

УДК 517.933+517.956.6

Исследование устойчивости решений начально-краевой задачи, моделирующей динамику одной дискретно-континуальной механической системы

Елисеев Д. А., Кубышкин Е. П.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: kubysh@uniyar.ac.ru, dim_ok32@mail.ru

получена 30 марта 2015

Ключевые слова: устойчивость решений, дискретно-континуальные механические системы, гибридные системы дифференциальных уравнений

В работе исследуется устойчивость решений начально-краевой задачи для линейной гибридной системы дифференциальных уравнений, моделирующей поворот твердого тела с двумя упругими стержнями, расположенными в одной плоскости. К оси вращения, проходящей через центр масс твердого тела перпендикулярно плоскости расположения стержней, приложен стабилизирующий момент, пропорциональный углу поворота, скорости от угла поворота и интегралу от угла поворота тела, обеспечивающий обратную связь. Для исследования поведения решений начально-краевой задачи предложена методика, позволяющая исключить из гибридной системы дифференциальных уравнений уравнения в частных производных, которые описывают динамику распределенных элементов механической системы. Это позволило построить одно интегродифференциальное уравнение для угла поворота. Его характеристическое уравнение отвечает за устойчивость решений всей системы. В пространстве коэффициентов обратных связей построены области, значения параметров из которых обеспечивают асимптотическую (но не экспоненциальную) устойчивость решений начально-краевой задачи.

1. Постановка задачи

Рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$J\ddot{\theta} + m_1 \int_0^{l_1} (x_1 + a_1 \cos \alpha_1) \ddot{y}_1(x_1, t) dx_1 + \\ + m_2 \int_0^{l_2} (x_2 + a_2 \cos \alpha_2) \ddot{y}_2(x_2, t) dx_2 = -k_1 \dot{\theta} - k_2 \theta - k_3 \int_0^t \theta(t_1) dt_1, \quad (1)$$

$$\ddot{y}_j + b_j^2 y_j^{IV} = -(x_j + a_j \cos \alpha_j) \ddot{\theta}, \quad (2)$$

$$y_j(0, t) = y_j'(0, t) = 0, \quad y_j''(l_j, t) = y_j'''(l_j, t) = 0, \quad (3)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \theta_1, \quad y_j(x_j, 0) = y_{j0}(x_j), \quad \dot{y}_j(x_j, 0) = y_{j1}(x_j), \quad (4)$$

$$J = J_* + m_1 \int_0^{l_1} (x_1^2 + 2a_1 x_1 \cos \alpha_1 + a_1^2) dx_1 + m_2 \int_0^{l_2} (x_2^2 + 2a_2 x_2 \cos \alpha_2 + a_2^2) dx_2,$$

для определения функций $\theta(t), y_j(x_j, t), 0 \leq x_j \leq l_j, t > 0 (j = 1, 2)$. В (1)–(4) $J_*, m_j, b_j, a_j, k_1, k_2, k_3$ — положительные постоянные, $|\alpha_j| < \pi/2$, точками обозначены производные функций $y_j(x_j, t)$ по переменной t , штрихом — по переменной x_j . Функции $y_{j0}(x_j)$ и $y_{j1}(x_j)$ считаем достаточно гладкими и удовлетворяющими краевым условиям (3).

Начально-краевая задача (1)–(4) является линейной частью предложенной в работе [1] математической модели механической системы, состоящей из твердого тела и двух жестко связанных с ним упругих стержней, расположенных в одной плоскости. Система может осуществлять поворот вокруг оси, проходящей через центр масс твердого тела перпендикулярно плоскости расположения стержней под действием момента внешних сил. Упругие стержни рассматриваются в рамках модели Эйлера–Бернулли. Такие механические системы, т. е. системы, содержащие твердые тела и распределенные элементы, принято называть дискретно-континуальными. Они могут служить механическими моделями космических аппаратов [2, 3], робототехнических комплексов [4, 5] и других технических систем. Исследованию динамики механических систем, содержащих твердые тела и упругие стержни, посвящено большое количество работ. Упругие стержни рассматриваются как в рамках модели Эйлера–Бернулли [6–9], так и в рамках модели балки Тимошенко [10–16]. Изучаются задачи стабилизации и управления поведением таких механических систем.

Ниже изучается устойчивость решений начально-краевой задачи (1)–(4), то есть поведения решений (1)–(4) при $t \rightarrow \infty$, в зависимости от значений параметров k_1, k_2, k_3 , а также в случае устойчивости, скорость стремления к нулю решений (1)–(4) при $t \rightarrow \infty$.

