – пограничные функции в окрестности $t = 0$, $Q_{ij}v(\eta_i)$ – пограничные функции в окрестности $t = T$, имеющие экспоненциальный тип, т.е. справедливы оценки

$$\parallel \Pi_{ij} v(\tau_i) \parallel \leq c e^{-æ\tau_i}, \ \parallel Q_{ij} v(\eta_i) \parallel \leq c e^{æ\eta_i}, \tag{5}$$

при $i = 0, 1$ с положительными постоянными c и æ, не зависящими от аргументов рассматриваемых функций.

Будем использовать следующие обозначения: $\tilde{\bar{v}}_n(t,\varepsilon) = \sum\limits_{j=0}^{n} \varepsilon^j \bar{v}_j(t)$, $\tilde{\Pi}_{in} v(\tau_i,\varepsilon) = \sum\limits_{j=0}^{n} \varepsilon^j \Pi_{ij} v(\tau_i)$, $\tilde{Q}_{in} v(\eta_i,\varepsilon) = \sum\limits_{j=0}^{n} \varepsilon^j Q_{ij} v(\eta_i)$, $i = 0, 1$, $f(v,t,\varepsilon) = \mathbb{A}(t,\varepsilon)w + \mathbb{B}(t,\varepsilon)u$, $\rho(w,\psi,t,\varepsilon) = \mathbb{W}(t,\varepsilon)w - \mathbb{A}(t,\varepsilon)'\psi$, $\varrho(u,\psi,t,\varepsilon) = R(t,\varepsilon)u - \mathbb{B}(t,\varepsilon)'\psi$.

Подставляя разложения (4) в условие задачи (1) – (2), представим уравнения системы (2) и подынтегральное значение функционала (1) в виде асимптотической суммы слагаемых, зависящих от t, τ_i, η_i, $i = 0, 1$. Учитывая экспоненциальный характер пограничных функций (5), для подынтегральных слагаемых, зависящих от τ_i, η_i, $i = 0, 1$, перейдем в (1) к интегрированию по промежуткам $[0, +\infty)$, $(-\infty, 0]$ соответственно. Минимизируемый функционал (1) представим в виде

$$J_\varepsilon(u) = \sum_{j\geq 0} \varepsilon^j J_j. \tag{6}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в уравнении состояния, отдельно зависящие от t, τ_i, η_i, $i = 0, 1$, получаем уравнения

$$\left[\mathbb{E}(\varepsilon)\frac{d\bar{w}(t)}{dt}\right]_j = \mathbb{A}_0(t)\bar{w}_j(t) + \mathbb{B}_0(t)\bar{u}_j(t) + [\hat{\bar{f}}_{(j-1)}(t)]_j, \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\left[\mathbb{E}_1\frac{d\Pi_0 w(\tau_0)}{d\tau_0}\right]_j = (E_2 + E_3)(\mathbb{A}_0(0)\Pi_{0j}w(\tau_0) + \mathbb{B}_0(0)\Pi_{0j}u(\tau_0) + [\hat{\Pi}_{0(j-1)}f(\tau_0)]_j) + \\ + E_1[\hat{\Pi}_{0(j-1)}f(\tau_0)]_{j-1},\end{gathered} \tag{8}$$

$$\left[\mathbb{E}_1 \frac{dQ_0 w(\eta_0)}{d\eta_0}\right]_j = (E_2 + E_3)(\mathbb{A}_0(T)Q_{0j}w(\eta_0) + \mathbb{B}_0(T)Q_{0j}u(\eta_0) + [\hat{Q}_{0(j-1)}f(\eta_0)]_j) + \\ + E_1[\hat{Q}_{0(j-1)}f(\eta_0)]_{j-1}, \tag{9}$$

$$\frac{d\Pi_{1j}w(\tau_1)}{d\tau_1} = E_3(\mathbb{A}_0(0)\Pi_{1j}w(\tau_1) + \mathbb{B}_0(0)\Pi_{1j}u(\tau_1) + [\hat{\Pi}_{1(j-1)}f(\tau_1)]_j) + \\ + E_1[\hat{\Pi}_{1(j-2)}f(\tau_1)]_{j-2} + E_2[\hat{\Pi}_{1(j-1)}f(\tau_1)]_{j-1}, \tag{10}$$

$$\frac{dQ_{1j}w(\eta_1)}{d\eta_1} = E_3(\mathbb{A}_0(T)Q_{1j}w(\eta_1) + \mathbb{B}(T)Q_{1j}u(\eta_1) + [\hat{Q}_{1(j-1)}f(\eta_1)]_j) + \\ + E_1[\hat{Q}_{1(j-2)}f(\eta_1)]_{j-2} + E_2[\hat{Q}_{1(j-1)}f(\eta_1)]_{j-1}, \tag{11}$$

где $E_1 = diag(I_{n_1}, 0, 0)$, $E_2 = diag(0, I_{n_2}, 0)$, $E_3 = diag(0, 0, I_{n_3})$, $\mathbb{E}_1 = diag(I_{n_1}, I_{n_2}, \varepsilon I_{n_3})$; $\hat{\bar{f}}_{(j-1)}(t)$, $\hat{\Pi}_{i(j-1)}f(\tau_i)$, $\hat{Q}_{i(j-1)}f(\eta_i)$ являются значениями функции f при $v = \tilde{\bar{v}}_{j-1}(t,\varepsilon)$, $v = \tilde{\Pi}_{i(j-1)}v(\tau_i,\varepsilon)$, $v = \tilde{Q}_{i(j-1)}v(\eta_i,\varepsilon)$ соответственно, $i = 0, 1$. Аналогично определяются $\hat{\Pi}_{1(j-2)}f(\tau_1)$, $\hat{Q}_{1(j-2)}f(\eta_1)$. Функции с отрицательными индексами будем считать нулевыми.

Учитывая (5), из уравнений (8) – (11) при $j = 0$, (10) – (11) при $j = 1$, следуют равенства

$$\Pi_{00}x(\tau_0) = Q_{00}x(\eta_0) = \Pi_{10}x(\tau_1) = Q_{10}x(\eta_1) = \Pi_{11}x(\tau_1) = Q_{11}x(\eta_1) = 0, \\ \Pi_{10}y(\tau_1) = Q_{10}y(\eta_1) = 0. \tag{12}$$

Принимая во внимание (12), подставляя разложения (4) в начальные условия (3), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем соотношения для начальных условий членов разложения (4)

$$\bar{x}_0(0) = x^0, \tag{13}$$

$$\bar{x}_1(0) + \Pi_{01}x(0) = 0, \tag{14}$$

$$\bar{x}_j(0) + \sum_{i=0}^{1} \Pi_{ij}x(0) = 0, \ j \geq 2, \tag{15}$$

$$\bar{y}_0(0) + \Pi_{00}y(0) = y^0, \tag{16}$$

$$\bar{y}_j(0) + \sum_{i=0}^{1} \Pi_{ij}y(0) = 0, \ j \geq 1, \tag{17}$$

$$\bar{z}_j(0) + \Pi_{1j}z(0) + \Pi_{2j}z(0) = \begin{cases} z^0, \ j = 0, \\ 0, \ j \geq 1. \end{cases} \tag{18}$$

Приближение нулевого порядка асимптотического решения (4) состоит из пяти функций $\bar{v}_i(t)$, $\Pi_{i0}v(\tau_i)$, $Q_{i0}(\eta_i)$, $i = 0, 1$, определяемых из решения пяти задач оптимального управления, представленных далее.

При $\varepsilon = 0$ из (1) – (3) получаем вырожденную задачу, которая состоит в минимизации коэффициента J_0 из представления (6) на траекториях системы (7) при $j = 0$ с условием (13), где в качестве управления выступает $(\bar{y}_0, \bar{z}_0, \bar{u}_0)$, т.е.

$$\bar{P}_0: \ \bar{J}_0(\bar{u}_0) = \frac{1}{2}\int_0^T (<\bar{w}_0(t), \mathbb{W}_0(t)\bar{w}_0(t)> + <\bar{u}_0(t), R_0(t)\bar{u}_0(t)>)\, dt \to \min,$$

$$E_1\frac{d\bar{w}_0(t)}{dt} = \mathbb{A}_0(t)\bar{w}_0(t) + \mathbb{B}_0(t)\bar{u}_0(t),\ \bar{x}_0(0) = x^0. \tag{19}$$

При наших условиях, согласно [14], последняя задача однозначно разрешима. Обозначая функцию Гамильтона задачи $\bar{P}_0$ с сопряженной переменной $\bar{\psi}_0(t) = (\bar{p}_0(t)', \bar{q}_0(t)', \bar{s}_0(t)')'$ через $\bar{H}_0$

$$\bar{H}_0(t) = <\bar{\psi}_0(t), (\mathbb{A}_0(t)\bar{w}_0(t) + \mathbb{B}_0(t)\bar{u}_0(t)) > -\frac{1}{2}(<\bar{w}_0(t), \mathbb{W}_0(t)\bar{w}_0(t)> + \\ + <\bar{u}_0(t), R_0(t)\bar{u}_0(t)>),$$

выпишем условия оптимальности управления [15]

$$\frac{\partial \bar{H}_0}{\partial \bar{y}_0} = 0,\ \frac{\partial \bar{H}_0}{\partial \bar{z}_0} = 0,\ \frac{\partial \bar{H}_0}{\partial \bar{u}_0} = 0, \tag{20}$$

$$-\frac{\partial \bar{H}_0}{\partial \bar{x}_0} = \frac{d\bar{p}_0(t)}{dt} = E_1(-\mathbb{A}_0(t)'\bar{\psi}_0(t) + \mathbb{W}_0(t)\bar{w}(t)),\ \bar{p}_0(T) = 0. \tag{21}$$

