Модел. и анализ информ. систем. Т. **22**, № **2** (2015) 219–237

УДК 512.542.66

О существовании ABA-факторизаций у спорадических групп ранга 3

Казарин Л. С., Рассадин И. А., Сахаров Д. Н.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: kazarin@uniyar.ac.ru, elcamlost@gmail.com, ergeslab@gmail.com

получена 3 марта 2015

Ключевые слова: факторизация групп, спорадические группы, группа МакЛафлина, группы Фишера

Группу G, имеющую в качестве своих подгрупп A и B, называют ABA-группой, если каждый элемент $g \in G$ можно представить в виде $g = aba_1$, где $a, a_1 \in A, b \in B$. Частным случаем факторизаций такого вида является AB-факторизация группы G.

Поиск факторизаций группы является фундаментальной математической задачей, решение которой позволит лучше понимать ее строение. Все группы лиева типа обладают факторизацией этого вида. Кроме того, тройные факторизации групп автоморфизмов естественным образом возникают при изучении таких структур, как графы, многообразия и геометрии.

Целью данной работы является изучение ABA-факторизаций для спорадических групп ранга 3. Для некоторых спорадических групп известны факторизации вида $G = AB$. В то же время для таких спорадических групп ранга 3, как группа МакЛафлина McL и группа Фишера Fi_{22}, факторизации вида $G = ABA$ до настоящего момента были неизвестны.

Основным результатом статьи является доказательство существования ABA – факторизаций у спорадических групп McL и Fi_{22}, где A – стабилизатор точки у соответствующей группы подстановок ранга 3. Для группы Fi_{22} имеется два представления ее в качестве группы подстановок ранга 3, причем существование ABA-факторизаций доказано в обоих случаях.

Введение

Группу G, имеющую в качестве своих подгрупп A и B, называют ABA-группой, если каждый элемент $g \in G$ можно представить в виде $g = aba'$, где $a, a' \in A, b \in B$. Частным случаем факторизаций такого вида является AB-факторизация группы G.

Поиск факторизаций группы является фундаментальной математической задачей, решение которой позволит лучше понимать ее строение. Например, часто, зная факторизацию группы G, можно доказать ее разрешимость. Кроме того, тройные факторизации групп автоморфизмов естественным образом возникают при изучении таких структур, как многообразия и геометрии.

Конечные ABA-факторизации изучались многими авторами, в числе первых – Горенстейн и Херстейн, которые в работах [8] и [7] нашли критерии разрешимости таких групп, в случае если A и B – циклические. В этом направлении далее было получено немало интересных результатов. Так, Гутерманом [9] была доказана разрешимость группы $G = ABA$ в случае, если B нильпотентна и A самонормализуема. Сысак [12, 14–16] показал разрешимость ABA групп в случае, если A имеет четный порядок и обе группы являются абелевыми холловыми подгруппами в G. Совсем недавно, в работе Алави и Прегер [2], была предложена программа для поиска ABA-факторизаций, связанных с автоморфизмами графов и других геометрических структур. В работе Амберга и Казарина [3] доказана разрешимость группы $G = ABA$, в случаях когда

1) подгруппа A – абелева, B – циклическая

2) подгруппа A – нильпотентная нечетного порядка, B – циклическая и порядки подгрупп взаимно просты, то есть $(|A|, |B|) = 1$.

Принятые обозначения, в основном, стандартны и соответствуют имеющимся в [6]. Для подгрупп спорадических групп мы используем обозначения из [4]. Например, 2^m обозначает элементарную абелеву подгруппу порядка 2^m; обозначение 2^{m+n} применяется для специальной 2-группы с элементарной абелевой подгруппой порядка 2^m, лежащей в центре; $X : Y$ – расщепляемое расширение подгруппы X с помощью Y и так далее.

Целью данной работы является изучение ABA-факторизаций для спорадических групп ранга 3. Для некоторых спорадических групп (см. например, [5]) известны факторизации вида $G = AB$. В то же время для таких спорадических групп ранга 3, как группа МакЛафлина McL и группы Фишера Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}, факторизации вида $G = ABA$ до настоящего момента были неизвестны.

Основным **результатом** статьи является доказательство существования ABA – факторизаций у спорадических групп McL и Fi_{22}, где A – стабилизатор точки у соответствующей группы подстановок ранга 3. В случае группы Fi_{22} имеется два представления ее в качестве группы подстановок ранга 3:

1) со стабилизатором точки, изоморфным $2.U_6(2)$;

2) со стабилизатором точки, изоморфным $O_7(3)$.

В первом случае ABA-факторизация вырождается в факторизацию $Fi_{22} = 2.U_6(2) \cdot^2 F_4(2)'$.

Второй случай, кажется, появился впервые.

1. Условие ABA-факторизации транзитивной группы перестановок ранга 3

В этой главе мы рассмотрим одно из достаточных условий ABA-факторизации транзитивной группы перестановок ранга 3. Напомним, что транзитивная группа перестановок G со стабилизатором точки A называется группой подстановочного ранга r, если

$$G = A \cup Ax_2A \cup \cdots \cup Ax_rA$$

для некоторых $x_1, \ldots, x_r \in G$.

В дальнейшем мы сможем использовать это свойство для спорадических групп, имеющих такое представление.

Таблица 1 (взята из [6]) содержит список спорадических групп ранга 3, каждая из которых указана вместе со стабилизатором точки и числом смежных классов по стабилизатору точки.

Таблица 1. Спорадические группы McL и Fi_{22} ранга 3

Группа	Стабилизатор точки	Индекс
McL	$U_4(3)$	275
Fi_{22}	$2.U_6(2)$	3510
	$O_7(3)$	14080

Далее мы докажем ряд вспомогательных утверждений, а в конце главы выведем основной критерий, по которому будем проверять возможность ABA-факторизации спорадических групп ранга 3.

1.1. Вспомогательные леммы

Лемма 1. *Пусть G – конечная группа, $A, H \leq G$. Тогда для всех $a_0 \in A$ и всех $x \in G$ таких, что $\{a_0xA\} \cap H \neq \emptyset$, выполнено $|\{a_0xA\} \cap H| = |A \cap H|$.*

Доказательство. Пусть $\{a_0xA\} \cap H = \{a_0xa_1, a_0xa_2, \ldots, a_0xa_d\}$, где $a_i \in A$. Возьмем два элемента из полученного множества и перемножим их: $(a_0xa_i)^{-1}(a_0xa_j) = {a_i}^{-1}a_j$. Результат будет лежать в $A \cap H$ по построению.

Так как произведение ${a_i}^{-1}a_j \in A \cap H$, то $a_j = a_ih_{ij}$, где $h_{ij} \in A \cap H$. Отсюда

$$|\{a_0xA\} \cap H| \leq |A \cap H|.$$

Докажем равенство. Пусть h принадлежит пересечению $A \cap H$. Возьмем элемент $a_1 \in A$ такой, что $a_0xa_1 \in \{a_0xA\} \cap H$. Следовательно, элемент a_1h тоже принадлежит $A \cap H$. Тогда a_oxa_1h принадлежит a_oxA, а потому и A. Элемент a_oxa_1h принадлежит H, так как $a_0xa_1 \in H$ и H – подгруппа в G.

