

УДК 532.592

Особенности формирования диссипативных структур, описываемых уравнением Курамото–Сивашинского

Кудряшов Н. А.¹, Рябов П. Н.², Петров Б. А.³

*Национальный Исследовательский Ядерный Университет МИФИ
115409 Россия, г. Москва, Каширское шоссе, 31*

e-mail: nakudryashov@mephi.ru, pnryabov@mephi.ru

получена 20 декабря 2014

Ключевые слова: уравнение Курамото–Сивашинского, самоорганизация, структуры, псевдоспектральный метод, численное моделирование

Рассматриваются процессы самоорганизации диссипативных структур в физических системах, описываемых уравнением Курамото–Сивашинского. Разработан вычислительный алгоритм, позволяющий проводить моделирование процессов, описываемых данным уравнением. Проведено тестирование и продемонстрирована эффективность вычислительной процедуры. Исследован процесс формирования диссипативных структур в зависимости от параметров модели. При помощи метода циклической свертки определен диапазон изменения управляющего параметра, при котором имеют место процессы самоорганизации, а также исследованы качественные и количественные характеристики рассматриваемого процесса. В частности получена зависимость амплитуды сформировавшейся структуры от величины управляющего параметра.

Введение

К важным направлениям нелинейной математической физики относятся процессы произвольного или вынужденного образования устойчивых структур, возникающих в результате эволюции неустойчивости в неравновесных системах. В настоящее время данные структуры называются диссипативными, и интерес к их изучению проявляется в течение нескольких десятилетий.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта для поддержки ведущих научных школ РФ № 2296.2014.1 и гранта РФФИ 14-01-00493-а.

²Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 14-01-31078 и гранта для поддержки молодых ученых – кандидатов наук № 3694.2014.1.

³Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 14-01-31078.

Известно, что процессы образования диссипативных структур имеют место лишь в системах, описываемых нелинейными математическими моделями. В качестве одной из математических моделей, допускающих процессы формирования диссипативных структур, рассмотрим модель, основу которой составляет нелинейное эволюционное уравнение Курамото–Сивашинского в виде

$$u_t + uu_x + u_{xx} + \delta u_{xxx} + u_{xxxx} = 0, \quad (1)$$

впервые полученное в работах [1, 2]. Данное уравнение возникает во многих приложениях, в частности, при описании процессов самоорганизации кластеров наноструктур на поверхности полупроводниковых подложек при ионной бомбардировке [3], при стекании жидкости по наклонной плоскости [4] и т.д. Ранее уравнение (1) изучалось с различных позиций. Так, в работе [5] построены точные решения данного уравнения в виде уединенных волн и кинков, в [6] найдены решения, выраженные через эллиптические функции. Численное моделирование волновых процессов, описываемых (1) и его обобщениями, проведено в работах [7–10]. В данных работах показано, что дисперсионное слагаемое δu_{xxx} в уравнении Курамото–Сивашинского приводит к появлению пространственно-однородных волновых структур, в виде гребней, в том случае, когда $\delta \gtrsim \delta^* = 0.3$. Однако для определения величины управляющего параметра δ^* авторы использовали не количественные критерии, а качественные оценки, что привело к неточному значению величины δ^* . Целью настоящей работы является разработка количественного критерия для уточнения величины параметра δ^* , а также разработка эффективного численного алгоритма, позволяющего проводить математическое моделирование волновых процессов, описываемых уравнением (1).

1. Численный алгоритм

Для уравнения (1) рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + u_{xx} + \delta u_{xxx} + u_{xxxx} &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \\ u_{ix}(0, t) &= u_{ix}(H, t), \quad i = 0 \dots 3, \end{aligned} \quad (2)$$

где $u_{ix} = \partial^i u / \partial x^i$, H – период. Для решения данной задачи воспользуемся псевдоспектральным методом [11]. Суть данного метода заключается в сведении рассматриваемой задачи для уравнения в частных производных к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с использованием преобразования Фурье по пространственной переменной.