Из (20) получаем представления для сопряженных переменных $\bar{s}_0(t)$, $\bar{q}_0(t)$ и управления $\bar{u}_0(t)$

$$\bar{s}_0(t) = (A_{33}(t)')^{-1}(-\bar{p}_0(t)'A_{13}(t) - \bar{q}_0(t)'A_{23}(t) + \\ +W_{13}(t)\bar{x}_0(t) + W_{23}(t)\bar{y}_0(t) + W_{33}(t)\bar{z}_0(t)),$$

$$\bar{q}_0(t) = ((A_{22}(t) - A_{32}(t)(A_{33}(t))^{-1}A_{23}(t))')^{-1}\cdot \\ \cdot(\bar{p}_0(t)'(-A_{12}(t) + A_{32}(t)(A_{33}(t))^{-1}A_{23}(t)) - \\ -A_{32}(t)'(A_{33}(t))^{-1}(W_{13}(t)\bar{x}_0(t) + W_{23}(t)\bar{y}_0(t) + W_{33}(t)\bar{z}_0(t)) + \\ +W_{12}(t)\bar{x}_0(t) + W_{22}(t)\bar{y}_0(t) + W_{23}(t)\bar{z}_0(t)),$$

$$\bar{u}_0(t) = R(t)^{-1}\mathbb{B}_0(t)'\bar{\psi}_0(t). \tag{22}$$

Сформулируем далее задачи оптимального управления для нахождения пограничных функций нулевого порядка. Обозначим подынтегральное выражение функционала (1) через

$$F(t,\varepsilon) = \frac{1}{2}(<w(t,\varepsilon), \mathbb{W}(t,\varepsilon)w(t,\varepsilon)> + <u(t,\varepsilon), R(t,\varepsilon)u(t,\varepsilon)>).$$

Приравнивая коэффициенты в (1) при ε^1, рассмотрим J_1 из разложения (6)

$$J_1 = \int\limits_0^T \bar{F}_1(t)\,dt + \int\limits_0^{+\infty} \Pi_{00}F(\tau_0)\,d\tau_0 + \int\limits_{-\infty}^0 Q_{00}F(\eta_0)\,d\eta_0, \tag{23}$$

где

$$\bar{F}_1(t) = <\bar{w}_1(t), \mathbb{W}_0(t)\bar{w}_0(t)> + <\bar{u}_1(t), R_0(t)\bar{u}_0(t)> + [\hat{F}_0(t)]_1,$$

$$\Pi_{00}F(\tau_0) = <\bar{w}_0(0), \mathbb{W}_0(0)\Pi_{00}w(\tau_0)> + <\bar{u}_0(0), R_0(0)\Pi_{00}u(\tau_0)> + \\ +\frac{1}{2} <\Pi_{00}w(\tau_0), \mathbb{W}_0(0)\Pi_{00}w(\tau_0)> +\frac{1}{2} <\Pi_{00}u(\tau_0), \mathbb{W}_0(0)\Pi_{00}u(\tau_0)>,$$

$$Q_{00}F(\eta_0) = <\bar{w}_0(T), \mathbb{W}_0(T)Q_{00}w(\eta_0)> + <\bar{u}_0(T), R_0(T)Q_{00}u(\tau_1)> +$$
$$+\frac{1}{2} <Q_{00}w(\eta_0), \mathbb{W}_0(T)Q_{00}w(\eta_0)> +\frac{1}{2} <Q_{00}u(\eta_0), R_0(T)Q_{00}u(\eta_0)> .$$

Используя условия оптимальности управления задачи $\bar{P}_0$ (20) - (22), уравнения (7) при $j = 1$, применяя формулу интегрирования по частям, преобразуем регулярную часть функционала (23).

$$\int_0^T \bar{F}_1(t)\,dt = \int_0^T (<\bar{w}_1(t), E_1\frac{d\bar{\psi}_0(t)}{dt} + \mathbb{A}_0(t)'\bar{\psi}_0(t)> + <\bar{u}_1(t), \mathbb{B}_0(t)'\bar{\psi}_0(t)> +$$
$$+[\hat{\bar{F}}_0(t)]_1)\,dt = \int_0^T (<\bar{w}_1(t), \mathbb{A}_0(t)'\bar{\psi}_0(t)> + <\bar{u}_1(t), \mathbb{B}_0(t)'\bar{\psi}_0(t)> -$$
$$- <E_1\bar{\psi}_0(t), \mathbb{A}_0(t)\bar{w}_1(t) + \mathbb{B}_0(t)\bar{u}_1(t) + [\hat{\bar{f}}_0(t)]_1> +[\hat{\bar{F}}_0(t)]_1)\,dt + <\bar{p}_0(t), \bar{x}_1(t)> |_0^T =$$
$$= <\bar{p}_0(T), \bar{x}_1(T)> - <\bar{p}_0(0), \bar{x}_1(0)> + \int_0^T (<(E_2 + E_3)\bar{\psi}_0(t), \mathbb{A}_0(t)\bar{w}_1(t)+$$
$$+\mathbb{B}_0(t)\bar{u}_1(t)> - <E_1\bar{\psi}_0(t), [\hat{\bar{f}}_0(t)]_1> +[\hat{\bar{F}}_0(t)]_1)\,dt = - <\bar{p}_0(0), \bar{x}_1(0)> +$$
$$+ \int_0^T (<\bar{q}_0(t), \frac{d\bar{y}_0(t)}{dt}> - <\bar{\psi}_0(t), [\hat{\bar{f}}_0(t)]_1> +[\hat{\bar{F}}_0(t)]_1)\,dt = - <\bar{p}_0(0), \bar{x}_1(0)> +$$
$$+ <\bar{q}_0(T), \bar{y}_0(T)> - <\bar{q}_0(0), \bar{y}_0(0)> + \int_0^T ([\hat{\bar{\rho}}_0(t)]_1 + [\hat{\bar{\sigma}}_0(t)]_1 - <\bar{y}_0(t), \frac{d\bar{q}_0(t)}{dt}>)\,dt.$$

Интеграл в последнем выражении представляет собой известную величину после решения задачи $\bar{P}_0$. Из условий (14), (16), учитывая (5), следует справедливость равенств

$$- <\bar{p}_0(0), \bar{x}_1(0)> = <\bar{p}_0(0), \Pi_{01}x(0)> = - \int_0^{+\infty} <\bar{p}_0(0), \frac{d\Pi_{01}x(\tau_0)}{d\tau_0}> \,d\tau_0,$$
$$- <\bar{q}_0(0), \bar{y}_0(0)> = <\bar{q}_0(0), (-y^0 + \Pi_{00}y(0))> =$$
$$= - <\bar{q}_0(0), y^0> - \int_0^{+\infty} <\bar{q}_0(0), \frac{d\Pi_{00}y(\tau_0)}{d\tau_0}> \,d\tau_0.$$

Принимая во внимание последние соотношения, интегралы, зависящие от τ_0, η_0, в (23) примут вид

$$\int_0^{+\infty} \Pi_{00}F(\tau_0)\,d\tau_0 = \int_0^{+\infty} (<\bar{w}_0(0), \mathbb{W}_0(0)\Pi_{00}w(\tau_0)> + <\bar{u}_0(0), R_0(0)\Pi_{00}u(\tau_0)>)\,d\tau_0+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}(<\Pi_{00}w(\tau_0),\mathbb{W}_0(0)\Pi_{00}w(\tau_0)> + <\Pi_{00}u(\tau_0),R_0(0)\Pi_{00}u(\tau_0)>)\,d\tau_0-$$
$$-\int\limits_0^{+\infty}(<\bar p_0(0),\frac{d\Pi_{01}x(\tau_0)}{d\tau_0}> + <\bar q_0(0),\frac{d\Pi_{00}y(\tau_0)}{d\tau_0}>)\,d\tau_0 \tag{24}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0}Q_{00}F(\eta_0)\,d\eta_0=\int\limits_{-\infty}^{0}(<\bar w_0(T),\mathbb{W}_0(T)Q_{00}w(\eta_0)> + <\bar u_0(T),R_0(T)Q_{00}u(\eta_0)>)\,d\eta_0+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0}(<Q_{00}w(\eta_0),\mathbb{W}_0(T)Q_{00}w(\eta_0)> + <Q_{00}u(\eta_0),R_0(T)Q_{00}u(\eta_0)>)\,d\eta_0. \tag{25}$$

Преобразуем первые интегралы из (24), (25), используя (20) – (22), уравнения (8), (9) при $j=0$ и при $j=1$ относительно $\Pi_{00}x$, $Q_{00}x$.