Соответственно, для любого $h \in A \cap H$ будет выполнено $a_oxa_ih \in \{a_0xA\} \cap H$.

Предположим, что $|\{a_0xA\} \cap H| < |A \cap H|$. Тогда существуют такие $h_1, h_2 \in A \cap H$, что $h_1 \neq h_2$ и при этом $a_0xa_ih_1 = a_0xa_ih_2$.

Но все элементы a_0xa_j попарно различны для $j = 1, 2, \ldots, d$, следовательно, не может существовать двух равных элементов вида $a_oxa_ih_j$. А значит, наше предположение не верно и

$$|\{a_0xA\} \cap H| = |A \cap H|.$$

Лемма доказана ■

Лемма 2. *Пусть G – конечная группа, $A, H \in G$. Если $AxA \cap H \neq \emptyset$, то $AxA = AhA$ для некоторого $h \in H$.*

Доказательство. По условию существует $h \in AxA \cap H$. Для некоторых $a, a' \in A$, $h = axa'$. Следовательно,

$$AhA = A(axa')A = AxA.$$

Лемма доказана ■

Лемма 3. *Пусть G – транзитивная группа ранга r со стабилизатором точки A, и H — подгруппа в G. Если $AxA \cap H \neq \emptyset$ для всех $x \in G$, то $G = AHA$. В частности, $G \neq AHA$ тогда, и только тогда, когда $AxA \cap H = \emptyset$ для некоторого $x \in G$.*

Доказательство. Для любого $x_1, \dots, x_r \in G$ $Ax_iA \cap H \neq \emptyset$, тогда согласно лемме 2 $AxA = AhA$.

Значит,

$$G = A \cup Ax_2A \cup \dots \cup Ax_rA,$$

следовательно,

$$G = A \cup Ah_2A \cup \dots \cup Ah_rA = AHA.$$

Теперь докажем вторую часть леммы. Если $G \neq AHA$, то существует $x \in G$, такой что $x \neq aha'$, где $a, a' \in A, h \in H$.

Обратно, если найдется элемент $x \in G$, такой что $AxA \cap H = \emptyset$, то такой $x \notin AHA$, а значит, и вся группа $G \neq AHA$.

Лемма доказана ■

Лемма 4. *Пусть G – транзитивная группа перестановок ранга 3 со стабилизатором точки A, H — подгруппа в G. Если $G \neq AHA$, то $AHA \subsetneq A \cup AxA$ для некоторого $x \in G$. В частности, найдется $x \in G$ такой, что $|(AxA \cup A) \cap H| = |H|$.*

Доказательство. Пусть $G \neq AHA$. По лемме 3 получаем $AxA \cap H = \emptyset$ для некоторого $x \in G$.

Так как G – группа ранга 3, то $G = A \cup AxA \cup AyA$, где $x, y \in G$. Тогда найдется $y \in G \setminus (A \cup AxA)$, такой что $H \subsetneq A \cup AyA$.

Если $H \subseteq A \cup AxA$, то $AHA \subseteq A \cdot (A \cup AxA) \cdot A$, а отсюда следует

$$AHA \subsetneq A \cup AxA \text{ и } (AxA \cup A) \cap H = H.$$

Лемма доказана ■

Лемма 5. *Пусть G – транзитивная группа перестановок ранга 3 со стабилизатором точки A. Элемент x из G не принадлежит A. Если B – подгруппа G и $B \cap AxA \neq \emptyset$, то либо $G = ABA$, либо $B \subseteq A \cup AxA$.*

Доказательство.

$$G = A \cup AxA \cup AyA,$$

так как G – транзитивная группа перестановок ранга 3 со стабилизатором точки A, $x, y \in G$.

Применим лемму 3 для подгруппы $B \leq G$, где $B \cap AxA \neq \emptyset$. Получим два варианта:

- для любого $y \in G$ верно $AyA \cap B \neq \emptyset$, и тогда $G = ABA$;
- существует $y \in G$ такой, что $AyA \cap B = \emptyset$, но тогда B содержится в $G \setminus AyA$, то есть $B \subseteq A \cap AxA$.

Лемма доказана ■

Лемма 6. *Пусть G – транзитивная группа перестановок ранга 3 со стабилизатором точки A. Элемент x из G не принадлежит A. Если B – подгруппа G, $x \in B$ и $G \neq ABA$, то $B \leq A \cup AxA$.*

Доказательство. Пусть $x \in B \cap AxA$. Т.к. $G \neq ABA$, то по лемме 5 $B \leq A \cup AxA$. Лемма доказана ■

Лемма 7. *Пусть G – простая транзитивная группа перестановок ранга 3 со стабилизатором точки A, не являющаяся ABA-группой. Элемент x из G не принадлежит A. Если инволюция $\tau \in AxA$, но $\tau \notin A$, то и все инволюции группы G содержатся во множестве $A \cup AxA$.*

Доказательство. Пусть инволюция τ содержится в AxA, но не в A. Тогда $\tau = a_1 x a_2$ для $a_1, a_2 \in A$. Следовательно, $x = a_1^{-1} \tau a_2^{-1}$ и потому $AxA = A\tau A$.

Рассмотрим группу H, порожденную инволюциями τ и μ. Подгруппа простой группы, порожденная двумя инволюциями, всегда будет разрешимой, а значит, собственной в G. По условию тогда $G \neq AHA$. Применим лемму 6:

$$H \subseteq A \cup AxA \Rightarrow \mu \in A \cup AxA.$$

Лемма доказана ■

1.2. Теорема о факторизации транзитивной группы перестановок ранга 3

Теорема 1. *Пусть G – транзитивная группа перестановок ранга 3 со стабилизатором точки A, и любая максимальная подгруппа группы G порождена инволюциями. Тогда $G = ABA$ для некоторой собственной подгруппы B группы G.*

Доказательство. Пусть H – максимальная подгруппа группы G, не содержащаяся в A. Допустим, что G не является ABA-группой. В таком случае, $G \neq AHA$, и, по лемме 4, $AHA \subseteq A \cup AxA$ для некоторого $x \in G$. Так как по условию теоремы любая максимальная подгруппа G порождена инволюциями, а группа H максимальна, и в то же время $H \nsubseteq A$, то найдется инволюция $\tau \in AxA$. Тогда, по лемме 7, все инволюции группы G содержатся в $A \cup AxA$.

Докажем теперь, что в условиях нашей теоремы AHA не просто содержится, но совпадает со множеством $A \cup AxA$.

1. Очевидно, $A \leq AHA$.
2. Поскольку H порождается инволюциями и $H \nsubseteq A$, то найдется такая инволюция τ, что $\tau \in H$ и $\tau \notin A$. Следовательно, $\tau \in AxA$. И тогда, по лемме 2 $A\tau A = AxA$. То есть $AxA \subset AHA$.

Но раз все элементы A содержатся в AHA и все элементы AxA содержатся в AHA, то $A \cup AxA \subseteq AHA$. По лемме 4, $AHA \subseteq A \cup AxA$. Значит, $AHA = A \cup AxA$.