Запишем задачу (2) в виде

$$\begin{aligned} u_t &= \mathbf{L}u + \mathbf{N}[u], \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь \mathbf{L} , \mathbf{N} – линейный и нелинейный операторы, входящие в уравнение (1). Применяя к (3) преобразование Фурье, находим

$$v_t = \tilde{\mathbf{L}}v + \tilde{\mathbf{N}}[v], \quad v(x, 0) = v_0, \quad (4)$$

где величины $v, v_0, \tilde{\mathbf{L}}$ и $\tilde{\mathbf{N}}$ – образы в пространстве Фурье, величин u, u_0, \mathbf{L} и \mathbf{N} соответственно. Преобразование Фурье линейного оператора вычисляется по формуле

$$\tilde{\mathbf{L}} = k^2 - k^4 + i\delta k^3, \quad (5)$$

где k представляет собой волновой вектор. В свою очередь, для построения преобразования Фурье нелинейного слагаемого, используется следующая цепочка равенств:

$$\tilde{\mathbf{N}} = \text{ПФ}[uu_x] = \text{ПФ}\left[\frac{u^2}{2}\right]_x = \frac{ik}{2}\text{ПФ}[u^2], \quad (6)$$

где ПФ – преобразование Фурье. Отметим, что для того чтобы предотвратить возникновение вычислительных ошибок и других негативных эффектов, связанных с применением преобразования Фурье к нелинейным слагаемым, в работе используется экспоненциальное сглаживание волновых чисел, описание которого можно найти в работе [12].

Как известно, для решения задачи (4) в Фурье пространстве, существует множество методов, которые различаются порядком аппроксимации, устойчивостью и экономичностью. В данной работе рассмотрены три наиболее используемых метода, а именно IFRK4 – метод интегрирующего множителя [13], ETDRK4 – метод экспоненциальных временных множителей [14] и AB4BD4 – метод Адамса–Бешфорта [15]. Все рассматриваемые методы являются методами четвертого порядка аппроксимации. В основе данных методов лежат различные подходы к численному решению задачи Коши, поэтому, проведя тестирование данных методов на точном решении задачи (2), выбран наиболее эффективный метод, показавший лучшие результаты. В качестве точного решения использовалось решение уравнения (1) в виде уединенной волны, полученное при $\delta = 4$ и имеющее вид

$$u_0(x) = C_0 + 9 - 15 \tanh\left(\frac{x - x_0}{2}\right) - 15 \tanh^2\left(\frac{x - x_0}{2}\right) + 15 \tanh^3\left(\frac{x - x_0}{2}\right), \quad (7)$$

где C_0, x_0 – произвольные постоянные.

Результаты сравнения численного и точного решений приведены на Рис. 1. Для определения погрешности вычислительного метода использовалась величина относительной интегральной метрики [13], задаваемой следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{\left(\sum_{j=1}^N |u_j^{exact} - u_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{j=1}^N |u_j^{exact}|^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (8)$$

где N – количество узлов расчетной сетки.

Из Рис. 1 видно, что метод ETDRK4 дает наименьшую ошибку на малых и больших расчетных временах и тем самым является наиболее точным из рассматриваемых. Более того, он позволяет наиболее эффективно проводить вычисления за счет более низких требований к параметрам сетки при соответствующем сохранении точности, что проиллюстрировано на Рис. 2.

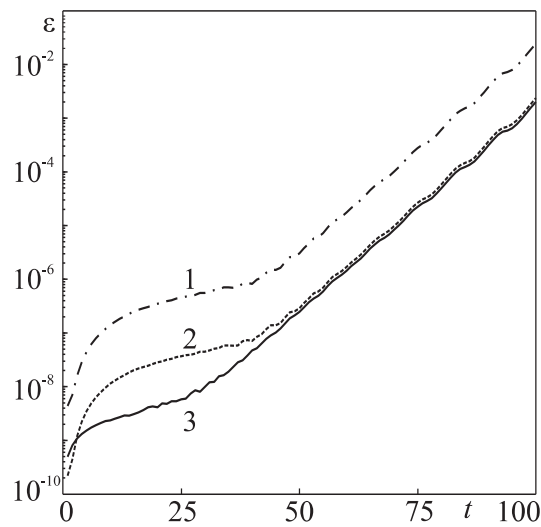


Рис. 1. Зависимость ε от времени t . IFRK4, AB4BD4 и ETDRK4 – кривые 1, 2 и 3 соответственно