2. Метод исследования

Рассматривая $\theta(t)$ как известную функцию, выразим $\ddot{\theta}(t)$ из уравнения (1) и подставим в (2). В результате для определения $y_j(x_j, t)$ получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{y}_j - \frac{1}{J} (x_j + a_j \cos \alpha_j) \left(m_1 \int_0^{l_1} (x_1 + a_1 \cos \alpha_1) \ddot{y}_1 dx_1 + m_2 \int_0^{l_2} (x_2 + a_2 \cos \alpha_2) \ddot{y}_2 dx_2 \right) + \\ + b_j^2 y_j^{IV} = \frac{1}{J} (x_j + a_j \cos \alpha_j) \left(k_1 \dot{\theta} + k_2 \theta + k_3 \int_0^t \theta(t_1) dt_1 \right) \quad (j = 1, 2) \end{aligned} \quad (5)$$

с краевыми и начальными условиями (3)–(4).

Введем гильбертово пространство H элементов вида $y(x) = \text{col}(y_1(x_1), y_2(x_2), y_j(x_j)) \in L_2(0, l_j)$ ($j = 1, 2$) со скалярным произведением

$$(y, z) = m_1(y_1, z_1)_{L_2(0, l_1)} + m_2(y_2, z_2)_{L_2(0, l_2)}.$$

Определим в H интегральный оператор A , действующий по правилу

$$Ay = (A_1y, A_2y),$$

$$A_jy \equiv y_j(x_j) - (x_j + a_j \cos \alpha_j)J^{-1} \times \left(m_1 \int_0^{l_1} (x_1 + a_1 \cos \alpha_1)y_1(x_1) dx_1 + \right. \\ \left. + m_2 \int_0^{l_2} (x_2 + a_2 \cos \alpha_2)y_2(x_2) dx_2 \right) \quad (j = 1, 2),$$

и оператор $By \equiv (B_1y, B_2y) \equiv (b_1^2 y_1^{IV}(x_1), b_2^2 y_2^{IV}(x_2))$, который определен на функциях

$$D(B) = \{y(x) = (y_1(x_1), y_2(x_2)), \\ y_j(x_j) \in W_2^1(0, l_j), y_j(0) = y_j'(0) = 0, y_j''(l_j) = y_j'''(l_j) = 0 \quad (j = 1, 2)\}.$$

Оператор A является симметричным $(Ay, z) = (y, Az)$, $y, z \in H$, что проверяется непосредственно, и положительно определенным, т. е.

$$\exists \gamma > 0: \forall y \in H \quad (Ay, y) \geq \gamma(y, y).$$

Действительно, обозначим $(x + a \cos \alpha) = \text{col}(x_1 + a_1 \cos \alpha_1, x_2 + a_2 \cos \alpha_2)$. Используя определение оператора A и неравенство Коши–Буняковского, имеем цепочку неравенств

$$(Ay, y) = (y, y) - \frac{1}{J}(x + a \cos \alpha, y)^2 \geq (y, y) - \frac{1}{J}(x + a \cos \alpha, x + a \cos \alpha)(y, y) = \\ = (y, y) \frac{J_1}{J},$$

где

$$J_1 = J - m_1 \int_0^{l_1} (x_1 + a_1 \cos \alpha_1)^2 dx_1 - m_2 \int_0^{l_2} (x_2 + a_2 \cos \alpha_2)^2 dx_2 > 0,$$

если $|\alpha_1| < \pi/2, |\alpha_2| < \pi/2$.

Оператор B также является на пространстве $D(B)$ симметричным и положительно определенным.

Используя введенные операторы, запишем начально-краевую задачу (3)–(5) в виде операторного уравнения в H

$$A\ddot{y} + By = (x + a \cos \alpha)J^{-1} \left(k_1 \dot{\theta} + k_2 \theta + k_3 \int_0^t \theta(t_1) dt_1 \right), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} y = y(x, t) = \text{col}(y_1(x_1, t), y_2(x_2, t)), y(x, 0) = y_0(x), \dot{y}(x, 0) = y_1(x), \\ y_0(x) = \text{col}(y_{10}(x_1), y_{20}(x_2)), y_1(x) = \text{col}(y_{11}(x_1), y_{21}(x_2)). \end{aligned} \quad (7)$$

Определяя решение (6)–(7) методом Фурье, т. е. строя решения однородной части уравнения (6) в виде $v(x)u(t)$, $v(x) = \text{col}(v_1(x_1), v_2(x_2))$, получим для определения $v(x)$ следующую спектральную задачу

$$Bv = \lambda Av \quad (8)$$

в пространстве H .

Для любых $v(x) \in D(B)$ $\lambda(Av, v) = (Bv, v)$, откуда в силу симметричности и положительной определенности операторов A и B следует, что λ вещественно и $\lambda > 0$. Оператор $B^{-1}: H \rightarrow D(B)$ симметричный и вполне непрерывный. Таким же будет оператор $B^{-1}A$. Следовательно, точки спектра спектральной задачи (8) конечнократно и удовлетворяют условию $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$. Ниже будет показано, что точки спектра (8) однократны.