Рассмотрим теперь отличную от H максимальную подгруппу F группы G, которая также не содержится в стабилизаторе A. Применив для нее ровно те же рассуждения, мы получим, что $AFA = A \cup AxA$. А это значит, что все максимальные подгруппы группы G лежат во множестве $A \cup AxA$, и, следовательно, группа $G = A \cup AxA$, а значит, G – группа ранга 2. Это противоречит условиям теоремы. Следовательно, предположение о том, что $G \neq ABA$, неверно, и потому $G = ABA$. Теорема доказана ■

1.3. Следствие из теоремы о факторизации

С помощью следующего утверждения ослабим условия теоремы 1, требуемые для того, чтобы транзитивная группа ранга 3 имела ABA-факторизацию.

Следствие из теоремы о факторизации. Пусть G – транзитивная группа перестановок ранга три со стабилизатором точки A. Если все максимальные подгруппы группы G порождены инволюциями или если в максимальных подгруппах найдутся подгруппы, порожденные инволюциями, и не содержащиеся целиком в A, то $G = ABA$ для некоторой собственной подгруппы B группы G.

1.4. Дополнительные утверждения

Перед тем, как приступать к непосредственному изучению спорадических простых групп ранга 3, докажем еще две полезные леммы, которые пригодятся нам в изучении строения спорадических групп.

Лемма 8. *Пусть G – группа, X – подгруппа в G, порожденная инволюциями, и G есть расщепляемое расширение H с помощью X. Если не существует такой собственной нормальной подгруппы Y в G, для которой верно $X \subseteq Y$, то и вся группа G порождается инволюциями.*

Доказательство. Путь $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ – инволюции из X. Тогда, $X \leq \langle \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m \rangle^G = Y \triangleleft G$. Так как Y не может быть собственной подгруппой по условию, то $Y = G$, и мы получили требуемое.

Лемма доказана ■

Напомним, что $\Phi(H)$ обозначает подгруппу Фраттини группы H.

Лемма 9. *Пусть группа $H/\Phi(H)$ – простая неабелева группа и $H \backslash \Phi(H)$ содержит инволюцию. Тогда группа H порождается инволюциями.*

Доказательство. Пусть μ – инволюции из $H \setminus \Phi(H)$. Так как $\Phi(H)\mu$ – инволюция в $H/\Phi(H)$, и $H/\Phi(H)$ – простая группа, то $H/\Phi(H)$ порождена сопряженными с $\Phi(H)\mu$ инволюциями.

Пусть K – прообраз подгруппы $H/\Phi(H)$. Тогда $K = \langle \mu^K \rangle$ и $K\Phi(H) = H$. Так как $\Phi(H)$ состоит из необразующих элементов, то $K = H$, что и требовалось доказать.

Лемма доказана ■.

Следствие. Пусть $\tau \in Z(H)$, где τ – инволюция, и $H/\langle \tau \rangle$ – простая неабелева группа. Если силовская 2-подгруппа группы H не является (обобщенной) группой кватернионов, то H порождается инволюциями.

Доказательство. Если $H/\langle\tau\rangle$ – простая неабелева группа и $H \cong H_0 \times \langle\tau\rangle$, тогда H порождается инволюциями. Пусть $H \ncong H_0 \times \langle\tau\rangle$. Тогда $\langle\tau\rangle \leq \Phi(H)$, и $H/\Phi(H)$ – простая группа. Так как силовская 2-подгруппа группы H не является (обобщенной) группой кватернионов, то $H \setminus \langle\tau\rangle$ содержит инволюцию. Теперь мы можем применить к такой группе лемму 9.

2. Группа МакЛафлина – ABA-группа

Спорадическая группа МакЛафлина McL, порядок которой равен $2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$, имеет представление в виде группы перестановок ранга 3 со стабилизатором точки группой $U_4(3)$ порядка $2^7 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7$. Эту информацию можно получить из [4,6,10].

В таблице 2 выписаны все с точностью до изоморфизма максимальные подгруппы группы McL с указанием порядка и индекса.

Таблица 2. Максимальные подгруппы группы МакЛафлина McL

Группа	Порядок	Индекс
$U_4(3)$	$2^7 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7$	275
M_{22}	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	2025
$U_3(5)$	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$	7128
$3_+{}^{1+4} : 2S_5$	$2^4 \cdot 3^6 \cdot 5$	15400
$3^4 : M_{10}$	$2^4 \cdot 3^6 \cdot 5$	15400
$L_3(4) : 2_2$	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	22275
$2 \cdot A_8$	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	22275
$2^4 : A_7$	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	22275
M_{11}	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$	113400
$5_+{}^{1+2} : 3 : 8$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^3$	299376

Проверяя выполнение условий теоремы 1 и ее следствия о том, что для существования ABA-факторизации группы перестановок ранга 3 достаточно, чтобы все максимальные подгруппы этой группы либо порождались инволюциями, либо содержали подгруппу, порожденную инволюциями и не лежащую в стабилизаторе точки, докажем следующую теорему для группы McL.

Отметим, что централизатор инволюции в группе McL изоморфен $2 \cdot A_8 = \hat{A}_8$ [8].

Теорема 2. *Спорадическая группа МакЛафлина McL имеет ABA-факторизацию для $A \cong U_4(3)$ с подходящими собственными подгруппами B группы G.*

Доказательство. Группы M_{22}, $U_3(5)$, M_{11} – простые неабелевы группы (см., например [6]), и, следовательно, все они порождаются инволюциями и удовлетворяют требованиям теоремы 1. Рассмотрим теперь менее тривиальные случаи.

1. $L_3(4) : 2_2$. Группа $L_3(4)$ – простая неабелева группа, и, значит, порождается инволюциями. 2_2 – циклическая группа второго порядка и тоже порождается инволюциями, а значит, и расщепляемое расширение линейной группы $L_3(4)$ с ее помощью порождается инволюциями.

2. $2 \cdot A_8 = \hat{A}_8$. Группа A_8 – простая неабелева группа, и, значит, порождается инволюциями. Но при этом силовская 2-подгруппа группы $\hat{A}_8$ не является ни циклической, ни (обобщенной) группой кватернионов. Поэтому существует инволюция τ, не содержащаяся в центре группы $\hat{A}_8$. Тогда, по лемме 9, группа $\hat{A}_8$ порождается инволюциями.

3. $2^4 : A_7$. Группа 2^4 – элементарная абелева и, очевидно, порождается инволюциями. Группа A_7 – знакопеременная группа. Значит, согласно лемме 8, и расщепляемое расширение группы 2^4 с помощью A_7 порождается инволюциями.

4. $3^4 : M_{10}$. Согласно тем же самым соображениям, что изложены выше, группа $M_{10} \cong A_6 \cdot 2$ порождается инволюциями. Группа 3^4, однако, не порождается инволюциями. Докажем, что, несмотря на это, группа $H = 3^4 : M_{10}$ порождена инволюциями.

   Группа внешних автоморфизмов $Out(3^4) \cong GL_4(3)$. Тогда

   $$GL_4(3) = 3^{\frac{4\cdot 3}{2}}(3^4-1)(3^3-1)(3^2-1)(3-1) = 2^9 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 13.$$

   Порядок централизатора инволюции группы McL не делится на 3^4. Значит, существует инволюция из M_{10}, которая не централизует группу 3^4. Тогда мы можем построить группу $T = \langle {M_{10}}^x | x \in H \rangle$. Очевидно, что T – нормальная подгруппа в H, причем по построению, T порождается инволюциями. Но тогда $T = (3^4 \cap T) : M_{10} = H$, что и требовалось доказать.