$$\int\limits_0^{+\infty}(<\bar w_0(0),\mathbb{W}_0(0)\Pi_{00}w(\tau_0)> + <\bar u_0(0),R_0(0)\Pi_{00}u(\tau_0)>)\,d\tau_0=$$
$$=\int\limits_0^{+\infty}(<E_1(\frac{d\bar\psi_0}{d\tau_0}|_{\tau_0=0})+\mathbb{A}_0(0)'\bar\psi_0(0),\Pi_{00}w(\tau_0)> + <\mathbb{B}(0)'\bar\psi_0(0),\Pi_{00}u(\tau_0)>)\,d\tau_0=$$
$$=\int\limits_0^{+\infty}(<\bar\psi_0(0),\mathbb{A}_0(0)\Pi_{00}w(\tau_0)+\mathbb{B}_0(0)\Pi_{00}u(\tau_0)> + <E_1(\frac{d\bar\psi_0}{d\tau_0}|_{\tau_0=0}),\Pi_{00}w(\tau_0)>)\,d\tau_0=$$
$$=\int\limits_0^{+\infty}(<\bar p_0(0),\frac{d\Pi_{01}x(\tau_0)}{d\tau_0}> + <\bar q_0(0),\frac{d\Pi_{00}y(\tau_0)}{d\tau_0}>)\,d\tau_0,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0}(<\bar w_0(T),\mathbb{W}_0(T)Q_{00}w(\eta_0)> + <\bar u_0(T),R_0(T)Q_{00}u(\eta_0)>)\,d\eta_0=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{0}(<\bar p_0(T),\frac{dQ_{01}x(\eta_0)}{d\eta_0}> + <\bar q_0(T),\frac{dQ_{00}y(\eta_0)}{d\eta_0}>)\,d\eta_0=<\bar q_0(T),Q_{00}y(0)>.$$

Подставляя полученные выражения в (24), (25), получаем критерии качества в задачах Π_0P_0, Q_0P_0 для нахождения членов разложения $\Pi_{00}v(\tau_0)$, $Q_{00}v(\eta_0)$, которые имеют следующий вид:

$$\Pi_0P_0:\ \Pi_0J_0(\Pi_{00}u)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}(<\Pi_{00}w(\tau_0),\mathbb{W}_0(0)\Pi_{00}w(\tau_0)> +$$
$$+<\Pi_{00}u(\tau_0),R_0(0)\Pi_{00}u(\tau_0)>)\,d\tau_0\to\min, \tag{26}$$

$$(E_1+E_2)\frac{d\Pi_{00}w(\tau_0)}{d\tau_0}=(E_2+E_3)(\mathbb{A}_0(0)\Pi_{00}w(\tau_0)+\mathbb{B}_0(0)\Pi_{00}u(\tau_0)), \tag{27}$$

$$\Pi_{00}x(+\infty) = 0,\ \bar{y}_0(0) + \Pi_{00}y(0) = y^0. \tag{28}$$

$$Q_0P_0:\ Q_0J_0(Q_{00}u) = <\bar{q}_0(T), Q_{00}y(0)> + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0}(<Q_{00}w(\eta_0), \mathbb{W}_0(T)Q_{00}w(\eta_0)> + \\ + <Q_{00}u(\eta_0), R_0(T)Q_{00}u(\eta_0)>)\,d\eta_0 \to \min, \tag{29}$$

$$(E_1+E_2)\frac{dQ_{00}w(\eta_0)}{d\eta_0} = (E_2+E_3)(\mathbb{A}_0(T)Q_{00}w(\eta_0) + \mathbb{B}_0(T)Q_{00}u(\eta_0)), \tag{30}$$

$$Q_{00}x(-\infty) = 0,\ Q_{00}y(-\infty) = 0. \tag{31}$$

Учитывая условие (i), линейно-квадратичные задачи Π_0P_0, Q_0P_0 однозначно разрешимы. Обозначим гамильтониан задачи Π_0P_0 через $\Pi_{00}H(\tau_0)$ с сопряженной переменной $\Pi_{00}\psi(\tau_0) = (\Pi_{00}p(\tau_0)', \Pi_{00}q(\tau_0)', \Pi_{00}s(\tau_0)')'$, т.е.

$$\Pi_{00}H(\tau_0) = <E_1\Pi_{00}\psi(\tau_0), 0> + <(E_2+E_3)\Pi_{00}\psi(\tau_0), (\mathbb{A}_0(0)\Pi_{00}w(\tau_0) + \\ + \mathbb{B}_0(0)\Pi_{00}u(\tau_0))> - \frac{1}{2} <\Pi_{00}w(\tau_0), \mathbb{W}_0(0)\Pi_{00}w(\tau_0)> - \\ - \frac{1}{2} <\Pi_{00}u(\tau_0), R_0(0)\Pi_{00}u(\tau_0)>,$$

а гамильтониан задачи Q_0P_0 через $Q_{00}H(\eta_0)$ с сопряженной переменной $Q_{00}\psi(\eta_0) = (Q_{00}p(\eta_0)', Q_{00}q(\eta_0)', Q_{00}s(\eta_0)')'$, т.е.

$$Q_{00}H(\eta_0) = <E_1Q_{00}p(\eta_0), 0> + <(E_2+E_3)Q_{00}\psi(\eta_0), (\mathbb{A}_0(T)Q_{00}w(\eta_0) + \\ + \mathbb{B}_0(T)Q_{00}u(\eta_0))> - \frac{1}{2} <Q_{00}w(\eta_0), \mathbb{W}_0(T)Q_{00}w(\eta_0)> - \\ - \frac{1}{2} <Q_{00}u(\eta_0), R_0(T)Q_{00}u(\eta_0)>$$

и выпишем условия оптимальности управления задач Π_0P_0, Q_0P_0:

$$\frac{d\Pi_{00}H}{d\Pi_{00}u} = 0,\ \frac{d\Pi_{00}H}{d\Pi_{00}z} = 0,$$

$$-\frac{d\Pi_{00}H}{d\Pi_{00}x} = \frac{d\Pi_{00}p}{d\tau_0},\ \Pi_{00}p(+\infty) = 0,\ -\frac{d\Pi_{00}H}{d\Pi_{00}y} = \frac{d\Pi_{00}q}{d\tau_0},\ \Pi_{00}q(+\infty) = 0,$$

$$\frac{dQ_{00}H}{dQ_{00}u} = 0,\ \frac{dQ_{00}H}{dQ_{00}z} = 0,$$

$$-\frac{dQ_{00}H}{dQ_{00}x} = \frac{dQ_{00}p}{d\eta_0},\ Q_{00}p(-\infty) = 0,\ -\frac{dQ_{00}H}{dQ_{00}y} = \frac{dQ_{00}q}{d\eta_0},\ \bar{q}_0(T) + Q_{00}q(0) = 0.$$

Из последних равенств следует, что оптимальное управление $\Pi_{00}u(\tau_0)$ задачи Π_0P_0 удовлетворяет условию

$$\Pi_{00}u(\tau_0) = R(0)^{-1}(\mathbb{B}_0(0)'(E_2+E_3)\Pi_{00}\psi(\tau_0)), \tag{32}$$

где $\Pi_{00}\psi(\tau_0)$ – решение задачи

$$(E_1+E_2)\frac{d\Pi_{00}\psi(\tau_0)}{d\tau_0} = \mathbb{W}_0(0)\Pi_{00}w(\tau_0) - \mathbb{A}_0(0)'(E_2+E_3)\Pi_{00}\psi(\tau_0), \tag{33}$$

$$\Pi_{00}p(+\infty) = 0,\ \Pi_{00}q(+\infty) = 0, \tag{34}$$

$\Pi_{00}w(\tau_0)$ – траектория системы (27), соответствующая управлению $\Pi_{00}u(\tau_0)$, а оптимальное управление $Q_{00}u(\eta_0)$ задачи Q_0P_0 – условию

$$Q_{00}u(\eta_0) = R(T)^{-1}(\mathbb{B}_0(T)'(E_2 + E_3)Q_{00}\psi(\eta_0)), \tag{35}$$

где $Q_{00}\psi(\eta_0)$ – решение задачи

$$(E_1 + E_2)\frac{dQ_{00}\psi(\eta_0)}{d\eta_0} = \mathbb{W}_0(T)Q_{00}w(\eta_0) - \mathbb{A}_0(T)'(E_2 + E_3)Q_{00}\psi(\eta_0), \tag{36}$$

$$Q_{00}p(-\infty) = 0,\ \bar{q}_0(T) + Q_{00}q(0) = 0, \tag{37}$$

$Q_{00}w(\eta_0)$ – траектория системы (30), соответствующая управлению $Q_{00}u(\eta_0)$.