Соответствующие λ_n собственные функции $v_n(x)$ спектральной задачи (8) удовлетворяют следующим условиям ортогональности:

$$\langle v_n, v_m \rangle \equiv (Av_n, v_m) = \delta_{nm}, \quad (9)$$

где δ_{nm} — символ Кронекера. Действительно, $\lambda_n(Av_n, v_m) = (Bv_n, v_m) = (v_n, Bv_m) = \lambda_m(v_n, Av_m)$. Если $n \neq m$, то $(v_n, Av_m) = 0$. Обозначив $(v_n, Av_n) = A_n^2 > 0$ и нормируя произвольную $v_n(x) \rightarrow v_n(x)/A_n$, имеем (9).

Перейдем к определению собственных значений λ_n и построению функций $v_n(x) = \text{col}(v_{n1}(x_1), v_{n2}(x_2))$.

Заметим, что оператор A имеет обратный

$$A^{-1}y = (A_1^{-1}y, A_2^{-1}y),$$

$$\begin{aligned} A_j^{-1}y = y_j(x_j) + (x_j + a_j \cos \alpha_j)J_1^{-1} \times \left(m_1 \int_0^{l_1} (x_1 + a_1 \cos \alpha_1)y_1(x_1) dx_1 + \right. \\ \left. + m_2 \int_0^{l_2} (x_2 + a_2 \cos \alpha_2)y_2(x_2) dx_2 \right), \quad (j = 1, 2), \end{aligned}$$

что проверяется непосредственно.

Применив к (8) оператор A^{-1} , имеем $A^{-1}Bv = \lambda v$, что в координатной форме имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} b_j^2 v_j^{IV} + (x_j + a_j \cos \alpha_j)J_1^{-1} \times \left(m_1 \int_0^{l_1} (x_1 + a_1 \cos \alpha_1)b_1^2 v_1^{IV} dx_1 + \right. \\ \left. + m_2 \int_0^{l_2} (x_2 + a_2 \cos \alpha_2)b_2^2 v_2^{IV} dx_2 \right) = \lambda v_j \quad (j = 1, 2), \quad (10) \end{aligned}$$

$$v_j(0) = v'_j(0) = 0, \quad v''_j(l_j) = v'''_j(l_j) = 0 \quad (j = 1, 2). \quad (11)$$

Вычислив в (10) интегралы с учетом краевых условий (11), получим систему уравнений

$$b_j^2 v_j^{IV}(x_j) + (x_j + a_j \cos \alpha_j) J_1^{-1} \times \left(m_1 b_1^2 (v''_1(0) - a_1 \cos \alpha_1 v'''_1(0)) + \right. \\ \left. + m_2 b_2^2 (v''_2(0) - a_2 \cos \alpha_2 v'''_2(0)) \right) = \lambda v_j(x_j), \quad (j = 1, 2). \quad (12)$$

Покажем, что спектральная краевая задача (11)–(12) может иметь лишь однократные точки спектра. Действительно, предположим, что некоторому λ_n отвечает две линейно независимые собственные функции $u_n(x) = \text{col}(u_{n1}(x_1), u_{n2}(x_2))$ и $w_n(x) = \text{col}(w_{n1}(x_1), w_{n2}(x_2))$. Тогда функция $v_n(x) = \text{col}(v_{n1}(x_1), v_{n2}(x_2)) = p_1 u_n(x) + p_2 w_n(x)$, где

$$p_1 = m_1 b_1^2 (w''_{n1}(0) - a_1 \cos \alpha_1 w'''_{n1}(0)) + m_2 b_2^2 (w''_{n2}(0) - a_2 \cos \alpha_2 w'''_{n2}(0)) \\ p_2 = -m_1 b_1^2 (u''_{n1}(0) - a_1 \cos \alpha_1 u'''_{n1}(0)) - m_2 b_2^2 (u''_{n2}(0) - a_2 \cos \alpha_2 u'''_{n2}(0)),$$

также является собственной функцией спектральной краевой задачи (11)–(12), но, будучи подставленной в (12), дает, как легко заметить, следующие равенства:

$$b_j v_{nj}^{IV}(x_j) = \lambda_n v_{nj}(x_j) \quad (j = 1, 2).$$

Таким образом, функции $v_{nj}(x_j)$ являются балочными функциями и, с учетом краевых условий (11), имеют следующий вид: $v_{nj}(x_j) = \tilde{v}_{nj}(x_j) / \langle \tilde{v}_n(x), \tilde{v}_n(x) \rangle^{1/2}$, где

$$\tilde{v}_{nj}(x_j) = \left(\sinh(\beta_{nj} l_j) + \sin(\beta_{nj} l_j) \right) \left(\cosh(\beta_{nj} x_j) - \cos(\beta_{nj} x_j) \right) - \left(\cosh(\beta_{nj} l_j) + \right. \\ \left. + \cos(\beta_{nj} l_j) \right) \left(\sinh(\beta_{nj} x_j) - \sin(\beta_{nj} x_j) \right), \quad \tilde{v}_n(x) = \text{col}(\tilde{v}_{n1}(x_1), \tilde{v}_{n2}(x_2)), \quad \beta_{nj} = (\lambda_n / b_j^2)^{1/4}$$

($j=1,2$) и β_{nj} — положительный корень уравнения $\cosh(\beta l_j) \cos(\beta l_j) + 1 = 0$ [17]. Для любого β_{nj}

$$v''_{nj}(0) - a_j \cos \alpha_j v'''_{nj}(0) = 2(a_j \cos \alpha_j \beta_{nj}^3 (\cosh(\beta_{nj} l_j) + \cos(\beta_{nj} l_j)) + \\ + \beta_{nj}^2 (\sinh(\beta_{nj} l_j) + \sin(\beta_{nj} l_j))) / \langle \tilde{v}_n(x), \tilde{v}_n(x) \rangle^{1/2} > 0.$$

Получили противоречие.