5. ${3_+}^{1+4} : 2S_5 = H$. Докажем, что рассматриваемая подгруппа H либо порождается инволюциями, либо подходит на роль сомножителя B в ABA – факторизации группы McL (см. лемму 5). Напомним, что в качестве сомножителя A выступает стабилизатор точки подгруппа $U_4(3)$.

   Действительно, H не содержится в A и $H \cap A \neq \emptyset$. Так как, $\hat{S}_5 \leq \hat{A}_8$, то найдется инволюция $x \in H$, которая не лежит в стабилизаторе точки A, и потому $H \cap AxA \neq \emptyset$. Значит, либо $H \subseteq A \cup AxA$, и порождается инволюциями (см. лемму 7), либо $McL = AHA$ (см. лемму 5).

6. ${5_+}^{1+2} : 3 : 8$. Группа $3 : 8$ содержит хотя бы одну инволюцию, но, очевидно, не порождается ими. Значит, вся группа $H = {5_+}^{1+2} : 3 : 8$ не порождается инволюциями. Докажем, что, несмотря на это, группа H удовлетворяет условиям нашей теоремы. Она содержит подгруппу X, порожденную инволюциями, в которых найдется элемент x, не лежащий в $U_4(3)$. Ее порядок делится на 25. Действительно, пусть τ – инволюция, лежащая в циклической группе порядка 8. Число сопряженных с τ во всей группе H равно индексу централизатора C_H этой инволюции в H.

   Так как C_H содержится в подгруппе, сопряженной с $\hat{A}_8$, то по теореме Лагранжа порядок C_H не делится на 5^2. Таким образом, число инволюций, сопряженных с τ в H, делит $\frac{|H|}{|C_H|} \equiv 0(\bmod 25)$. Более того, порядок подгруппы, порожденной инволюциями в H, делится на 25.

Порядок стабилизатора точки группы McL – группы $U_4(3)$ – равен $2^7 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7 = 3265920$. Число пять входит в это разложение только в первой степени, а значит, $X \not\leq U_4(3)$ и подгруппа H удовлетворяет следствию из теоремы 1.3.

Итак, мы показали, что все максимальные подгруппы группы МакЛафлина McL порождены инволюциями либо содержат в себе подгруппу, порожденную инволюциями, не содержащуюся в стабилизаторе точки группе $U_4(3)$, а это означает, что выполнено условие теоремы 1 и следствия 1.3. из нее, и группа McL имеет факторизацию вида ABA, где $A = U_4(3)$, а B – какая-то собственная подгруппа $B \subset McL$.

Теорема доказана ■

3. ABA-факторизации спорадической группы Фишера Fi_{22}

Спорадическая группа Фишера Fi_{22}, порядок которой равен $2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, имеет представление в виде группы перестановок ранга 3 со стабилизатором точки группой $2 \cdot U_6(2)$ порядка $2^{16} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ или группой $O_7(3)$ порядка $2^9 \cdot 3^9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. Эту информацию можно получить из [4, 6, 10].

В таблице 3 выписаны все с точностью до изоморфизма максимальные подгруппы группы Fi_{22} с указанием порядка и индекса.

Таблица 3. Максимальные подгруппы группы Fi_{22}

Группа	Порядок	Индекс
$2 \cdot U_6(2)$	$2^{16} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	3510
$O_7(3)$	$2^9 \cdot 3^9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$	14080
$O_8^+(2) : S_3$	$2^{13} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7$	61776
$2^{10} : M_{22}$	$2^{17} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	142155
$2^6 : S_6(2)$	$2^{15} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	694980
$(2 \times 2_+^{1+8} : U_4(2)) : 2$	$2^{17} \cdot 3^4 \cdot 5$	1216215
$S_3 \times U_4(3) : 2_2$	$2^9 \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7$	1647360
${}^2F_4(2)'$	$2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13$	3592512
$2^{5+8} : (S_3 \times A_6)$	$2^{17} \cdot 3^3 \cdot 5$	3648645
$3_+^{1+6} : 2^{3+4} : 3^2 : 2$	$2^8 \cdot 3^9$	12812800
S_{10}	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5$	17791488
M_{12}	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$	679311360

Перед тем как приступать к доказательству существования ABA-факторизации группы Фишера Fi_{22}, докажем вспомогательную лемму про одну из ее максимальных подгрупп.

Лемма 10. *В группе $H = 3_+^{1+6} : 2^{3+4} : 3^2 : 2$ существует подгруппа $3_+^{1+6} \rtimes \langle \tau \rangle$, порожденная инволюциями, для некоторой инволюции τ из H.*

Доказательство. Пусть $S = 3_+^{1+6}$, $K = 2^{3+4} : 3^2 : 2$, $L = 2^{3+4} : 2$, и тогда $H = S \rtimes K$.

Рассмотрим централизатор $C_L(S)$. Его порядок равен единице, иначе существует инволюция $\tau \in L$ такая, что $C_H(\tau) \geq S$, а значит, $|C_H(\tau)|$, делится на 3^7. Согласно атласу конечных групп [4], это не так.

Для $S \triangleleft H$ выполняется соотношение $H/SC_H(S) \leq Out(S)$, тогда из предыдущего следует, что $K \leq Out(S)$, а значит, и $L \leq Out(S) = GSp_6(3)$.

Элементами $GSp_{2n}(q)$ будут все матрицы $M_{2n\times 2n}$ из $GL_{2n}(q)$, для которых выполняется соотношение

$$MPM^t = \gamma(M)P, \text{ где } \gamma(M) = \pm 1. \tag{1}$$

В подходящем базисе матрица P имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & \emptyset & \\ & & \ddots & & \\ & \emptyset & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 0 & I_{n\times n} \\ -I_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Нам будет удобно использовать первый вариант.

Группа $Sp_{2n}(q)$ — подгруппа в $GSp_{2n}(q)$ индекса 2, для которой $\gamma(M) = 1$.

Пусть $T = 2^{3+4} < L \leq GSp_6(3)$. Рассмотрим, как соотносятся T и $Sp_6(3)$. Пересечение $T \cap Sp_6(3)$ — подгруппа индекса ≤ 2 в группе T. Тогда $T/T \cap Sp_6(3)$ — циклическая порядка 2. Так как коммутант всегда содержится в любой нормальной подгруппе, фактор по которой абелев, то коммутант группы 2^{3+4}, равный 2^3, содержится в $T \cap Sp_6(3)$, а значит, и в $Sp_6(3)$. Этот важный факт будет использован в дальнейшем.

Отождествим группу $S = 3_+^{1+6}$ с симплектическим векторным пространством следующим образом. $S/Z(S)$ — элементраная абелева порядка 3^6. Она может рассматриваться как симплектическое векторное пространство V размерности 6. Группа S представима в виде центрального произведения неабелевых групп порядка 3^3 с объединенными центрами: $Q_1 \circ Q_2 \circ Q_3$. На каждом Q_i можно определить симплектическое векторное пространство V_i с базисом $\langle a_i, b_i \rangle$.