После решения задач $\bar{P}_0$, Π_0P_0, P_0Q_0, функции $\bar{v}_0(t)$, $\Pi_{00}v(\tau_0)$, $Q_{00}v(\eta_0)$ найдены. Заметим, что члены разложения $\Pi_{01}x(\tau_0)$, $Q_{01}x(\eta_0)$ являются известными. Действительно, уравнения (8), (9) при $j = 1$ относительно $\Pi_{01}x(\tau_0)$, $Q_{01}x(\eta_0)$ имеют вид

$$\frac{d\Pi_{01}x(\tau_0)}{d\tau_0} = E_1(\mathbb{A}_0(0)\Pi_{00}w(\tau_0) + \mathbb{B}_0(0)\Pi_{00}u(\tau_0)),$$
$$\frac{dQ_{01}x(\eta_0)}{d\eta_0} = E_1(\mathbb{A}_0(T)Q_{00}w(\eta_0) + \mathbb{B}_0(T)Q_{00}u(\eta_0)).$$

Приравнивая коэффициенты при ε^2, рассмотрим коэффициент J_2 из разложения (6).

$$J_2 = \int\limits_0^T \bar{F}_2(t)\,dt + \int\limits_0^{+\infty} \Pi_{01}F(\tau_0)\,d\tau_0 + \int\limits_{-\infty}^0 Q_{01}F(\eta_0)\,d\eta_0 + {}$$
$$+ \int\limits_0^{+\infty} \Pi_{10}F(\tau_1)\,d\tau_1 + \int\limits_{-\infty}^0 Q_{10}F(\eta_1)\,d\eta_1,$$

где

$$\begin{aligned}\int\limits_0^T \bar{F}_2(t)\,dt = \int\limits_0^T (&<\bar{w}_2(t), \mathbb{W}_0(t)\bar{w}_0(t)> + <\bar{u}_2(t), R_0(t)\bar{u}_0(t)> + \\ &+ <\bar{w}_0(t), \mathbb{W}_1(t)\bar{w}_1(t)> + <\bar{u}_0(t), R_1(t)\bar{u}_1(t)> + [\hat{\bar{F}}_0(t)]_2)\,dt + \\ &+ \frac{1}{2}\int\limits_0^T (<\bar{w}_1(t), \mathbb{W}_0(t)\bar{w}_1(t)> + <\bar{u}_1(t), R_0(t)\bar{u}_1(t)>)\,dt,\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{+\infty} \Pi_{01}F(\tau_0)\,d\tau_0 = \int\limits_0^{+\infty} (&<\bar{w}_0(0), \mathbb{W}_0(0)\Pi_{01}w(\tau_0)> + <\bar{w}_1(0), \mathbb{W}_0(0)\Pi_{00}w(\tau_0)> + \\ &+ <\Pi_{00}w(\tau_0), \mathbb{W}_0(0)\Pi_{01}w(\tau_0)> + <\bar{u}_0(0), R_0(0)\Pi_{01}u(\tau_0)> + \\ &+ <\bar{u}_1(0), R_0(0)\Pi_{00}u(\tau_0)> + <\Pi_{00}u(\tau_0), R_0(0)\Pi_{01}u(\tau_0)> + [\hat{\Pi}_{00}F(\tau_0)]_1)\,d\tau_0,\end{aligned} \tag{39}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} Q_{01}F(\eta_0)\,d\eta_0 = \int\limits_{-\infty}^{0} (<\bar{w}_0(T), \mathbb{W}_0(T)Q_{01}w(\eta_0)> + <\bar{w}_1(T), \mathbb{W}_0(T)Q_{00}w(\eta_0)> +$$
$$+ <Q_{00}w(\eta_0), \mathbb{W}_0(T)Q_{01}w(\eta_0)> + <\bar{u}_0(T), R_0(T)Q_{01}u(\eta_0)> +$$
$$+ <\bar{u}_1(T), R_0(T)Q_{00}u(\eta_0)> + <Q_{00}u(\eta_0), R_0(T)Q_{01}u(\eta_0)> + [\hat{Q}_{00}F(\eta_0)]_1)\,d\eta_0, \tag{40}$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \Pi_{10}F(\tau_0)\,d\tau_0 = \int\limits_{0}^{+\infty} (<(\bar{w}_0(0) + \Pi_{00}w(0)), \mathbb{W}_0(0)\Pi_{10}w(\tau_0)> +$$
$$+ <(\bar{u}_0(0) + \Pi_{00}u(0)), R_0(0)\Pi_{10}u(\tau_0)>)\,d\tau_0 + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty} (<\Pi_{10}w(\tau_0), \mathbb{W}_0(0)\Pi_{10}w(\tau_0)> +$$
$$+ <\Pi_{10}u(\tau_0), R_0(0)\Pi_{10}u(\tau_0)>)\,d\tau_0, \tag{41}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} Q_{10}F(\eta_1)\,d\eta_1 = \int\limits_{-\infty}^{0} (<(\bar{w}_0(T) + Q_{00}w(0)), \mathbb{W}_0(T)Q_{10}w(\eta_1)> +$$
$$+ <(\bar{u}_0(T) + Q_{00}u(0)), R_0(T)Q_{10}u(\eta_1)>)\,d\eta_1 + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} (<Q_{10}w(\eta_1), \mathbb{W}_0(T)Q_{10}w(\eta_1)> +$$
$$+ <Q_{10}u(\eta_1), R_0(T)Q_{10}u(\eta_1)>)\,d\eta_1. \tag{42}$$

Преобразуя первый интеграл из (38), используя (20) - (22) и уравнения (7) при $j = 2$, подставляя полученное выражение в (38), находим выражение для регулярной части функционала J_2:

$$\int\limits_{0}^{T} \bar{F}_2(t)\,dt = -<\bar{p}_0(0), \bar{x}_2(0)> + <\bar{q}_0(T), \bar{y}_1(T)> - <\bar{q}_0(0), \bar{y}_1(0)> + <\bar{s}_0(T), \bar{z}_0(T)> -$$
$$- <\bar{s}_0(0), \bar{z}_0(0)> + \int\limits_{0}^{T} (<\bar{w}_1(t), \frac{1}{2}\mathbb{W}_0(t)\bar{w}_1(t) + [\hat{\rho}_0(t)]_1 - E_2\frac{d\bar{q}_0(t)}{dt}><\bar{w}_0(t), [\hat{\rho}_0(t)]_2> +$$
$$+ <\bar{u}_1(t), R_0(t)\bar{u}_1(t) + [\hat{\varrho}_0(t)]_1> + <\bar{u}_0(t), [\hat{\varrho}_0(t)]_2>)\,dt - \int\limits_{0}^{T} <\bar{z}_0(t), \frac{d\bar{s}_0(t)}{dt}>\,dt.$$

Рассуждая аналогичным образом, используя (20) - (22), (32), (33) и уравнения (8) при $j = 1$, получаем следующее представление для (39):

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \Pi_{01}F(\tau_0)\,d\tau_0 = -<\bar{p}_0(0), \Pi_{01}x(0)> - <\bar{p}_0(0), \Pi_{02}x(0)> - <\bar{q}_0(0), \Pi_{01}y(0)> -$$
$$- <\bar{s}_0(0), \Pi_{00}z(0)> - <\Pi_{00}p(0), \bar{x}_1(0)> - <\Pi_{00}p(0), \Pi_{01}x(0)> - <\Pi_{00}q(0), \bar{y}_1(0)> -$$

$$
\begin{gathered}
-<\Pi_{00}q(0),\Pi_{01}y(0)> + \int\limits_0^{+\infty}(<\Pi_{00}s(\tau_0),\frac{d\Pi_{00}z}{d\tau_0} - E_3[\hat{\Pi}_{00}f(\tau_0)]_1> - \\
-<\Pi_{00}q(\tau_0),E_2[\hat{\Pi}_{00}f(\tau_0)]_1> - <\bar{p}_0(0),\frac{d\Pi_{01}x}{d\tau_0}> - \\
-<\Pi_{00}p(\tau_0),\frac{d\Pi_{01}x}{d\tau_0}> + <\Pi_{00}q(\tau_0),(\frac{d\bar{y}_0}{d\tau_0}|_{\tau_0=0})> + [\hat{\Pi}_{00}F(\tau_0)]_1)\,d\tau_0.
\end{gathered}
\tag{43}
$$

Преобразованное с помощью условий оптимальности управления задач $\bar{P}_0$, Q_0P_0 значение функционала (40) имеет вид

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{-\infty}^{0} Q_{01}F(\eta_0)\,d\eta_0 = <\bar{q}_0(T),Q_{01}y(0)> + <\bar{s}_0(T),Q_{00}z(0)> + <Q_{00}p(0),\bar{x}_1(T)> + \\
+<Q_{00}p(0),Q_{01}x(0)> + <\bar{y}_1(T),Q_{00}q(0)> + <Q_{00}q(0),Q_{01}y(0)> + \\
+\int\limits_{-\infty}^{0}(<Q_{00}s(\eta_0),\frac{dQ_{00}z}{d\eta_0} - E_3[\hat{Q}_{00}f(\eta_0)]_1> - <Q_{00}q(\eta_0),E_2[\hat{Q}_{00}f(\eta_0)]_1> - \\
-<Q_{00}p(\eta_0),\frac{dQ_{01}x}{d\eta_0}> + <Q_{00}q(\eta_0),(\frac{d\bar{y}_0}{d\eta_0}|_{\eta_0=0})> + [\hat{Q}_{00}F(\eta_0)]_1)\,d\eta_0.
\end{gathered}
\tag{44}
$$

Интегралы в соотношениях (43), (44) представляют собой известные слагаемые.