Определяя теперь функции $v_j(x_j)$ ($j = 1, 2$) как решения уравнения (12) в следующей форме:

$$v_j(x_j) = A_j \cosh(\beta_j x_j) + B_j \sinh(\beta_j x_j) + C_j \cos(\beta_j x_j) + D_j \sin(\beta_j x_j) + \lambda^{-1} J_1^{-1} \times \\ \times (x_j + a_j \cos \alpha_j) (m_1 b_1^2 (v''_1(0) - a_1 \cos \alpha_1 v'''_1(0)) + m_2 b_2^2 (v''_2(0) - a_2 \cos \alpha_2 v'''_2(0))), \quad (13)$$

$\beta_j = (\lambda / b_j^2)^{1/4}$ ($j = 1, 2$), находим

$$v''_j(0) = \beta_j^2 (A_j - C_j), \quad v'''_j(0) = \beta_j^3 (B_j - D_j) \quad (j = 1, 2). \quad (14)$$

Равенства (14) позволяют записать (13) в виде

$$\begin{aligned} v_j(x_j) = & A_j \cosh(\beta_j x_j) + B_j \sinh(\beta_j x_j) + C_j \cos(\beta_j x_j) + D_j \sin(\beta_j x_j) + \\ & + \lambda^{-1} J_1^{-1}(x_j + a_j \cos \alpha_j) \times \left(m_1 b_1^2 \beta_1^2 (A_1 - C_1 - a_1 \cos \alpha_1 \beta_1 (B_1 - D_1)) + \right. \\ & \left. + m_2 b_2^2 \beta_2^2 (A_2 - C_2 - a_2 \cos \alpha_2 \beta_2 (B_2 - D_2)) \right) \quad (j = 1, 2). \end{aligned} \quad (15)$$

Краевые условия (11) дают систему из восьми линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов A_j, B_j, C_j, D_j ($j = 1, 2$). Полученная система имеет нетривиальное решение только тогда, когда определитель матрицы системы $\Delta(\lambda^{1/4})$ равен нулю. Характеристическое уравнение $\Delta(\lambda^{1/4}) = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \lambda J_1 (1 + \cos(\beta_1 l_1) \cosh(\beta_1 l_1)) (1 + \cos(\beta_2 l_2) \cosh(\beta_2 l_2)) + m_1 b_1^2 \beta_1 (1 + \cos(\beta_2 l_2) \cosh(\beta_2 l_2)) \times \\ & \times \left(\cosh(\beta_1 l_1) \sin(\beta_1 l_1) - \cos(\beta_1 l_1) \sinh(\beta_1 l_1) + 2\beta_1 a_1 \cos \alpha_1 \sin(\beta_1 l_1) \sinh(\beta_1 l_1) + \right. \\ & \left. + \beta_1^2 a_1^2 \cos^2 \alpha_1 (\cosh(\beta_1 l_1) \sin(\beta_1 l_1) \cos(\beta_1 l_1) \sinh(\beta_1 l_1)) \right) + m_2 b_2^2 \beta_2 (1 + \cos(\beta_1 l_1) \cosh(\beta_1 l_1)) \times \\ & \times \left(\cosh(\beta_2 l_2) \sin(\beta_2 l_2) - \cos(\beta_2 l_2) \sinh(\beta_2 l_2) + 2\beta_2 a_2 \cos \alpha_2 \sin(\beta_2 l_2) \sinh(\beta_2 l_2) + \right. \\ & \left. + \beta_2^2 a_2^2 \cos^2 \alpha_2 (\cosh \beta_2 l_2 \sin \beta_2 l_2 + \cos \beta_2 l_2 \sinh \beta_2 l_2) \right) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Характеристическое уравнение (16) определяет последовательность собственных значений λ_n , соответствующие им собственные функции $v_n(x)$ определяются согласно (15) с учетом (9).

Таким образом, решение задачи (6)–(7) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} y(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) u_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \left(a_n \cos(\omega_n t) + \omega_n^{-1} b_n \sin(\omega_n t) \right) + \\ & + J^{-1} \omega_n^{-1} d_n \int_0^t \sin(\omega_n(t - \tau)) (k_1 \dot{\theta}(\tau) + k_2 \theta(\tau) + k_3 \int_0^{\tau} \theta(\tau_1) d\tau_1) d\tau, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\omega_n = \lambda_n^{1/2}$, $a_n = \langle y_0(x), v_n(x) \rangle$, $b_n = \langle y_1(x), v_n(x) \rangle$, $d_n = \langle x + a \cos \alpha, v_n(x) \rangle$.