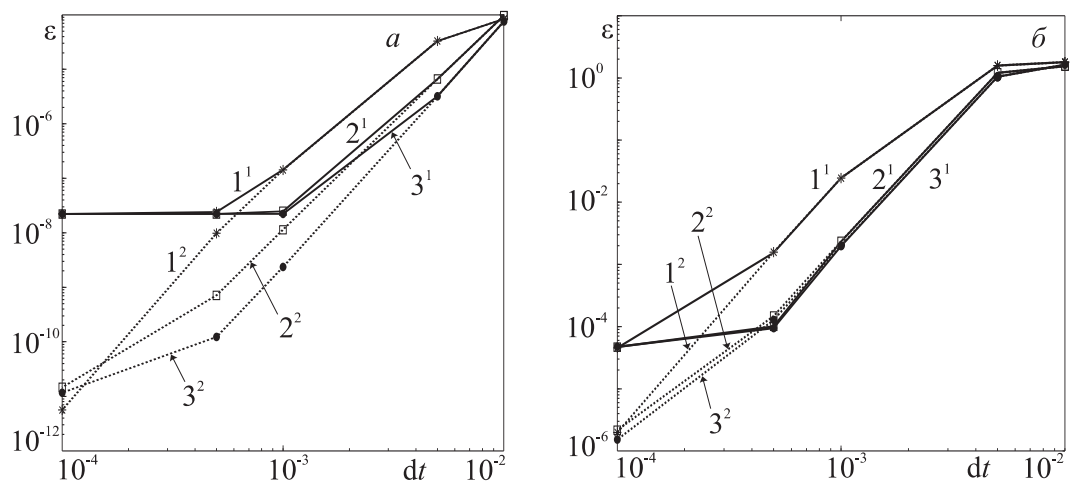


Рис. 2. Зависимость ε в моменты времени $t=10$ (а) и $t = 100$ (б) от шага по времени dt для различного количества узлов пространственной сетки N . IFRK4, AB4BD4 и ETDRK4 – кривые $1^{1,2}$, $2^{1,2}$, $3^{1,2}$ для $N = 256$ и 1024 соответственно

2. Результаты численного моделирования

В работах [7–9] показано, что при определенных значениях управляющего параметра δ имеют место процессы образования диссипативных структур в системах, описываемых (2), с начальным условием, заданным в виде равномерно распределенной случайной величины, см. Рис. 3б. В свою очередь, если величина данного параметра меньше определенного значения, образования устойчивых пространственных структур не происходит как на малых, так и на больших временах, что проиллюстрировано на Рис. 3а.

Однако, как отмечалось ранее, авторы использовали качественные критерии

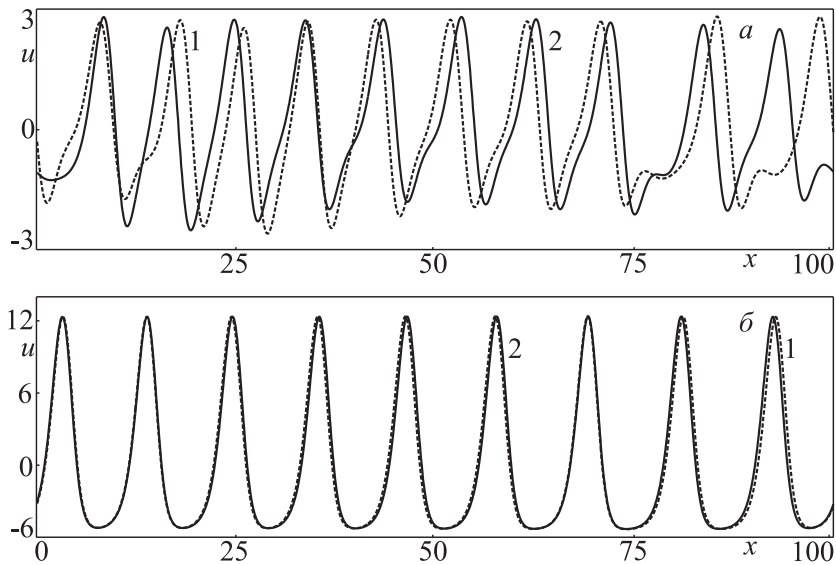


Рис. 3. Формирование диссипативных структур при $t = 300, 400$ (кривые 1, 2) в зависимости от параметра δ : а) $\delta = 0.15$, б) $\delta = 4$