Так как $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = z^{\delta(a_i, b_i)}$, где $z \in Z(S)$ — образующий элемент в $Z(S)$, то определим билинейную форму на V_i: $(a_i|b_i) = \delta(a_i, b_i)$. V рассматривается над полем $GF(3)$, поэтому значения билинейной формы будут следующими:

- $(a_i|b_i) = 1$;
- $(a_i|a_i) = (b_i|b_i) = 0$;
- $(b_i|a_i) = -1$.

То есть $[a_i^\alpha, b_i^\beta] = [a_i, b_i]^{\alpha\beta}$ и $a_i^\alpha \to \alpha a_i, b_i^\beta \to \beta b_i$, поэтому $[a_i^\alpha, b_i^\beta] = [a_i, b_i]^{\alpha\beta} \to (\alpha a_i|\beta b_i) = \alpha\beta(a_i|b_i)$. При этом $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$, причем $V_1^\perp = V_2 \oplus V_3, V_2^\perp = V_1 \oplus V_3, V_3^\perp = V_1 \oplus V_2$. Более того, $V = V_1 \perp V_2 \perp V_3$.

Рассмотрим элементы группы $2^3 < Sp_6(3)$ как линейные операторы в симплектическом ЛВП V размерности 6 над полем $GF(3)$. Группа 2^3 — прямое произведение циклических порядка 2: $\langle c\rangle \times \langle d\rangle \times \langle f\rangle, c^2 = d^2 = f^2 = 1$. Собственные значения линейных операторов, соответствующих c, d, f, равны ± 1, а в подходящем базисе их матрицы будут равны диагональным с ± 1 по главной диагонали.

Линейное векторное пространство V является прямой суммой трех попарно ортогональных пространств размерности 2: $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 = \langle a_1, b_1\rangle \oplus \langle a_2, b_2\rangle \oplus \langle a_3, b_3\rangle$. Каждая пара базисных векторов a_i, b_i для $i = 1, 2$ или 3 является симплектической парой, задающей подпространство $V_i = \langle a_i, b_i\rangle$ в V, для которого можно построить ортогональное дополнение $\langle a_i, b_i\rangle^\perp$. Тогда действие линейного оператора подгруппы 2^3 в подпространстве V_i можно описать следующей матрицей:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Относительно линейного оператора τ из 2^3 пространство V разбивается в прямую сумму двух подпространств $V_+ = \{u \in V | u^\tau = u\}$ и $V_- = \{u \in V | u^\tau = -u\}$. В случае, когда a_i, b_i одновременно находятся либо в V_+, либо в V_- матрица линейного оператора удовлетворяет соотношению (1), где $\gamma(M) = 1$. В случае, когда $a_i \in V_+, b_i \in V_-$ или наоборот матрица линейного оператора не удовлетворяет (1), где $\gamma(M) = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Докажем, что для любой инволюции $\nu \in 2^3$ существует пара $\{a, b\}$, состоящая из собственных векторов. Допустим $dimV_+ \geq 4$. Так как размерность максимального изотропного подпространства не больше 3 (по теореме Витта), то существует пара неортогональных векторов и оба они собственные. Для $dimV_- \geq 4$ ситуация аналогичная. Допустим $dimV_+ = dimV_- = 3$. Тогда существуют $a \in V_+$ и $b \in V_-$, которые составляют симплектическую пару, которые в свою очередь будут собственными.

Значит, мы можем построить инвариантное подпространство V_1 размерности 2, но тогда существует ортогональное ему пространство $V_1^\perp$ размерности 4, и $V = V_1 \oplus V_1^\perp$.

Рассмотрим отдельно подпространство $V_1^\perp = V_2$ размерности 4. Максимальное изотропное подпространство в V_2 имеет размерность не больше 2. Значит, аналогично предыдущим рассуждениям, существует пара собственных векторов $\{a_2, b_2\}$, а значит, пространство V разбивается в сумму трех инвариантных подпространств размерности 2. Но тогда матрица линейного оператора ν будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix},$$ где M_1, M_2, M_3 — диагональные матрицы с ± 1 по главной диагонали.

По выше доказанному каждая клетка M_1, M_2, M_3 будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ либо } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Докажем теперь, что матрицы всех элементов из 2^3 будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} \pm I_{2\times 2} & 0 & 0 \\ 0 & \pm I_{2\times 2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm I_{2\times 2} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что

$$[\nu] = \begin{pmatrix} I_{2\times 2} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{2\times 2} & 0 \\ 0 & 0 & -I_{2\times 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -I_{4\times 4} \end{pmatrix}.$$

Тогда для любого другого линейного оператора τ должно выполняться равенство $[\tau][\nu] = [\nu][\tau]$:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -I_{4\times 4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -I_{4\times 4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ C & -D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -C & D \end{pmatrix}$$

Следовательно, $B = 0$ и $C = 0$, и тогда матрица τ имеет нужный нам вид.

Значит, матрицы всех элементов из 2^3 имеют вид

$$\begin{pmatrix} \pm I_{2\times 2} & 0 & 0 \\ 0 & \pm I_{2\times 2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm I_{2\times 2} \end{pmatrix}.$$

Всего таких матриц 8, что равно числу элементов из 2^3, следовательно, существует элемент, матрица которого имеет вид диагональной с -1 по главной диагонали.

Поэтому любой элемент группы $S/Z(S)$ инвертируется инволюцией μ, $[\mu] = -I_{6\times 6}$. Это означает, что для любого $v \in S$ выполняется равенство $\mu^{-1} v \mu = v^{-1} z'$, где $z' \in Z(S)$.

Рассмотрим подгруппу $\langle v, Z(S)\rangle = \langle v\rangle \times \langle z\rangle$. Тогда $\mu^{-1} v \mu v^{-1}$ – произведение инволюций. Следовательно, существует инволюция μ' такая, что $\mu\mu' = v^{-2} z'$. Так как z – необразующий элемент, то группа $S \rtimes \langle \mu \rangle$ порождается инволюциями ■

Проверяя выполнение условий теоремы 1 и ее следствия о том, что для существования ABA-факторизации группы перестановок ранга 3 достаточно, чтобы все максимальные подгруппы этой группы либо порождались инволюциями, либо содержали подгруппу, порожденную инволюциями и не лежащую в стабилизаторе точки, докажем следующую теорему для группы Fi_{22}.

Теорема 3. *Спорадическая группа Фишера Fi_{22} имеет ABA-факторизации для $A \cong 2U_6(2)$ и для $A \cong O_7(3)$ с подходящими собственными подгруппами B группы G.*

Доказательство. Сначала рассмотрим ситуацию, когда стабилизатором точки группы перестановок ранга 3 является максимальная подгруппа $2 \cdot U_6(2)$.

Группы $O_7(3)$, ${}^2F_4(2)'$, M_{12} – простые неабелевы группы, и, следовательно, все они порождаются инволюциями и удовлетворяют требованиям теоремы 1. Группа S_{10} тоже порождена инволюциями и удовлетворяет требованиям теоремы 1. Рассмотрим теперь менее тривиальные случаи.