Отметим, что сходимость ряда (17) (вместе с необходимыми производными) обеспечивается гладкостью функций $y_0(x)$, $y_1(x)$ и функции $\theta(t)$. Соответствующие условия предполагаем выполненными.

Подставим (17) в уравнение (1). В результате получим для определения $\theta(t)$

следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
 J\ddot{\theta}(t) + \left(1 + \frac{1}{J} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2\right) (k_1 \dot{\theta}(t) + k_2 \theta(t) + k_3 \int_0^t \theta(t_1) dt_1) - \\
 - \frac{1}{J} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \omega_n \int_0^t \sin(\omega_n(t-t_1)) (k_1 \dot{\theta}(t_1) + k_2 \theta(t_1) + k_3 \int_0^{t_1} \theta(t_2) dt_2) dt_1 = \\
 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \omega_n (a_n \omega_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \quad (18)
 \end{aligned}$$

с начальными условиями (4).

Изучим поведение его решений.

Применим к (18) преобразование Лапласа. В результате получим уравнение

$$\begin{aligned}
 \left(Jp^2 + \left(1 + \frac{p^2}{J} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^2}{p^2 + \omega_n^2}\right) \left(k_1 p + k_2 + \frac{k_3}{p}\right)\right) \Theta(p) = \\
 = J(p\theta_0 + \theta_1) + \left(1 + \frac{p^2}{J} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^2}{p^2 + \omega_n^2}\right) k_1 \theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \omega_n^2 \frac{pa_n + b_n}{p^2 + \omega_n^2} \quad (19)
 \end{aligned}$$

для определения $\Theta(p) \doteq \theta(t)$.

Введем в рассмотрение характеристическое уравнение

$$P(p) \equiv Jp^2 + \left(1 + \frac{p^2}{J} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^2}{p^2 + \omega_n^2}\right) \left(k_1 p + k_2 + \frac{k_3}{p}\right) = 0. \quad (20)$$

Справедливо следующее

Утверждение 1.

а. Пусть действительные части корней характеристического уравнения (20) отрицательны. Тогда все решения уравнения (18) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

б. Пусть хотя бы один корень характеристического уравнения (20) имеет положительную действительную часть. Тогда существуют такие θ_0 и θ_1 , для которых решение $\theta(t)$ уравнения (18) неограниченно возрастает при $t \rightarrow \infty$.

в. Пусть вещественные части корней характеристического уравнения (20) неположительны. Тогда решения уравнения (18) устойчивы по Ляпунову.

Перед тем, как привести доказательство утверждения 1, рассмотрим характер расположения корней характеристического уравнения (20). Характеристическое уравнение вида (20) подробно анализировалось в работе [2]. Рассмотрим основные моменты этого анализа и особенности применительно к рассматриваемому случаю.

Для анализа расположения корней и получения условий принадлежности их левой комплексной полуплоскости удобно воспользоваться методом D -разбиений.

Положим в (20) $p = i\omega$ ($\omega > 0$) и приравняем нулю действительную и мнимую части равенства. В результате получим

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{J} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) (-k_1 \omega^2 + k_3) = 0, \quad -J\omega^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{J} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) k_2 = 0. \quad (21)$$

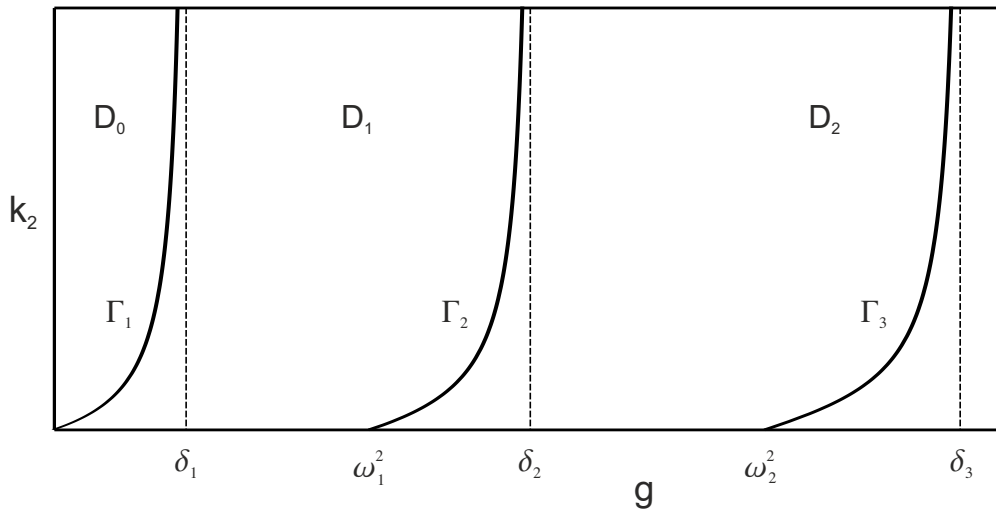


Рис. 1.