оценки параметра δ . Возникает вопрос об уточнении величины данного параметра на основе количественных критериев. Для ответа на поставленный вопрос определим понятие структуры как структуры, которая не меняет свой профиль с точностью до сдвига вдоль пространственной оси с учетом периодичности. Учитывая погрешности при дискретизации, так же допускается некоторое отклонение структуры от своей формы на некоторую величину, которая определяется исходя из параметров задачи и пространственно-временной сетки.

Пусть $u(x, t^n) = u^n$ – численное решение задачи в момент времени t_n . Сформулируем алгоритм, с помощью которого получен ответ на вопрос о формировании диссипативной структуры.

1. В выбранные моменты времени $t_k, k = 1 \dots M$, такие что $t_k - t_{k-1} = \Delta = const$, вычисляется дискретная циклическая свертка

$$C(u^k, u^{k-1}) = \text{ПФ}^{-1}(\text{ПФ}(u^k) \cdot \text{ПФ}(u^{k-1})), \quad (9)$$

где ПФ – быстрое преобразование Фурье, ПФ^{-1} – обратное быстрое преобразование Фурье.

2. Находится координата максимума свертки:

$$i_{\max} : C_{i_{\max}} = \max_{i=1..N_X} C_i. \quad (10)$$

3. Определяется $u^{k \rightarrow k-1}$, которое является циклическим сдвигом u^k на i_{\max} .
4. Вычисляется величина относительной интегральной метрики $\varepsilon(u^{k \rightarrow k-1}, u^{k-1}) = \varepsilon_{k,k-1}$, которая количественно определяет минимальное отличие $u^{k \rightarrow k-1}$ от u^{k-1} .

5. На основании сравнения величины $\varepsilon_{k,k-1}$ с неким пороговым значением ε_0 делается вывод о формировании диссипативной структуры к моменту времени t_k или нет. Отметим, что величина порогового значения ε_0 выбирается произвольным образом.

На основе предложенного алгоритма определим величину управляющего параметра δ^* , при котором имеют место процессы формирования структур. С этой целью для каждого фиксированного начального условия, задаваемого в виде равномерно распределенной случайной величины, проведена серия численных экспериментов с различными значениями параметра δ , на основании которых определяется величина δ^* . Затем начальное условие изменялось и процедура повторялась. В результате находилась оценка среднего значения $\delta_{\text{ср}}^*$ и его дисперсия по следующим формулам:

$$\delta_{\text{ср}}^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \delta_i^* = 0.43,$$

$$\sqrt{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\delta_i^* - \delta_{\text{ср}}^*)^2} = 0.03, \quad (11)$$

где i, M – номер и число численных экспериментов. В данной работе величина параметра $M = 10$ и $\varepsilon_0 = 0.1$.

На Рис. 4 приведены результаты расчета количественных характеристик процесса образования диссипативных структур. Из Рис. 4а–в видно, что в случае, когда $\delta = 4 > \delta^*$, число пиков, амплитуда и относительная метрика перестают изменяться с течением времени, чего не происходит в случае $\delta = 0.15 < \delta^*$. В этом случае количество пиков N постоянно меняется то в большую, то в меньшую сторону, а амплитуда, достигнув некоторого среднего значения колеблется около него. Также отметим, что количество пиков у образовавшейся структуры зависит от длины вычислительного интервала. При увеличении длины H количество пиков структуры увеличивается.

При проведении численных экспериментов показано, что амплитуда образовавшейся диссипативной структуры линейно увеличивается с изменением величины параметра δ , и хорошо аппроксимируется следующей линейной функцией $A \approx 4.15\delta$. Данная зависимость проиллюстрирована на Рис. 5.

Заметим: в силу того, что распределение пиков вдоль расчетной области является равномерным, увеличение величины H в два раза ведет к увеличению числа пиков также в два раза.