Преобразуем далее первый интеграл из (41) с помощью условий оптимальности управления задач $\bar{P}_0$, Π_0P_0, задаваемых равенствами (20) - (22), (32), (33), соответственно, принимая во внимание уравнения (10) при $j=0$.

$$
\begin{gathered}
\int\limits_0^{+\infty}(<(\bar{w}_0(0)+\Pi_{00}w(0)),\mathbb{W}_0(0)\Pi_{10}w(\tau_1)> + <(\bar{u}_0(0)+\Pi_{00}u(0)),R_0(0)\Pi_{10}u(\tau_1)>)\,d\tau_1 = \\
= \int\limits_0^{+\infty}(<(\frac{d\bar{p}_0}{d\tau_1})|_{\tau_1=0} + \mathbb{A}_0(0)'\bar{\psi}_0(0),\Pi_{10}w(\tau_1)> + <(E_1+E_2)(\frac{d\Pi_{00}\psi}{d\tau_1})|_{\tau_1=0} + \\
+\mathbb{A}_0(0)'(E_2+E_3)\Pi_{00}\psi(0),\Pi_{10}w(\tau_1)> + <\mathbb{B}_0(0)'\bar{\psi}_0(0),\Pi_{10}u(\tau_1)> + \\
+<\mathbb{B}_0(0)'(E_2+E_3)\Pi_{00}\psi(0),\Pi_{10}u(\tau_1)>)\,d\tau_1 = \int\limits_0^{+\infty}(<\Pi_{10}x(\tau_1),(\frac{d\bar{p}_0}{d\tau_1})|_{\tau_1=0}> + \\
+<\bar{\psi}_0(0),\mathbb{A}_0(0)\Pi_{10}w(\tau_1)+\mathbb{B}_0(0)\Pi_{10}u(\tau_1)> + <\Pi_{10}x(\tau_1),(\frac{d\Pi_{00}p}{d\tau_1})|_{\tau_1=0}> + \\
+<\Pi_{10}y(\tau_1),(\frac{d\Pi_{00}q}{d\tau_1})|_{\tau_1=0}> + <\Pi_{00}\psi(0),(E_2+E_3)(\mathbb{A}_0(0)\Pi_{10}x(\tau_1) + \\
+\mathbb{B}_0(0)\Pi_{10}u(\tau_1))>)\,d\tau_1 = \int\limits_0^{+\infty}(<\bar{p}_0(0),\frac{d\Pi_{12}x}{d\tau_1}> + <\bar{q}_0(0),\frac{d\Pi_{11}y}{d\tau_1}> +
\end{gathered}
$$

$$\begin{aligned}&+ <\bar{s}_0(0), \frac{d\Pi_{10}z}{d\tau_1}> + <\Pi_{00}q(0), \frac{d\Pi_{11}y}{d\tau_1}> + <\Pi_{00}s(0), \frac{d\Pi_{10}z}{d\tau_1}>)\, d\tau_1 = \\ &= - <\bar{p}_0(0), \Pi_{12}x(0)> - <\bar{q}_0(0), \Pi_{11}y(0)> - <\bar{s}_0(0), \Pi_{10}z(0)> - \\ &- <\Pi_{00}q(0), \Pi_{11}y(0)> - <\Pi_{00}s(0), \Pi_{10}z(0)> .\end{aligned} \tag{45}$$

Применяя к первому слагаемому в (42) аналогичные преобразования интегрирования по частям с использованием условий оптимальности управления задач $\bar{P}_0$, Q_0P_0, учитывая вид уравнений (11) при $j = 0$, получаем равенство

$$\begin{aligned}&\int\limits_{-\infty}^{0} (<(\bar{w}_0(T) + Q_{00}w(0)), \mathbb{W}_0(T)Q_{10}w(\eta_1)> + \\ &+ <(\bar{u}_0(T) + Q_{00}u(0)), R_0(T)Q_{10}u(\eta_1)>)\, d\eta_1 =<\bar{q}_0(T), Q_{11}y(0)> + \\ &+ <\bar{s}_0(T), Q_{10}z(0)> + <Q_{00}q(0), Q_{11}y(0)> + <Q_{00}s(0), Q_{10}z(0)> .\end{aligned} \tag{46}$$

Подставляя (43) – (46) в соотношения (39) – (42), суммируя преобразованные выражения (38) – (42), составляющие функционал J_2, принимая во внимание начальные условия (13) – (18), отбрасывая известные после решения задач $\bar{P}_0$, Π_0P_0, Q_0P_0 слагаемые, получаем задачи оптимального управления $\bar{P}_1$, Π_1P_0, Q_1P_0, из которых найдем $\bar{v}_1(t) = (\bar{x}_1(t)', \bar{y}_1(t)', \bar{z}_1(t)', \bar{u}_1(t)')'$, $\Pi_{10}v(\tau_1) = (\Pi_{10}x(\tau_1)', \Pi_{10}y(\tau_1)', \Pi_{10}z(\tau_1)', \Pi_{10}u(\tau_1)')'$, $Q_{10}v(\eta_1) = (Q_{10}x(\eta_1)', Q_{10}y(\eta_1)', Q_{10}z(\eta_1)', Q_{10}u(\eta_1)')'$, т.е.

$$\begin{aligned}&\bar{P}_1: \ J_1(\bar{u}_1) =<\bar{x}_1(T), Q_{00}p(0)> + \frac{1}{2}\int\limits_0^T (<\bar{w}_1(t), \mathbb{W}_0(t)\bar{w}_1(t) + [\hat{\bar{\rho}}_0(t)]_1 - E_2\frac{d\bar{\psi}_0(t)}{dt}> + \\ &\qquad + <\bar{u}_1(t), R_0(t)\bar{u}_1(t) + [\hat{\bar{\varrho}}_0(t)]_1>)\, dt \to \min, \\ &E_1\frac{d\bar{w}_1(t)}{dt} + E_2\frac{d\bar{w}_0(t)}{dt} = \mathbb{A}_0(t)\bar{w}_1(t) + \mathbb{B}_0(t)\bar{u}_1(t) + [\hat{\bar{f}}_0(t)]_1, \\ &\bar{x}_1(0) + \Pi_{01}x(0) = 0, \\ &\Pi_1P_0: \ \Pi_1J_0(\Pi_{10}u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} (<\Pi_{10}w(\tau_1), \mathbb{W}_0(0)\Pi_{10}w(\tau_1)> + \\ &\qquad + <\Pi_{10}u(\tau_1), R_0(0)\Pi_{10}u(\tau_1)>)\, d\tau_1 \to \min,\end{aligned} \tag{47}$$

$$\frac{d\Pi_{10}w(\tau_1)}{d\tau_1} = E_3(\mathbb{A}_0(0)\Pi_{10}w(\tau_1) + \mathbb{B}_0(0)\Pi_{10}u(\tau_1)), \tag{48}$$

$$\begin{gathered}\Pi_{10}x(+\infty) = 0, \ \Pi_{10}y(+\infty) = 0, \\ \bar{z}_0(0) + \Pi_{00}z(0) + \Pi_{10}z(0) = z^0,\end{gathered} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}&Q_1P_0: \ Q_1J_0(Q_{10}u) =<Q_{10}z(0), (\bar{s}_0(T) + Q_{00}s(0))> + \\ &+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} (<Q_{10}w(\eta_1), \mathbb{W}_0(0)Q_{10}w(\eta_1)> + <Q_{10}u(\eta_1), R_0(T)Q_{10}u(\eta_1)>)\, d\eta_1 \to \min,\end{aligned} \tag{50}$$

$$\frac{dQ_{10}w(\eta_1)}{d\eta_1} = E_3(\mathbb{A}_0(T)Q_{10}w(\eta_1) + \mathbb{B}_0(T)Q_{10}u(\eta_1)), \tag{51}$$

$$Q_{10}w(-\infty) = 0. \tag{52}$$

При наших условиях линейно-квадратичные задачи $\bar{P}_1$, $\Pi_1 P_0$, $Q_1 P_0$ однозначно разрешимы. Обозначая функцию Гамильтона задачи $\bar{P}_1$ через $\bar{H}_1$ с сопряженными переменными $\bar{\psi}_1(t) = (\bar{p}_1(t)', \bar{q}_1(t)', \bar{s}_1(t)')'$, выпишем согласно [15] условия оптимальности

$$\frac{d\bar{H}_1}{d\bar{u}_1} = 0,\ \frac{d\bar{H}_1}{d\bar{y}_1} = 0,\ \frac{d\bar{H}_1}{d\bar{z}_1} = 0,\ -\frac{d\bar{H}_1}{d\bar{x}_1} = \frac{d\bar{p}_1}{dt},\ \bar{p}_1(T) + Q_{00}p(0) = 0.$$

Из последних соотношений следует, что оптимальное управление $\bar{u}_1(t)$ задачи $\bar{P}_1$ удовлетворяет условию

$$\bar{u}_1(t) = R_0(t)^{-1}(\mathbb{B}_0(t)'\bar{\psi}_1(t) - [\hat{\bar{\varrho}}_0(t)]_1),$$

где сопряженная переменная $\bar{\psi}_1(t)$ – решение задачи

$$E_1\frac{d\bar{\psi}_1(t)}{dt} = \mathbb{W}_0(t)\bar{w}_1(t) - \mathbb{A}_0(t)'\bar{\psi}_1(t) + [\bar{\rho}_0(t)]_1 - E_2\frac{d\bar{\psi}_0(t)}{dt},$$
$$\bar{p}_1(T) + Q_{00}p(0) = 0,$$

$\bar{w}_1(t)$ – траектория системы, соответствующая управлению $\bar{u}_1(t)$.

Обозначая функцию Гамильтона задачи $\Pi_1 P_0$ через $\Pi_{10}H$ с сопряженной переменной $\Pi_{10}\psi = (\Pi_{10}p(\tau_1)', \Pi_{10}q(\tau_1)', \Pi_{10}s(\tau_1)')'$, получаем следующие условия оптимальности:

$$\frac{d\Pi_{10}H}{d\Pi_{10}u} = 0,\ -\frac{d\Pi_{10}H}{d\Pi_{10}x} = \frac{d\Pi_{10}p}{d\tau_1},\ -\frac{d\Pi_{10}H}{d\Pi_{10}y} = \frac{d\Pi_{10}q}{d\tau_1},\ -\frac{d\Pi_{10}H}{d\Pi_{10}z} = \frac{d\Pi_{10}s}{d\tau_1},\ \Pi_{10}\psi(+\infty) = 0.$$

Из этих соотношений следует, что оптимальное управление $\Pi_{10}u(\tau_1)$ задачи $\Pi_1 P_0$ удовлетворяет условию

$$\Pi_{10}u(\tau_1) = R_0(0)^{-1}\mathbb{B}_0(0)'E_3\Pi_{10}\psi(\tau_1), \tag{53}$$

где сопряженная переменная $\Pi_{10}\psi(\tau_1)$ – решение задачи

$$\frac{d\Pi_{10}\psi(\tau_1)}{d\tau_1} = \mathbb{W}_0(0)\Pi_{10}w(\tau_1) - \mathbb{A}_0(0)'E_3\Pi_{10}\psi(\tau_1), \tag{54}$$

$$\Pi_{10}\psi(+\infty) = 0, \tag{55}$$

$\Pi_{10}w(\tau_1)$ – траектория системы, соответствующая управлению $\Pi_{10}u(\tau_1)$.