Из этих равенств находим

$$\frac{J\omega^2}{k_2}(-k_1\omega^2 + k_3) = 0. \quad (22)$$

$p = 0$ не является корнем уравнения (20), поэтому случай $\omega = 0$ невозможен. В случае $\omega^2 = k_3/k_1$ имеем равенство

$$-J\frac{k_3}{k_1} + \left(1 - \frac{k_3}{J} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^2}{\omega_n^2 k_1 - k_3}\right) k_2 = 0, \quad (23)$$

связывающее параметры k_1, k_2, k_3 , при значениях которых характеристическое уравнение (20) имеет корни, лежащие на мнимой оси комплексной плоскости.

Положив $g = k_3/k_1$, из (23) имеем

$$k_2 = Jg \left(1 - \frac{g}{J} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^2}{\omega_n^2 - g}\right)^{-1}. \quad (24)$$

График зависимости k_2 от g представлен на рис. 1. Точки δ_n на графике соответствуют корням уравнения

$$1 - \frac{g}{J} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^2}{\omega_n^2 - g} = 0,$$

кривые Γ_j ($n = 1, 1, 2, \dots$) — ветви зависимости (24).

Области D_j — это области, при значении параметров из которых уравнение (20) имеет j корней в правой комплексной полуплоскости. Доказательство этого проводится аналогично работе [2]. Для этого нужно выбрать точку (g^*, k_2^*) , принадлежащую кривой Γ_j и соответствующую ω^* . Рассмотреть далее приращение $g^*(1 + \varepsilon) =$

$k_3^*(1 + \varepsilon)/k_1^*, 0 < \varepsilon \ll 1$. В результате получаем, что корень $p(\varepsilon) = i\omega^* + \varepsilon p_1 + \dots$ перейдет в правую полуплоскость. Таким образом, кривые Γ_j на рис. 1 соответствуют значениям параметров, при которых одна пара комплексно сопряженных корней переходит из левой комплексной полуплоскости в правую. Отдельно доказывается, что при значении параметров из области D_0 все корни характеристического уравнения принадлежат левой комплексной полуплоскости.

Пусть параметры k_1, k_2, k_3 выбраны принадлежащими области D_0 , т. е. все корни характеристического уравнения (20) принадлежат левой комплексной полуплоскости. Точки $p_n = i\omega_n$ являются полюсами первого порядка функции $P(p)$. В левой (открытой) комплексной полуплоскости функция $P(p)$ является аналитической, поэтому в любой замкнутой ограниченной области комплексной полуплоскости может существовать не более конечного числа корней уравнения (20) конечной кратности. Согласно (16) при больших n величины ω_n разделяются на две последовательности $\omega_{n1} \sim b_1 (\pi(2n_1 + 1)/2l_1)^2$ и $\omega_{n2} \sim b_2 (\pi(2n_2 + 1)/2l_2)^2$, которые упорядочены между собой. Величины ω_{n1} и ω_{n2} могут быть близкими между собой с любой наперед заданной степенью точности. Каждой такой последовательности ω_{nj} ($j = 1, 2$) в характеристическом уравнении (20) отвечает “цепочка” комплексно сопряженных корней вида $p_{\pm n_j} = \tau_{n_j} \pm i\sigma_{n_j}$ ($i = \sqrt{-1}$), $\tau_{n_j} \rightarrow 0, \sigma_{n_j} \rightarrow \infty$, при $n_j \rightarrow \infty$. При этом $\tau_{n_j} = -s_*/n_j^{-2} + O(n_j^{-4})$ ($s_* > 0$), $\sigma_{n_j} = \omega_{n_j} + O(n_j^{-1})$, $j = 1, 2$. Корни $p_{\pm n_j}$ однократные.

Рассмотрим теперь характер поведения решений уравнения (18). Любое его решение определяется из равенства

$$\Theta(p) = P^{-1}(p) \left[J(p\theta_0 + \theta_1) + \left(1 + \frac{p^2}{J} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^2}{p^2 + \omega_n^2} \right) k_1 \theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \omega_n^2 \frac{p a_n + b_n}{p^2 + \omega_n^2} \right] \quad (25)$$

посредством обратного преобразования Лапласа. Из вида (20) следует, что правая часть (25) является аналитической функцией комплексного переменного p в области $\operatorname{Re} p \geq 0$ и удовлетворяет в области $\operatorname{Re} p \geq 0$ достаточным условиям существования оригинала [18]. В области $\operatorname{Re} p < 0$ функция (25) аналитическая, за исключением точек, являющихся нулями характеристического уравнения (20). Используя схему обращения преобразования Лапласа, основанную на теории вычетов, для $\theta(t)$ получим представление

$$\theta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(\tau_n t) (a_n(t) \cos(\sigma_n t) + b_n(t) \sin(\sigma_n t)), \quad (26)$$

где суммирование ведется по всем корням характеристического уравнения (20) в порядке возрастания их модулей, $a_n(t), b_n(t)$ — некоторые многочлены, которые, начиная с некоторого номера n , постоянны и удовлетворяют условию $|a_n(t)|, |b_n(t)| < g_* n^{-2}$ ($g_* > 0$).