3. Заключение

В работе изучены процессы формирования диссипативных структур, описываемых уравнением Курамото–Сивашинского. Используя псевдоспектральный метод, предложен численный алгоритм, позволяющий проводить моделирование данных процессов. Предложен количественный критерий оценки средней величины управляющего параметра δ^* , при которой имеют место процессы образования структур. Показано, что данная величина равна $\delta^* = 0.43$. Исследованы количественные харак-

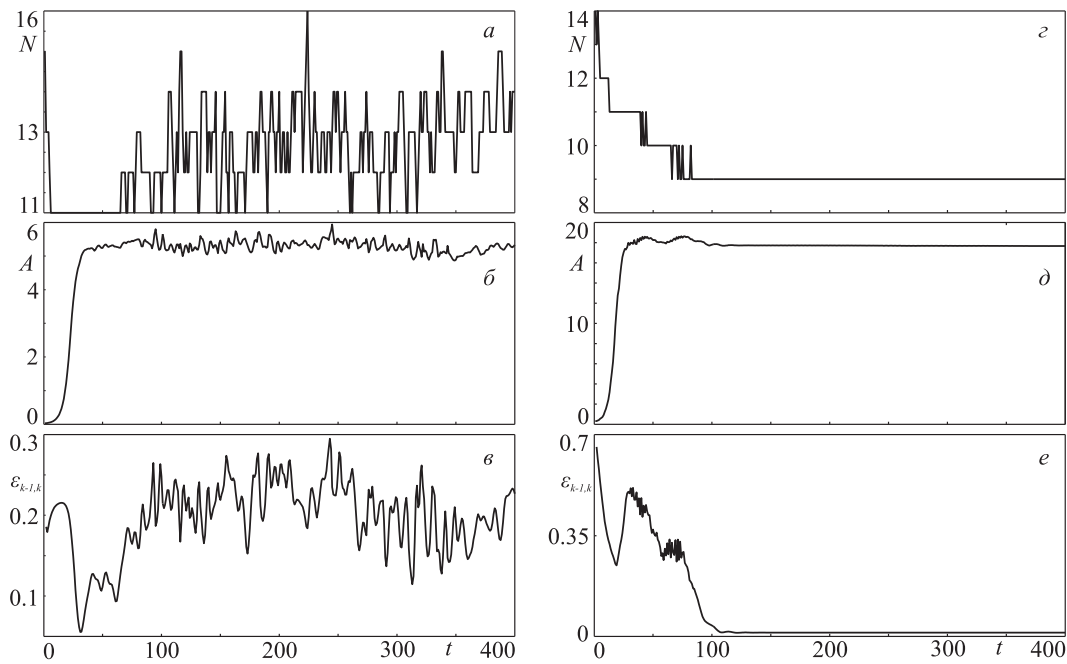


Рис. 4. Зависимость числа пиков N (а, г), амплитуды A (б, д) и относительной интегральной метрики $\varepsilon_{k,l,k-1}$ (в, е) от времени в случае $\delta = 0.15$ (а–в) и $\delta = 4$ (г–е)

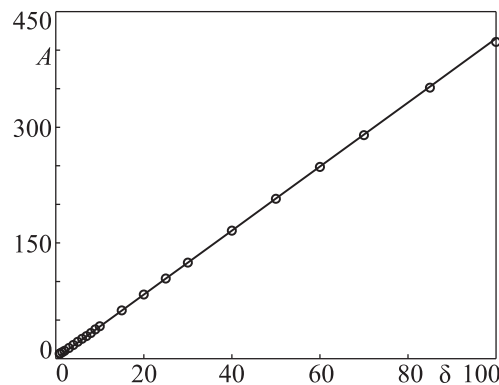


Рис. 5. Зависимость амплитуды структуры A от параметра δ

теристики процесса образования диссипативных структур. Получена зависимость амплитуды структур от параметра δ в виде $A = 4.15\delta$.

Список литературы

1. Kuramoto Y., Tsuzuki T. Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium // Progress.Theor. Phys. 1976. V. 55. No 2. P. 356–359.
2. Sivashinsky G. I. Instability, pattern formation and turbulence in flames // Ann. Rev. Fluid Mech. 1983. V. 15. P. 179–199.