1. $O_8^+(2) : S_3$. Группы $O_8^+(2)$(простая неабелева) и S_3 порождены инволюциями, следовательно, расщепляемое расширение группы $O_8^+(2)$ с помощью группы S_3 тоже порождается инволюциями.

2. $2^{10} : M_{22}$. Группа 2^{10} является прямым произведением циклических порядка 2, а значит, порождена инволюциями. Группа M_{22} — простая спорадическая группа Матье, следовательно, порождена инволюциями. Тогда расщепляемое расширение группы 2^{10} с помощью группы M_{22} тоже порождается инволюциями.

3. $2^6 : S_6(2)$. Группа 2^6 является прямым произведением циклических порядка 2, а значит, порождена инволюциями. Группа $S_6(2)$ простая неабелева. Следовательно, она порождена инволюциями. Тогда группа $2^6 : S_6(2)$ – расщепляемое расширение группы 2^6 с помощью группы $S_6(2)$ – тоже порождается инволюциями.

4. $(2 \times 2_+^{1+8} : U_4(2)) : 2 = H$. Группа 2 циклическая порядка 2, группа 2_+^{1+8} экстраспециальная изоморфная центральному произведению четырех диэдральных групп D_8, группа $U_4(2)$ простая неабелева, следовательно, все они порождены инволюциями, а значит, и исходная группа H порождается инволюциями.

5. $S_3 \times U_4(3) : 2_2 = H$. Группы S_3, $U_4(3)$(простая неабелева) и 2_2 порождены инволюциями, следовательно, группа H тоже порождается инволюциями.

6. $2^{5+8} : (S_3 \times A_6) = H$. Группа 2^{5+8} является является расширением 2^5 с помощью 2^8, которые порождены инволюциями, т.к. являются прямым произведением циклических порядка 2. Группы S_3 и A_6 порождены инволюциями.

   Рассмотрим группу $T = \langle 2^5 \rtimes (S_3 \times A_6) \rangle^H$, $|T| \equiv 0(\mod 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5)$. Она порождена инволюциями. Проверим, содержится ли она в стабилизаторе точки $2 \cdot U_6(2)$. Для этого рассмотрим максимальные подгруппы группы $U_6(2)$ в таблице 4 и проверим, может ли группа $T/\langle\tau\rangle$ быть подгруппой одной из них, где $\langle\tau\rangle$ – центральная подгруппа в T порядка не превосходящего 2.

   Рассмотрим группу $U_5(2)$. Группа $T/\langle\tau\rangle$ не может лежать ни в одной максимальной подгруппе группы $U_5(2)$ (см. таблицу 5), тогда группа $T/\langle\tau\rangle$ не является подгруппой группы $U_5(2)$.

   Рассмотрим группу $2_+^{1+8} : U_4(2)$. Так как она не имеет сечений, изоморфных $S_3 \times A_6$, то $T/\langle\tau\rangle$ не может быть ее подгруппой.

   Рассмотрим группу $2^9 : L_3(4)$. Ее порядок равен $2^{15} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, следовательно, группа $T/\langle\tau\rangle$ не может быть ее подгруппой.

Таблица 4. Максимальные подгруппы группы $U_6(2)$

Группа	Порядок	Группа	Порядок
$U_5(2)$	$2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 11$	$S_6(2)$	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$
$2_+^{1+8} : U_4(2)$	$2^{15} \cdot 3^4 \cdot 5$	M_{22}	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
$2^9 : L_3(4)$	$2^{15} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$S_3 \times U_4(2)$	$2^7 \cdot 3^5 \cdot 5$
$U_4(3) : 2_2$	$2^8 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7$	$3^{1+4}.[2^7.3]$	$2^7 \cdot 3^6$
$2^{4+8} : (3{\times}A_5) : 2$	$2^{14} \cdot 3^2 \cdot 5$	$L_3(4) : 2_1$	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

Таблица 5. Максимальные подгруппы группы $U_5(2)$

Группа	Порядок	Группа	Порядок
$2_-^{1+6} : 3_+^{1+2} : 2A_4$	$2^{10} \cdot 3^4$	$3^4 : S_5$	$2^3 \cdot 3^5 \cdot 5$
$3 \times U_4(2)$	$2^6 \cdot 3^5 \cdot 5$	$S_3 \times 3_+^{1+2} : 2A_4$	$2^4 \cdot 3^5$
$2^{4+4} : (3 \times A_5)$	$2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5$	$L_2(11)$	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$

Рассмотрим группу $U_4(3) : 2_2$. Группа $T/\langle\tau\rangle$ не может быть подгруппой группы $U_4(3) : 2_2$, так как порядок любой максимальной подгруппы этой группы либо не делится на 2^8, либо не делится на 3^3.

Рассмотрим группу $2^{4+8} : (3{\times}A_5) : 2$. Ее порядок равен $2^{14}{\cdot}3^2{\cdot}5$, следовательно, группа $T/\langle\tau\rangle$ не может быть ее подгруппой.

Рассмотрим группу $S_6(2)$. Группа $T/\langle\tau\rangle$ не может лежать ни в одной максимальной подгруппе $S_6(2)$(см. таблицу 8), значит, группа $T/\langle\tau\rangle$ не является ее подгруппой.

Рассмотрим группу M_{22}. Ее порядок равен $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, следовательно, группа $T/\langle\tau\rangle$ не может быть ее подгруппой.

Рассмотрим группу $S_3{\times}U_4(2)$. Ее порядок равен $2^7{\cdot}3^5{\cdot}5$, следовательно, группа $T/\langle\tau\rangle$ не может быть ее подгруппой.

Рассмотрим группу $3^{1+4}.[2^7.3]$. Ее порядок равен $2^7 \cdot 3^6$, следовательно, группа $T/\langle\tau\rangle$ не может быть ее подгруппой.

Рассмотрим группу $L_3(4) : 2_1$. Ее порядок равен $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, следовательно, группа $T/\langle\tau\rangle$ не может быть ее подгруппой.

Группа $T/\langle\tau\rangle$ не лежит ни в одной максимальной подгруппе группы $U_6(2)$, а значит, группа T не лежит в группе $2 \cdot U_6(2)$, но тогда по следствию 1.3. максимальная подгруппа $2^{5+8} : (S_3 \times A_6)$ удовлетворяет нашему условию.