Аналогичным образом получаем соотношения для управления $Q_{10}u(\eta_1)$ задачи $Q_1 P_0$

$$Q_{10}u(\eta_1) = R_0(T)^{-1}\mathbb{B}_0(T)'E_3Q_{10}\psi(\eta_1), \tag{56}$$

где сопряженная переменная $Q_{10}\psi(\eta_1)$ – решение задачи

$$\frac{dQ_{10}\psi(\eta_1)}{d\eta_1} = \mathbb{W}_0(T)Q_{10}w(\eta_1) - \mathbb{A}_0(T)'E_3Q_{10}\psi(\eta_1), \tag{57}$$

$$Q_{10}p(-\infty) = 0,\ Q_{10}q(-\infty) = 0,\ \bar{s}_0(T) + Q_{00}s(0) + Q_{10}s(0) = 0. \tag{58}$$

$Q_{10}w(\eta_1)$ – траектория системы, соответствующая управлению $Q_{10}u(\eta_1)$.

Итак, коэффициент J_0 в разложении (6) зависит от решения однозначно разрешимой задачи $\bar{P}_0$. Отбрасывая в J_1 слагаемые, известные после решения задачи $\bar{P}_0$, получаем сумму критериев качества для однозначно разрешимых задач $\Pi_0 P_0$, $Q_0 P_0$. Преобразуя J_2 за счет условий оптимальности управления задач $\bar{P}_0$, $\Pi_0 P_0$, $Q_0 P_0$, отбрасывая известные слагаемые, получаем критерии качества для однозначно разрешимых $\Pi_1 P_0$, $Q_1 P_0$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Члены разложения нулевого порядка $\bar{v}_0(t)$, $\Pi_{00}v(\tau_0)$, $Q_{00}v(\eta_0)$, $\Pi_{10}v(\tau_1)$, $Q_{10}v(\eta_1)$ являются решениями построенных задач оптимального управления $\bar{P}_0$, $\Pi_0 P_0$, $Q_0 P_0$, $\Pi_1 P_0$, $Q_1 P_0$.*

Применяя принцип максимума Л.С. Понтрягина к линейно-квадратичной задаче (1) – (3), сформулируем необходимое и достаточное условия оптимальности управления. Для того, чтобы при достаточно малых $\varepsilon \geq 0$, $t \in [0, T]$ управление $u_*(t, \varepsilon)$, было оптимальным в задаче P_ε, необходимо и достаточно, чтобы функция $u_*(t, \varepsilon)$ имела следующий вид:

$$u_*(t, \varepsilon) = R(t, \varepsilon)^{-1} \mathbb{B}(t, \varepsilon)' \xi(t, \varepsilon), \tag{59}$$

где сопряженная переменная $\xi(t, \varepsilon) = (\zeta(t, \varepsilon)', \theta(t, \varepsilon)', \chi(t, \varepsilon)')'$ является решением задачи

$$\mathbb{E}(\varepsilon) \frac{d\xi(t, \varepsilon)}{dt} = \mathbb{W}(t, \varepsilon) w_*(t, \varepsilon) - \mathbb{A}(t, \varepsilon)' \xi(t, \varepsilon), \tag{60}$$

$$\xi(T, \varepsilon) = 0, \tag{61}$$

$w_*(t, \varepsilon)$ – траектория системы (2), соответствующая управлению $u = u_*(t)$. При достаточно малых $\varepsilon > 0$ задача P_ε однозначно разрешима.

Подставим в систему (2), (3), (59) – (61) вместо $v(t, \varepsilon)$ разложение (4), а вместо $\xi(t, \varepsilon)$ разложение

$$\xi(t, \varepsilon) = \bar{\xi}(t, \varepsilon) + \sum_{i=0}^{1} (\Pi_i \xi(\tau_i) + Q_i \xi(\eta_i)), \tag{62}$$

где каждое из слагаемых допускает асимптотическое разложение по степеням малого параметра. Правые части соотношений (2), (59), (60) представим в виде асимптотической суммы слагаемых, зависящих от t, τ_i, η_i, $i = 0, 1$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в (59) – (61), получаем

$$\bar{u}_0 = R_0(t)^{-1} \mathbb{B}_0(t)' \bar{\xi}_0(t), \tag{63}$$

$$E_1 \frac{d\bar{\xi}_0(t)}{dt} = \mathbb{W}_0(t) \bar{w}_0(t) - \mathbb{A}_0(t)' \bar{\xi}_0(t), \tag{64}$$

$$\bar{\zeta}_0(T) + Q_{00}\zeta(0) + Q_{10}\zeta(0) = 0, \tag{65}$$

$$\Pi_{00}u(\tau_0) = R_0(0)^{-1} \mathbb{B}_0(0)' \Pi_{00}\xi(\tau_0),$$

$$\frac{d\Pi_{00}\zeta(\tau_0)}{d\tau_0} = 0, \ \Pi_{00}\zeta(+\infty) = 0, \tag{66}$$

$$E_1\frac{d\Pi_{01}\xi(\tau_0)}{d\tau_0}+E_2\frac{d\Pi_{00}\xi(\tau_0)}{d\tau_0}=\mathbb{W}_0(0)\Pi_{00}w(\tau_0)-\mathbb{A}_0(0)'(E_2+E_3)\Pi_{00}\xi(\tau_0),$$
$$E_1\Pi_{01}\xi(+\infty)=0,\ E_2\Pi_{00}\xi(+\infty)=0,$$
$$Q_{00}u(\eta_0)=R_0(T)^{-1}\mathbb{B}_0(T)'Q_{00}\xi(\eta_0),$$
$$\frac{dQ_{00}\zeta(\eta_0)}{d\eta_0}=0,\ Q_{00}\zeta(-\infty)=0, \tag{67}$$

$$E_1\frac{dQ_{01}\xi(\eta_0)}{d\eta_0}+E_2\frac{dQ_{00}\xi(\eta_0)}{d\eta_0}=\mathbb{W}_0(T)Q_{00}w(\eta_0)-\mathbb{A}_0(T)'(E_2+E_3)Q_{00}\xi(\eta_0),$$
$$\bar{\zeta}_1(T)+Q_{01}\zeta(0)+Q_{11}\zeta(0)=0,\ \bar{\theta}_0(T)+Q_{00}\theta(0)+Q_{10}\theta(0)=0, \tag{68}$$

$$\Pi_{10}u(\tau_1)=R_0(0)^{-1}\mathbb{B}_0(0)'\Pi_{10}\xi(\tau_1),$$
$$\frac{d\Pi_{10}\zeta(\tau_1)}{d\tau_1}=0,\ \frac{d\Pi_{10}\theta(\tau_1)}{d\tau_1}=0,\ \Pi_{10}\zeta(+\infty)=0,\ \Pi_{10}\theta(+\infty)=0,$$
$$\frac{d\Pi_{11}\zeta(\tau_1)}{d\tau_1}=0,\ \Pi_{11}\zeta(+\infty)=0, \tag{69}$$

$$E_1\frac{d\Pi_{12}\xi(\tau_1)}{d\tau_1}+E_2\frac{d\Pi_{11}\xi(\tau_1)}{d\tau_1}+E_3\frac{d\Pi_{10}\xi(\tau_1)}{d\tau_1}=\mathbb{W}_0(0)\Pi_{10}w(\tau_1)-\mathbb{A}_0(0)'E_3\Pi_{10}\xi(\tau_1),$$
$$E_1\Pi_{12}\xi(+\infty)=0,\ E_2\Pi_{11}\xi(+\infty)=0,\ E_3\Pi_{10}\xi(+\infty)=0,$$
$$Q_{10}u(\eta_1)=R_0(T)^{-1}\mathbb{B}_0(T)'Q_{10}\xi(\eta_1),$$
$$\frac{dQ_{10}\zeta(\eta_1)}{d\eta_1}=0,\ \frac{dQ_{10}\theta(\eta_1)}{d\eta_1}=0,\ Q_{10}\zeta(-\infty)=0,\ Q_{10}\theta(-\infty)=0,$$
$$\frac{dQ_{11}\zeta(\eta_1)}{d\eta_1}=0,\ Q_{11}\zeta(-\infty)=0, \tag{70}$$

$$E_1\frac{dQ_{12}\xi(\eta_1)}{d\eta_1}+E_2\frac{dQ_{11}\xi(\eta_1)}{d\eta_1}+E_3\frac{dQ_{10}\xi(\eta_1)}{d\eta_1}=\mathbb{W}_0(T)Q_{10}w(\eta_1)-\mathbb{A}_0(T)'E_3Q_{10}\xi(\eta_1)',$$
$$\bar{\chi}_0(T)+Q_{00}\chi(0)+Q_{10}\chi(0)=0. \tag{71}$$