3. Kudryashov N.A., Ryabov P.N., Fedyanin T.E., Kutukov A.A. Evolution of pattern formation under ion bombardment of substrate // *Physics Letters A*. 2013. V. 377. P. 753–759.
4. Topper J., Kawahara T. Approximate equations for long nonlinear waves on a viscous fluid // *J. Phys. Soc. Japan*. 1978. V. 44. No. 2. P. 663–666.
5. Кудряшов Н.А. Точные солитонные решения обобщенного эволюционного уравнения волновой динамики // *Прикладная математика и механика*. 1988. Т. 52. №3. С. 465–470. [English transl.: Kudryashov N.A. Exact soliton solutions of the generalized evolution equation of wave dynamics // *J. Appl. Math. Mech.* 1988. V. 52. P. 361–365.]
6. Kudryashov N.A. Exact solutions of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation // *Phys. Letters A*. 1990. V. 147. № 5–6. P. 287–291.
7. Алексеев А.А., Кудряшов Н.А. Особенности нелинейных волн в диссипативно–дисперсионных средах с неустойчивостью // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1990. № 4. С. 130–136. [English transl.: Alekseev A.A., Kudryashov N.A. Properties of nonlinear waves in dissipative-dispersive media with instability // *Fluid Dynamics*. 1990. V. 25. No. 4. P. 604–610.]
8. Кудряшов Н.А., Мигита А.В. Периодические структуры, возникающие при учете дисперсии в одной из моделей турбулентности // *Изв. РАН. МЖГ*. 2007. № 3. С. 145–154. [English transl.: Kudryashov N.A., Migita A.V. Periodic structures developing with account for dispersion in a turbulence model // *Fluid Dynamics*. 2007. V. 42. No. 3. P. 463–471.]
9. Кудряшов Н.А., Рябов П.Н. Свойства нелинейных волн в активно-диссипативной дисперсионной среде // *Изв. РАН. МЖГ*. 2011. No. 3. P. 97–105. [English transl.: Kudryashov N.A., Ryabov P.N. Properties of nonlinear waves in an active–dissipative dispersive medium // *Fluid Dynamics*. 2011. V. 46. No. 3. P. 425–432.]
10. Kudryashov N.A., Ryabov P.N., Sinelshchikov D.I. Nonlinear waves in media with fifth order dispersion // *Physics Letters A*. 2011. V. 375. P. 2051–2055.
11. Trefethen L.N. *Spectral Methods in MATLAB*. SIAM, Philadelphia, 2000.
12. Hou T.Y., Li R. Computing nearly singular solutions using pseudo-spectral methods // *Journal of Computational Physics*. 2007. 226. P. 279–297.
13. Hala A. *Numerical methods for stiff systems*. University of Nottingham, 2008.
14. Kassam A.-K., Trefethen L.N. Fourth-order time-stepping for stiff PDEs // *SIAM J. Sci. Comput.* 2005. Vol. 26. No. 4. P. 1214–1233.
15. Boyd J.P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. DOVER Publications, Inc. Mineola, New York, 2000.

Dissipative Structures of the Kuramoto–Sivashinsky Equation

Kudryashov N. A., Ryabov P. N., Petrov B. A.

National Research Nuclear University MEPhI, Kashirskoe shosse, 31, Moscow, 115409, Russia

Keywords: Kuramoto–Sivashinsky equation, self–organization, patterns, pseudospectral method, numerical simulation

In the present work, we study the features of dissipative structures formation described by the periodic boundary value problem for the Kuramoto–Sivashinsky equation. The numerical algorithm which is based on the pseudospectral method is presented. We prove the efficiency and accuracy of the proposed numerical method on the exact solution of the equation considered. Using this approach, we performed the numerical simulation of dissipative structure formations described by the Kuramoto–Sivashinsky equation. The influence of the problem parameters on these processes are studied. The quantitative and qualitative characteristics of dissipative structure formations are described. We have shown that there is a value of the control parameter at which the processes of dissipative structure formation are observed. In particular, using the cyclic convolution we define the average value of this parameter. Also, we find the dependence of the amplitude of the structures on the value of control parameter.

Сведения об авторах:

Кудряшов Николай Алексеевич,

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ,
доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой

Рябов Павел Николаевич,

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ,
кандидат физ.-мат. наук, ст. преподаватель

Петров Богдан Александрович,

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ,
студент