Таблица 6. Максимальные подгруппы группы $U_4(2)$

Группа	Порядок	Группа	Порядок
$2^4 : A_5$	$2^6 \cdot 3 \cdot 5$	$3_+^{1+2} : 2A_4$	$2^3 \cdot 3^4$
S_6	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$	$3^3 : S_4$	$2^3 \cdot 3^4$
$2 \cdot (A_4 \times A_4).2$	$2^6 \cdot 3^2$		

Таблица 7. Максимальные подгруппы группы $U_4(3)$

Группа	Порядок	Группа	Порядок
$3^4 : A_6$	$2^3 \cdot 3^6 \cdot 5$	$2^4 : A_6$	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5$
$U_4(2)$	$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$	A_7	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
$L_3(4)$	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$2(A_4 \times A_4).4$	$2^7 \cdot 3^2$
$3_+^{1+4}.2S_4$	$2^4 \cdot 3^6$	M_{10}	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$
$U_3(3)$	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$		

Таблица 8. Максимальные подгруппы группы $S_6(2)$

Группа	Порядок	Группа	Порядок
$U_4(2) : 2$	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$	$2^6 : L_3(2)$	$2^9 \cdot 3 \cdot 7$
S_8	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$2.[2^6] : (S_3 \times S_3)$	$2^9 \cdot 3^2$
$2^5 : S_6$	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5$	$S_3 \times S_6$	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5$
$U_3(3) : 2$	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 7$	$L_2(8) : 3$	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 7$

7. $3_+^{1+6} : 2^{3+4} : 3^2 : 2 = H$. По лемме 10 в группе H есть подгруппа $3_+^{1+6} : 2^3 : 2 = T$, порожденная инволюциями. Порядок стабилизатора точки $2 \cdot U_6(2)$ равен $2^{16} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. Это значит, что группа T не может быть подгруппой $2 \cdot U_6(2)$, но тогда по следствию 1.3. максимальная подгруппа $3_+^{1+6} : 2^{3+4} : 3^2 : 2$ удовлетворяет нашему условию.

Таким образом, мы показали, что все максимальные подгруппы группы Fi_{22} порождены инволюциями либо содержат в себе подгруппу, порожденную инволюциями, не содержащуюся в стабилизаторе точки группе $2 \cdot U_6(2)$, а это означает, что выполнено условие теоремы 1 и следствия 1.3. из нее, и группа Fi_{22} имеет факторизацию вида ABA, где $A = 2 \cdot U_6(2)$, а B – какая-то собственная подгруппа группы Fi_{22}

Теперь рассмотрим ситуацию, когда стабилизатором точки группы перестановок ранга 3 является максимальная подгруппа $O_7(3)$.

Выше уже было доказано, что группы ${}^2F_4(2)', M_{12}, S_{10}, O_8^+(2) : S_3, 2^{10} : M_{22}, 2^6 : S_6(2), (2 \times 2_+^{1+8} : U_4(2)) : 2, S_3 \times U_4(3) : 2_2$ порождены инволюциями, значит, подходят и для случая, когда стабилизатором точки является группа $O_7(3)$. Рассмотрим оставшиеся группы.

1. $2 \cdot U_6(2)$. Группа $2 \cdot U_6(2)$ порождена инволюциями по следствию из леммы 9, и она не может быть подгруппой группы $O_7(3)$, а значит, она удовлетворяет нашему условию.

2. $2^{5+8} : (S_3 \times A_6) = H$. Группа 2^{5+8} является является расширением 2^5 с помощью 2^8, которые порождены инволюциями, т.к. являются прямым произведением циклических порядка 2. Группы S_3 и A_6 порождены инволюциями.

   Рассмотрим группу $T = \langle 2^5 \rtimes (S_3 \times A_6) \rangle^H$, $|T| \equiv 0(\mod 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5)$. Она порождена инволюциями. Проверим, содержится ли она в стабилизаторе точки

$O_7(3)$. Для этого рассмотрим максимальные подгруппы группы $O_7(3)$ в таблице 9 и проверим, может ли группа T быть подгруппой одной из них.

Таблица 9. Максимальные подгруппы группы $O_7(3)$

Группа	Порядок	Группа	Порядок
$2U_4(3):2_2$	$2^9\cdot 3^6\cdot 5\cdot 7$	$3_+^{1+6}:(2A_4\times A_4).2$	$2^6\cdot 3^9$
$3^5:U_4(2):2$	$2^7\cdot 3^9\cdot 5$	S_9	$2^7\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$
$L_4(3):2_2$	$2^8\cdot 3^6\cdot 5\cdot 13$	$(2^2\times U_4(2)):2$	$2^9\cdot 3^4\cdot 5$
$G_2(3)$	$2^6\cdot 3^6\cdot 7\cdot 13$	$2^6:A_7$	$2^9\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$
$3^{3+3}:L_3(3)$	$2^4\cdot 3^9\cdot 13$	$S_4\times S_6$	$2^7\cdot 3^3\cdot 5$
$S_6(2)$	$2^9\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$	$S_4\times 2(A_4\times A_4).2$	$2^9\cdot 3^3$

Рассмотрим группу $2U_4(3):2_2$. Покажем, что T не является подгруппой этой группы. Действительно, подгруппа из T порядка $2^7\cdot 3^3\cdot 5$ не может быть подгруппой $U_4(3)$(см. таблицу 7), а группа T не совпадает с группой $2U_4(3):2_2$ в силу разных порядков. Следовательно, группа T не может быть подгруппой $2U_4(3):2_2$.

Рассмотрим группу $3^5:U_4(2):2$. Порядок T не делит порядок $3^5:U_4(2):2$, следовательно, T не лежит в этой группе.

Рассмотрим группу $L_4(3):2_2$. Порядок T не делит порядок $L_4(3):2_2$, следовательно, T не лежит в этой группе.

Таблица 10. Максимальные подгруппы группы $L_4(3)$

Группа	Порядок	Группа	Порядок
$3^3:L_3(3)$	$2^4\cdot 3^6\cdot 13$	$(4\times A_6):2$	$2^6\cdot 3^2\cdot 5$
$U_4(2):2$	$2^7\cdot 3^4\cdot 5$	S_6	$2^4\cdot 3^2\cdot 5$
$3^4:2(A_4\times A_4).2$	$2^6\cdot 3^6$	$S_4\times S_4$	$2^6\cdot 3^2$

Рассмотрим группу $G_2(3)$. Ее порядок равен $2^6\cdot 3^6\cdot 7\cdot 13$, следовательно, группа T не может быть ее подгруппой.

Рассмотрим группу $3^{3+3}:L_3(3)$. Ее порядок равен $2^4\cdot 3^9\cdot 13$, следовательно, группа T не может быть ее подгруппой.

Рассмотрим группу $S_6(2)$. Группа T не может лежать ни в одной максимальной подгруппе $S_6(2)$(см. таблицу 8), значит, группа T не является ее подгруппой.

Рассмотрим группу $3_+^{1+6}:(2A_4\times A_4).2$. Ее порядок равен $2^6\cdot 3^9$, следовательно, группа T не может быть ее подгруппой.

Рассмотрим группу S_9. Группа T не может лежать ни в одной максимальной подгруппе S_9(см. таблицу 11), значит, группа T не является ее подгруппой.

Рассмотрим группу $(2^2\times U_4(2)):2$. Группа T не может лежать ни в одной максимальной подгруппе $U_4(2)$(см. таблицу 6), тогда группа T не является

Таблица 11. Максимальные подгруппы группы S_9

Группа	Порядок	Группа	Порядок
S_8	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$S_5 \times S_4$	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$
$S_7 \times 2$	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$3^3 : (2 \times S_4)$	$2^4 \cdot 3^4$
$S_6 \times S_3$	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5$	$3^2 : 2A_4$	$2^4 \cdot 3^3$

подгруппой групп 2^2, $U_4(2)$ и 2, а значит, и не является подгруппой $(2^2 \times U_4(2)) : 2$.

Рассмотрим группу $2^6 : A_7$. Ее порядок равен $2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, следовательно, группа T не может быть ее подгруппой.