Из уравнений (66), (67), (69), (70) в силу экспоненциального характера пограничных функций (5), получаем $\Pi_{00}\zeta(\tau_0)=\Pi_{10}\zeta(\tau_1)=\Pi_{11}\zeta(\tau_1)=Q_{00}\zeta(\eta_0)=Q_{10}\zeta(\eta_1)=Q_{11}\zeta(\eta_1)=0,\ \Pi_{10}\theta(\tau_1)=Q_{10}\theta(\eta_1)=0$. Тогда условия (65), (68) примут вид

$$\bar{\zeta}_0(T)=0,\ \bar{\theta}_0(T)+Q_{00}\theta(0)=0. \tag{72}$$

Из равенства коэффициентов в (2) получаем уравнения состояния (19) в вырожденной задаче, а также уравнения состояния с соответствующими начальными условиями (27), (28), (30), (31), (48), (49), (51), (52) для пограничных функций в задачах Π_iP_0, Q_iP_0, $i=0,1$. Из равенства коэффициентов при ε^0 в (59), (60), зависящих от t, задаваемых выражениями (63), (64), получаем соотношения из условий оптимальности управления в задаче $\bar{P}_0$ (21) - (22). Учитывая начальные условия (13) – (18) для переменных состояния, а также соотношения для сопряженных переменных (21), (34), (37), (55), (58) в задачах $\bar{P}_0$, Π_0P_0, Q_0P_0, Π_1P_0, Q_0P_0, соответственно, учитывая соотношения (71), (72), получаем равенство $\bar{\xi}_0(t)=\bar{\psi}_0(t)$. Таким образом, система для нахождения приближения нулевого порядка для регулярных членов асимптотики решения задачи (1), (2), (60), (61), вытекающей из условия оптимальности управления для задачи P_ε, совпадает с системой, получаемой из условий оптимальности управления в вырожденной задаче $\bar{P}_0$.

Аналогичным образом, следуя алгоритму метода прямой схемы асимптотического решения задач оптимального управления, можно показать справедливость равенств $Q_{01}\zeta(\eta_0) = Q_{00}p(\eta_0)$, $Q_{00}\theta(\eta_0) = Q_{00}q(\eta_0)$, $Q_{00}\chi(\eta_0) = Q_{00}s(\eta_0)$, $\Pi_{12}\zeta(\tau_1) = \Pi_{10}p(\tau_1)$, $\Pi_{11}\theta(\tau_1) = \Pi_{10}q(\tau_1)$, $\Pi_{10}\chi(\tau_1) = \Pi_{10}s(\tau_1)$, $Q_{12}\zeta(\eta_1) = Q_{10}p(\eta_1)$, $Q_{11}\theta(\eta_1) = Q_{10}q(\eta_1)$, $Q_{10}\chi(\eta_1) = Q_{10}s(\eta_1)$.

В результате справедлива

Теорема 2. *Задачи, полученные из условий оптимальности управления в* $\bar{P}_0$, $\Pi_0 P_0$, Q_0P_0, Π_1P_0, Q_1P_0, *совпадают соответственно с задачами для* $(\bar{v}_0(t), \bar{\xi}_0(t))$, $(\Pi_{00}v(\tau_0), E_1\Pi_{01}\xi(\tau_0) + (E_2+E_3)\Pi_{00}\xi(\tau_0))$, $(Q_{00}v(\eta_0), E_1Q_{01}\xi(\eta_0) + (E_2+E_3)Q_{00}\xi(\eta_0))$, $(\Pi_{10}v(\tau_1), E_1\Pi_{12}\xi(\tau_1) + E_2\Pi_{11}\xi(\tau_1) + E_3\Pi_{10}\xi(\tau_1))$, $(Q_{10}v(\eta_1), E_1Q_{12}\xi(\eta_1) + E_2Q_{11}\xi(\eta_1) + E_3Q_{10}\xi(\eta_1))$ *из асимптотики* (4), (62) *решения задачи* (2), (60), (61), *вытекающей из условий оптимальности управления для задачи* P_ε.

3. Пример

Рассматривается следующая задача:

$$J(u) = \int_0^1 (u^2 + tu + y + z)\, dt \to \min, \tag{73}$$

$$\frac{dx}{dt} = x + u,\ x(0) = 10, \tag{74}$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = -y + u,\ y(0) = 10, \tag{75}$$

$$\varepsilon^2\frac{dz}{dt} = -z - u,\ z(0) = 10. \tag{76}$$

Решение задачи (73) – (76) имеет вид

$$u(t,\varepsilon) = \frac{1}{2}(-t + e^{\frac{t-1}{\varepsilon}} - e^{\frac{t-1}{\varepsilon^2}}),\ x(t,\varepsilon) = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon e^{\frac{t-1}{\varepsilon}}}{2(1-\varepsilon)} - \frac{\varepsilon^2 e^{\frac{t-1}{\varepsilon^2}}}{2(1-\varepsilon^2)} + c_1e^t,$$

$$y(t,\varepsilon) = -\frac{t}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{e^{\frac{t-1}{\varepsilon}}}{4} - \frac{e^{\frac{t-1}{\varepsilon^2}}}{2(\frac{1}{\varepsilon}+1)} + c_2e^{-\frac{t}{\varepsilon}},$$

$$z(t,\varepsilon) = -\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{t}{2} - \frac{e^{\frac{t-1}{\varepsilon}}}{2(1+\varepsilon)} + \frac{e^{\frac{t-1}{\varepsilon^2}}}{4} + c_3e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}},$$

$$c_1 = \frac{1}{2}(19 - \frac{\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{(1-\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2 e^{-\frac{1}{\varepsilon^2}}}{(1-\varepsilon^2)}),\ c_2 = 10 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{4} + \frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon^2}}}{2(\frac{1}{\varepsilon}+1)},$$

$$c_3 = 10 + \frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{2(1+\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon^2}}}{4}.$$

Применяя вышеизложенный алгоритм метода прямой схемы, найдем приближение нулевого порядка асимптотического решения задачи (73) – (76).

Вырожденная задача в нашем случае имеет вид:

$$\bar{P}_0: \ \bar{J}_0(\bar{u}_0) = \int\limits_0^1 (\bar{u}_0^2(t) + t\bar{u}_0(t) + \bar{y}_0(t) + \bar{z}_0(t))\, dt \to \min,$$

$$\frac{d\bar{x}_0(t)}{dt} = \bar{x}_0(t) + \bar{u}_0(t), \ \bar{x}_0(0) = 10,$$
$$0 = -\bar{y}_0(t) + \bar{u}_0(t), \ 0 = -\bar{z}_0(t) - \bar{u}_0(t).$$

Учитывая (20) – (22), получаем решение задачи $\bar{P}_0$: $\bar{u}_0(t) = -\frac{t}{2}, \ \bar{x}_0(t) = \frac{1}{2}(t + 1 + 19e^t), \ \bar{y}_0(t) = -\frac{t}{2}, \ \bar{z}_0(t) = \frac{t}{2}, \ \bar{p}_0(t) = 0, \ \bar{q}_0(t) = -1, \ \bar{s}_0(t) = -1.$

Выпишем задачи $\Pi_0 P_0$, $Q_0 P_0$ (см. (26) – (28), (29) – (31)), из которых найдем $\Pi_{00}v(\tau_0)$, $Q_{00}v(\eta_0)$.

$$\Pi_0 P_0: \ \Pi_0 J(\Pi_{00}u(\tau_0)) = \int\limits_0^{+\infty} (\Pi_{00}u(\tau_0))^2\, d\tau_0 \to \min,$$
$$\frac{d\Pi_{00}x(\tau_0)}{d\tau_0} = 0, \ \Pi_{00}x(+\infty) = 0,$$
$$\frac{d\Pi_{00}y(\tau_0)}{d\tau_0} = -\Pi_{00}y(\tau_0) + \Pi_{00}u(\tau_0), \ \bar{y}_0(0) + \Pi_{00}y(0) = 10, \ 0 = -\Pi_{00}z(\tau_0) - \Pi_{00}u(\tau_0),$$

$$Q_0 P_0 : Q_0 J_0(Q_{00}u) = -Q_{00}y(0) + \int\limits_{-\infty}^0 (Q_{00}u(\eta_0))^2\, d\eta_0 \to \min,$$
$$\frac{dQ_{00}x(\eta_0)}{d\eta_0} = 0, \ Q_{00}x(-\infty) = 0,$$
$$\frac{dQ_{00}y(\eta_0)}{d\eta_0} = -Q_{00}y(\eta_0) + Q_{00}u(\eta_0), \ Q_{00}y(-\infty) = 0, \ 0 = -Q_{00}z(\eta_0) - Q_{00}u(\eta_0).$$

Учитывая (12), (32) – (37), получаем решение задач $\Pi_0 P_0$, $Q_0 P_0$, т.е.

$$\Pi_{00}u(\tau_0) = 0, \ \Pi_{00}z(\tau_0) = 0, \ \Pi_{00}q(\tau_0) = 0, \ \Pi_{00}y(\tau_0) = c_2 e^{-\tau_0}.$$
$$Q_{00}u(\eta_0) = \frac{e^{\eta_0}}{2}, \ Q_{00}y(\eta_0) = \frac{e^{\eta_0}}{4}, \ Q_{00}z(\eta_0) = -\frac{e^{\eta_0}}{2}, \ Q_{00}q(\eta_0) = e^{\eta_0},$$
$$Q_{00}p(\eta_0) = \Pi_{00}p(\tau_0) = 0, \ \Pi_{00}s(\tau_0) = Q_{00}s(\eta_0) = 0.$$