Поведение решений функции $\theta(t)$ при $t \rightarrow \infty$ определяется поведением “хвоста” ряда (26). Выберем достаточно большие n_j^0 и оценим поведение “хвоста” ряда (26), разделив его на два ряда в соответствии с корнями $p_{\pm n_j}$, и оценим каждый ряд в

отдельности.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n_j=n_j^0}^{\infty} \exp(\tau_{n_j} t) (a_{n_j}(t) \cos(\sigma_{n_j} t) + b_{n_j}(t) \sin(\sigma_{n_j} t)) \right| &\leq g_* \sum_{n_j=n_j^0}^{\infty} n_j^{-2} \exp(-s_*^1 n_j^{-2} t) \approx \\ &\approx g_* \int_{n_j^0}^{\infty} x^{-2} \exp(-s_*^1 x^{-2} t) dx = g_* \int_0^{1/n_j^0} \exp(-s_*^1 y^2 t) dy = \\ &= \frac{g_* (s_*^1 t)^{-1/2}}{2} \int_0^h t^{-1/2} \exp(-t^2) dt = O(t^{-1/2}), \quad h = \frac{s_* t}{(n_j^0)^2}, \quad (27) \end{aligned}$$

где $s_*^1 > s_*$ — некоторая постоянная.

Таким образом, первая часть утверждения 1 доказана. Две другие части утверждения следуют непосредственно из обращения преобразования Лапласа (25) функции $\theta(t)$.

Изучим поведение функции $y(x, t)$, определяемой формулой (17), при $t \rightarrow \infty$. Применим преобразование Лапласа к (17). В результате для $U_n(p) \doteq u_n(t)$ получим выражение

$$U_n(p) = \frac{a_n p + b_n}{p^2 + \omega_n^2} + \frac{d_n(k_1 p^2 + k_2 p + k_3)}{J p(p^2 + \omega_n^2)} \Theta(p) - \frac{d_n k_1 \theta_0}{J(p^2 + \omega_n^2)}. \quad (28)$$

Покажем, что функция $U_n(p)$ является аналитической в области $\operatorname{Re} p \geq 0$. Полюсы могут вызвать лишь точки $\pm i\omega_n$, где $U_n(p)$ может иметь полюс первого порядка. Представим $U_n(p)$ в окрестности точки $i\omega_n$ рядом Лорана

$$\begin{aligned} U_n(p) &= \frac{u_{-1n}}{p - i\omega_n} + u_{0n} + u_{1n}(p - i\omega_n) + \dots, \\ u_{-1n} &= \lim_{p \rightarrow i\omega_n} U_n(p)(p - i\omega_n). \end{aligned}$$

Непосредственно вычисляя u_{-1n} с учетом (20), (25), (28), имеем

$$\begin{aligned} u_{-1n} &= \frac{a_n i\omega_n + b_n}{2i\omega_n} + \frac{d_n(k_1 \omega_n^2 - k_2 i\omega_n - k_3)}{2J\omega_n^2} \times \\ &\times \left(-\frac{k_1 \theta_0 i\omega_n}{k_1 \omega_n^2 - k_2 i\omega_n - k_3} - \frac{J(a_n \omega_n^2 - i b_n \omega_n)}{d_n(k_1 \omega_n^2 - k_2 i\omega_n - k_3)} \right) - \frac{d_n k_1 \theta_0}{2Ji\omega_n} = 0. \end{aligned}$$

Таким же образом $U_n(p)$ ведет себя в окрестности точки $-i\omega_n$. Отсюда следует, что $U_n(p)$ является аналитической в области $\operatorname{Re} p \geq 0$, а в области $\operatorname{Re} p < 0$ свойства $U_n(p)$ аналогичны свойствам функции $\Theta(p)$. Таким образом, $U_n(p)$ удовлетворяет свойствам существования оригинала. Для функций $u_n(t)$ справедливы оценки, аналогичные (27). Отсюда следует, что характер поведения решений начально-краевой задачи полностью определяется расположением корней характеристического уравнения (20) в рамках утверждения 1.