Рассмотрим группу $S_4 \times S_6$. Ее порядок равен $2^7 \cdot 3^3 \cdot 5$, следовательно, группа T не может быть ее подгруппой.

Рассмотрим группу $S_4 \times 2(A_4 \times A_4).2$. Ее порядок равен $2^9 \cdot 3^3$, следовательно, группа T не может быть ее подгруппой.

Группа T не лежит ни в одной максимальной подгруппе группы $O_7(3)$, а значит, не лежит и в самой группе $O_7(3)$, но тогда по следствию 1.3. максимальная подгруппа $2^{5+8} : (S_3 \times A_6)$ удовлетворяет нашему условию.

3. $3_+^{1+6} : 2^{3+4} : 3^2 : 2 = H$. Пусть τ – инволюция из $R \cong 2 \cdot U_6(2)$, не лежащая в A и централизующая подгруппу, сопряженную с подгруппой S_1 индекса 2 из силовской 2-подгруппы $S = 2^{3+4} : 2$ группы H. Так как R порождается инволюциями, но не лежит в A, то $R \subseteq A \cup AxA$. Это же верно и для любых ее сопряжений. В частности $S_1 \subseteq A \cup AxA$. Если $S_1 \cap AxA = \emptyset$, то $S_1 \subseteq A$, а тогда $3^{1+6} \rtimes S_1$ принадлежит A, что неверно (смотри таблицу 9). Поэтому $S_1 \not\subseteq A$, а это значит, что существуют инволюции из группы H, не лежащие в стабилизаторе точки A, но тогда по следствию 1.3. максимальная подгруппа H удовлетворяет нашему условию.

Таким образом, мы показали, что все максимальные подгруппы группы Fi_{22} порождены инволюциями, либо содержат в себе подгруппу порожденную инволюциями, не содержащуюся в стабилизаторе точки группе $O_7(3)$, а это означает, что выполнено условие теоремы 1 и следствия 1.3. из нее, и, стало быть, группа Fi_{22} имеет факторизацию вида ABA, где $A = O_7(3)$, а B – какая-то собственная подгруппа $B \subset Fi_{22}$.

Теорема доказана ■

Список литературы

[1] Загорин Д. Л., Казарин Л. С., "Абелевы ABA-факторизации конечных групп", *Докл. Акад. Наук*, **347** (1996), 590–592; [Zagorin D. L., Kazarin L. S., "Abelevy ABA-faktorizacii konechnyh grupp", *Dokl. Akad. Nauk*, **347** (1996), 590–592, (in Russian).]

[2] Alavi S. H., Praeger C. E., "On triple factorizations of finite groups", *Journal of Group Theory*, **14** (2010), 341–360.

[3] Amberg B., Kazarin L. S., "ABA-groups with cyclic subgroup B", *Tr. IMM UrO RAN*, **18**:3 (2012), 10–22.

[4] Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A., *ATLAS of Finite Groups. Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[5] Giudici M., "Factorizations of sporadic simple groups", *Journal of Algebra*, **304** (2006), 311–323.

[6] Gorenstein D., *Finite Simple Groups. An Introduction to Their Classification*, Plenum Press New York and London, 1982.

[7] Gorenstein D., "On finite groups of the form ABA", *Can. J. Math.*, **14** (1962), 195–236.

[8] Gorenstein D., Herstein I. N., "A class of solvable groups", *Can. J. Math.*, **11** (1959), 311–320.

[9] Guterman M., "On ABA-groups of finite order", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **139** (1969), 109–143.

[10] Wilson R., Walsh P., Tripp J., Suleiman I., Parker R., Norton S., Nickerson S., Linton S., Bray J., Abbott R., "ATLAS of Finite Group Representations – Version 3", 2005, http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/.

[11] Wilson R., Walsh P., Tripp J., Suleiman I., Rogers S., Parker R., Norton S., Nickerson S., Linton S., Bray J., Abbott R., "ATLAS of Finite Group Representations – Version 2", 1999, http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/.

[12] Sysak Ya. P., "Finite groups of the form ABA", *Algebra and Logic*, **21**:3 (1982), 234–241.

[13] Струнков С. П., *Введение в теорию линейных представлений конечных групп*, МИФИ, 1993; [Strunkov S. P., *Vvedenie v teoriju linejnyh predstavlenij konechnyh grupp*, MIFI, 1993, (in Russian).]

[14] Сысак Я. П., "Конечные ABA-группы с абелевой p-подгруппой A и циклической p-подгруппой B", *Группы и системы их подгрупп*, 1983, 31–42; [Sysak Ja. P., "Konechnye ABA-gruppy s abelevoj p-podgruppoj A i ciklicheskoj p-podgruppoj B", *Gruppy i sistemy ih podgrupp*, 1983, 31–42, (in Russian).]

[15] Сысак Я. П., "О строении конечных ABA-групп с абелевой подгруппой A и циклической подгруппой B", *Строение групп и их подгрупповая организация*, 1984, 33–46; [Sysak Ja. P., "O stroenii konechnyh ABA-grupp s abelevoj podgruppoj A i ciklicheskoj podgruppoj B", *Stroenie grupp i ih podgruppovaja organizacija*, 1984, 33–46, (in Russian).]

[16] Сысак Я. П., "Конечные ABA-группы с абелевыми p-подгруппами A и B", *Укр. Мат. Журн.*, **40**:3 (1988), 356–361; [Sysak Ja. P., "Konechnye ABA-gruppy s abelevymi p-podgruppami A i B", *Ukr. Mat. Zhurn.*, **40**:3 (1988), 356–361, (in Russian).]

[17] Сыскин С. А., "Абстрактные свойства простых спорадических групп", *Успехи математических наук*, **5(215)** (1980), 181–212; [Syskin S. A., "Abstraktnye svojstva prostyh sporadicheskih grupp", *Uspehi matematicheskih nauk*, **5(215)** (1980), 181–212, (in Russian).]

The Existence of Triple Factorizations for Sporadic Groups of Rank 3

Kazarin L. S., Rassadin I. A., Sakharov D. N.

P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: group factorization, sporadic groups, McLaughlin group, Fisher group

A finite group G with proper subgroups A and B has triple factorization $G = ABA$ if every element g of G can be represented as $g = aba'$, where a and a' are from A and b is from B. Such a triple factorization may be sometimes degenerate to AB-factorization.

The task of finding triple factorizations for a group is fundamental and can be used for understanding the group structure. For instance, every simple finite group of Lie type has a natural factorization of such a type. Besides, the triple factorization is widely used in the study of graphs, geometries and varieties.

The goal of this article is to find triple factorizations for sporadic groups of rank 3. We have proved the existence theorem of ABA-factorization for sporadic simple groups McL and Fi_{22}. There exist two rank 3 permutation representations of Fi_{22}. We have proved that ABA-factorizations exist in both cases.

Сведения об авторах:
Казарин Лев Сергеевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р ф.-м. наук, профессор, зав. кафедрой алгебры и мат. логики,
orcid.org/0000-0003-1836-0955
Рассадин Илья Андреевич,
ООО «Нетис Телеком», исследователь,
orcid.org/0000-0003-2589-4461
Сахаров Денис Николаевич,
ООО «Агентство развития «4Р», исследователь,
orcid.org/0000-0002-3219-9064