Выпишем задачи $\Pi_1 P_0$, $Q_1 P_0$ (см. (47) – (49), (50) – (52)):

$$\Pi_1 P_0: \ \Pi_1 J_0(\Pi_{10}u) = \int\limits_0^{+\infty} (\Pi_{10}u(\tau_1))^2\, d\tau_1 \to \min,$$

$$\frac{d\Pi_{10}x(\tau_1)}{d\tau_1} = 0, \ \Pi_{10}x(+\infty) = 0, \ \frac{d\Pi_{10}y(\tau_1)}{d\tau_1} = 0, \ \Pi_{10}y(+\infty) = 0,$$

$$\frac{d\Pi_{10}z(\tau_1)}{d\tau_1} = -\Pi_{10}z(\tau_1) - \Pi_{10}u(\tau_1),\ \bar{z}_0(0) + \Pi_{00}z(0) + \Pi_{10}z(0) = 10.$$

$$Q_1P_0:\ Q_1J_0(Q_{10}u) = -Q_{10}z(0) + \int\limits_{-\infty}^{0} (Q_{10}u(\eta_1))^2\,d\eta_1 \to \min,$$

$$\frac{dQ_{10}x(\eta_1)}{d\eta_1} = 0,\ Q_{10}x(-\infty) = 0,\ \frac{dQ_{10}y(\eta_1)}{d\eta_1} = 0,\ Q_{10}y(-\infty) = 0,$$

$$\frac{dQ_{10}z(\eta_1)}{d\eta_1} = -Q_{10}z(\eta_1) - Q_{10}u(\eta_1),\ Q_{10}z(-\infty) = 0.$$

Учитывая (53) – (58), выпишем решение задач Π_1P_0, Q_1P_0

$$\Pi_{10}u(\tau_1) = 0,\ \Pi_{10}p(\tau_1) = Q_{10}p(\eta_1) = 0,\ \Pi_{10}q(\tau_1) = Q_{10}q(\eta_1) = 0,$$
$$\Pi_{10}z(\tau_1) = 10e^{-\tau_1},\ Q_{10}u(\eta_1) = -\frac{e^{\eta_1}}{2},\ Q_{10}z(\eta_1) = \frac{e^{\eta_1}}{4},\ Q_{10}s(\eta_1) = e^{\eta_1}.$$

В результате, получаем приближение нулевого порядка решения задачи (73) – (76)

$$x_0(t) = \frac{1}{2}(1 + t + 19e^t),\ y_0(t) = -\frac{t}{2} + 10e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + \frac{e^{\frac{t-1}{\varepsilon}}}{4},$$
$$z_0(t) = \frac{t}{2} + 10e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}} - \frac{e^{\frac{t-1}{\varepsilon}}}{2} + \frac{e^{\frac{t-1}{\varepsilon^2}}}{4},\ u_0(t) = \frac{1}{2}(-t + e^{\frac{t-1}{\varepsilon}} - e^{\frac{t-1}{\varepsilon^2}}).$$

Результаты вычислений при $\varepsilon = 0.25$ для управления представлены на Рис. 1, где сплошная кривая означает оптимальное управление u_* задачи P_ε, штрих-пунктирная кривая – оптимальное управление $\bar{u}_0$ вырожденной задачи $\bar{P}_0$, точками обозначено приближение нулевого порядка u_0 для оптимального управления.

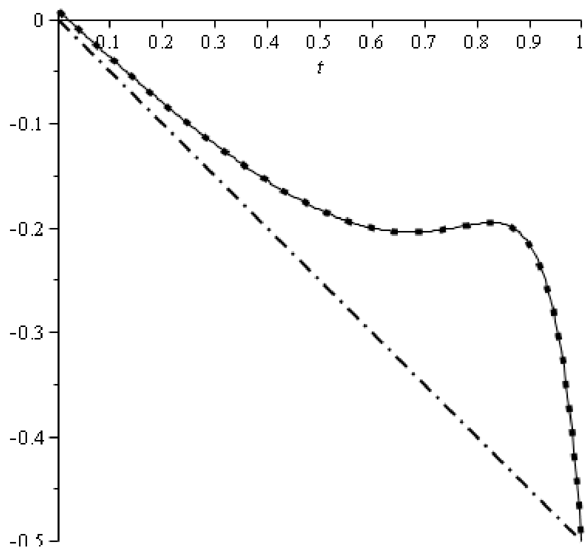

Рис. 1. Оптимальное управление и его приближения

Список литературы

1. Khalil H.K., Kokotovic P.V. Control of Linear Systems with Multiparameter Singular Perturbations // Automatica. 1979. V. 15, Iss. 2. P. 197–207.

2. Грибковская И.В., Калинин А.И. Асимптотическая оптимизация линейной сингулярно возмущенной системы, содержащей при производных параметры различных порядков малости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1995. Т. 35, №9. С. 1299–1312. (English transl.: Gribkovskaya I.V., Kalinin A.I. Asymptotic optimization of a linear singularly perturbed system containing parameters of variable orders of smallness at the derivatives // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1995. V. 35, No. 9. P. 1041–1051.)

3. Воропаева Н.В., Соболев В.А. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. М.: Физматлит, 2009. (Voropaeva N.V., Sobolev V.A. Geometricheskaya dekompozitsiya singulyarno vozmushchennykh sistem. Moskva: Fizmatlit, 2009 [in Russian].)

4. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. (Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. Asimptoticheskie razlozheniya resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy. Moskva: Nauka, 1973 [in Russian].)

5. Saksena V.R., O'Reilly J., Kokotovic P.V. Singular Perturbations and Time-scale Methods in Control Theory: Survey 1976–1983 // Automatica. 1984. V. 20, No. 3. P. 273–293.

6. Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. №1. С. 3-51.(English transl.: Dmitriev M.G., Kurina G.A. Singular perturbations in control problems // Automation and Remote Control. 2006. V. 67, Iss. 1. P. 1–43.)

7. Zhang Y., Naidu D.S., Cai C.X., Zou Y. Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002–2012 // Int. J. Inf. Syst. Sci. 2014. V. 9, No 1. P. 1–36.

8. Ladde G.S., Šiljak D.D. Multiparameter Singular Perturbations of Linear Systems with Multiple Time Scales // Automatica. 1983. V. 19, No. 4. P. 385–394.

9. Курина Г.А. О полной управляемости разнотемповых сингулярно возмущенных систем // Математические заметки. 1992. Т. 52, Вып. 4. С. 56–61. (English transl.: Kurina G.A. Complete controllability of various-speed singularly perturbed systems // Mathematical Notes. 1992. V. 52, Iss. 4. P. 1029–1033.)

10. Данилин А.Р., Коврижных О.О. Об асимптотике решения системы линейных уравнений с двумя малыми параметрами // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44, №6. С. 738–747. (English transl.: Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. On the Asymptotics of the Solution of a System of Linear Equations with Two Small Parameters // Differential Equations. 2008. V. 44, No. 6. P. 757–767.)

11. Wang Y.Y., Frank P.M., Wu N.E. Near-Optimal Control of Nonstandard Singularly Perturbed Systems // Automatica. 1994. V. 30, No. 2. P. 277–292.

12. Mukaidani H., Xu H., Mizukami K. New Results for near-optimal control of linear multiparameter singularly perturbed systems // Automatica. 2003. V. 39. P. 2157–2167.

13. Белокопытов С.В., Дмитриев М.Г. Решение классических задач оптимального управления с погранслоем // Автоматика и телемеханика. 1989. Вып. 7. С. 71–82. (English transl.: Belokopytov S.V., Dmitriev M.G. Solution of classical optimal control problems with a boundary layer // Automation and Remote Control. 1989. V 50, No 7. P. 907–917.)

14. Розоноэр Л.И. Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем. I. // Автоматика и телемеханика. 1959. Т. 20, №10. С. 1320–1334. (Rozonoer L.I. Printsip maksimuma L.S. Pontryagina v teorii optimalnykh sistem. I. // Avtomatika i telemekhanika. 1959. T. 20, No 10. S. 1320–1334 [in Russian].)

15. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. (English transl.: Pontryagin L.S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishechenko E. F. The mathematical theory of optimal processes. New York, Interscience Publishers. 1962.)

Zero-order Approximation of Three-time Scale Singular Linear-quadratic Optimal Control Problem

Kalashnikova M. A.

Voronezh State University, Universitetskaya pl., 1, Voronezh, 394006, Russia

Keywords: linear-quadratic optimal control problem, singular perturbations, asymptotic expansion, multi-time scale systems

This paper is devoted to the construction of a zero-order approximation of the solution of a three-time scale singular perturbed linear-quadratic optimal control problem with the help of the direct scheme method. The algorithm of the method consists in immediate substituting a postulated asymptotic expansion of solution into the problem condition and constructing a family of control problems to define the terms of the asymptotic expansion. Asymptotic approximation of the solution contains regular functions and four boundary ones of exponential type which are determined from the five linear-quadratic optimal control problems. It is shown, that the system of equations for a zero-order approximation appeared from control optimality conditions of the initial perturbed problem corresponds to control optimality conditions appeared in respective five optimal control problems constructed for finding zero-order asymptotic approximation with the help of the direct scheme method. An illustrative example is given.

Сведения об авторе:
Калашникова Маргарита Александровна,
Воронежский государственный университет,
аспирант кафедры математического анализа