Список литературы

- [1] Елисеев Д. А., Кубышкин Е. П., “Уравнения движения твердого тела с двумя упругими стержнями”, *Модел. и анализ информ. систем*, **21**:1 (2014), 66–72; English transl.: Eliseev D. A., Kubyshkin E. P., “Motion Equations of a Rigid Body with Two Elastic Rods”, *Automatic Control and Computer Sciences*, **48**:7 (2014), 516–520.
- [2] Злочевский С. И., Кубышкин Е. П., “О стабилизации спутника с гибкими стержнями”, *Космич. исслед.*, **27**:5 (1989), 643; [Zlochevskiy S. I., Kubyshkin E. P., “O stabilizatsii sputnika s gibkimi sterzhnyami”, *Kosmich. issled.*, **27**:5 (1989), 643, (in Russian).]
- [3] Злочевский С. И., Кубышкин Е. П., “О стабилизации спутника с гибкими стержнями. II”, *Космич. исслед.*, **29**:6 (1991), 828; [Zlochevskiy S. I., Kubyshkin E. P., “O stabilizatsii sputnika s gibkimi sterzhnyami. II”, *Kosmich. issled.*, **29**:6 (1991), 828, (in Russian).]
- [4] Бербюк В. Е., *Динамика и оптимизация робототехнических систем*, Наукова думка, Киев, 1989; [Berbyuk V. E., *Dinamika i optimizatsiya robototekhnicheskikh sistem*, Naukova dumka, Kiev, 1989, (in Russian).]
- [5] Черноушко Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г., *Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация*, Наука, М., 1989; English transl.: Chernousko F. L., Bolotnik N. N., Gradetsky V. G., *Manipulation Robots: Dynamics, Control and Optimization*, CRC Press, Boca Raton, 1994.
- [6] Кубышкин Е. П., “Оптимальное управление поворотом твердого тела с гибким стержнем”, *ПММ*, **56**:2 (1992), 240–249; English transl.: Kubyshkin Ye. P., “Optimal control of the rotation of a solid with a flexible rod”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **56**:2 (1992), 205–214.
- [7] Krabs W., Chi-Long N., “On the Controllability of a Robot Arm”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **21** (1998), 25–42.
- [8] Krabs W., “Controllability of a Rotating Beam”, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, **185** (1993), 447–458.
- [9] Leugering G., “On control and stabilization of a rotating beam by applying moments at the base only”, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, **149** (1991), 182–191.
- [10] Gugat M., “Controllability of a slowly rotating Timoshenko beam”, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **6** (2001), 333–360.
- [11] Krabs W., Sklyar G. M., “On the controllability of a slowly rotating Timoshenko beam”, *Z. Anal Anwend.*, **18**:2 (1999), 437–448.
- [12] Krabs W., Sklyar G. M., “On the stabilizability of a slowly rotating Timoshenko beam”, *Z. Anal Anwend.*, **19**:1 (2000), 131–145.
- [13] Krabs W., Sklyar G. M., Wozniak J., “On the set of reachable states in the problem of controllability of rotating Timoshenko beam.”, *J. Anal Appl.*, **22**:1 (2003), 215–228.
- [14] Taylor S., Yau S., “Boundary control of a rotating Timoshenko beam.”, *E*, **44**, 2003, 143–184.
- [15] Кубышкин Е. П., Хребтюгова О. А., “Обобщенное решение одной начально-краевой задачи, возникающей в механике дискретно-континуальных систем”, *Модел. и анализ информ. систем*, **19**:1 (2012), 84–96; English transl.: Kubyshkin E. P., Khrebtuyugova O. A., “A Generalized Solution of an Initial Boundary Value Problem Arising in the Mechanics of Discrete–Continuous Systems”, *Automatic Control and Computer Sciences*, **47**:7 (2013), 556–565.
- [16] Aoustin Y., Formalsky A., “On the Synthesis of a nominal Trajectory for Control Law of a one-Link flexible Arm”, *The International Journal of Robotics Research*, **16**:1 (1997), 36–46.
- [17] Фролов К. В. и др., *Вибрации в технике: Справочник в 6 томах*, **1**, Машиностроение, М., 1978; [Frolov K. V. i dr., *Vibratsii v tekhnike: Spravochnik v 6 tomakh*, **1**, Mashinostroenie, М., 1978, (in Russian).]
- [18] Беллман Р., Кук К., *Дифференциально-разностные уравнения*, Мир, М., 1967; English transl.: Bellman R., Cooke K., *Differential-Difference Equations*, Academic Press, 1963.

Solutions Stability of Initial Boundary Problem, Modeling of Dynamics of Some Discrete Continuum Mechanical System

Eliseev D. A., Kubyshkin E. P.

P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: solution stability, discrete continuum mechanical systems, hybrid systems of differential equations

The solution stability of an initial boundary problem for a linear hybrid system of differential equations, which models the rotation of a rigid body with two elastic rods located in the same plane is studied in the paper. To an axis passing through the mass center of the rigid body perpendicularly to the rods location plane is applied the stabilizing moment proportional to the angle of the system rotation, derivative of the angle, integral of the angle. The external moment provides a feedback. A method of studying the behavior of solutions of the initial boundary problem is proposed. This method allows to exclude from the hybrid system of differential equations partial differential equations, which describe the dynamics of distributed elements of a mechanical system. It allows us to build one equation for an angle of the system rotation. Its characteristic equation defines the stability of solutions of all the system. In the space of feedback-coefficients the areas that provide the asymptotic stability of solutions of the initial boundary problem are built up.

Сведения об авторах:

Елисеев Дмитрий Андреевич,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, аспирант,

Кубышкин Евгений Павлович,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования