

УДК 517.9

Уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова с запаздыванием¹

Алешин С. В.^{*,**}, Глызин С. Д.^{*,**}, Кащенко С. А.^{*,***}

** Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14*

*** НЦЧ РАН, 142432 Россия, Московская область, г. Черноголовка, ул. Лесная, д. 9*

**** Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409, Россия, г. Москва, Каширское шоссе, 31*

e-mail: fktiby@yandex.ru, glyzin@uniyar.ac.ru, kasch@uniyar.ac.ru

получена 20 января 2015

Ключевые слова: аттрактор, бифуркация, уравнение
Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова, уравнение Гинзбурга–Ландау

Рассматривается задача распространения волны плотности в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией (уравнение Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова с запаздыванием). Для исследования качественного поведения решений этого уравнения вблизи единичного состояния равновесия было построено уравнение Гинзбурга–Ландау. Численный анализ процесса распространения волны показал, что при достаточно малых значениях запаздывания данное уравнение имеет решения, близкие к решениям стандартного уравнения КПП. Увеличение параметра запаздывания приводит сначала к появлению затухающей колебательной составляющей в пространственном распределении решения. Дальнейший рост данного параметра приводит к разрушению бегущей волны. Это выражается в том, что в окрестности участка начального возмущения сохраняются незатухающие по времени и медленно распространяющиеся по пространству колебания, близкие к решениям соответствующей краевой задачи с периодическими граничными условиями. Наконец, если значение запаздывания достаточно велико, то во всей области распространения волны наблюдаются интенсивные пространственно-временные колебания.

Введение

Для моделирования процесса распространения генной волны А. Н. Колмогоровым, И. Г. Петровским и Н. С. Пискуновым в статье [1] было предложено логистическое уравнение с диффузией

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u[1 - u], \quad (1)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00158).

которое ниже будем называть уравнением КПП. Здесь $u(t, x)$ — плотность распределения числа особей, обладающих доминантным геном, $t \geq 0$ — временная переменная, а $x \in (-\infty, \infty)$ — пространственная. Рассматривается задача распространения волны плотности численности от некоторого ненулевого начального условия. Почти одновременно с этой работой появилась статья Р. А. Фишера [2], также посвященная анализу волн плотности численности в уравнении (1), в связи с чем уравнение (1) иногда называют уравнением Фишера или Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова.

Уравнение (1) находит применение в широкой области приложений, связанных с распространением в пространстве волн различной природы, от концентрации некоторого реагирующего вещества до волн плотности популяции. Среди большого количества публикаций, посвященных данной теме, выделим книги [3–5], в которых содержатся суммирующие результаты по проблеме, отметим также обширный библиографический список, содержащийся в [5].

В работах [1, 2] рассмотрен вопрос о таких неотрицательных решениях $u(t, x)$, для которых при каждом $t > 0$ выполнены условия: $u(t, x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow +\infty$ и $u(t, x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$. Показано, что при достаточно больших t функция $u(t, x)$ принимает некоторую фиксированную форму. Отметим также работы [6, 7], в которых для некоторых специальных случаев найдены точные решения уравнения (1).

Для любых классических граничных условий (например, для условий Неймана: $\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=a} = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=b} = 0$; периодических граничных условий $u(t, x + T) \equiv u(t, x)$ и ряда других) уравнение (1) имеет только один аттрактор — однородное состояние равновесия $u_0 \equiv 1$. Все остальные состояния равновесия неустойчивы.

Рассмотрим обобщение уравнения КПП

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u[1 - u(t - h, x)], \quad (2)$$

содержащее запаздывание $h > 0$. Для него исследовано поведение решений с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности (в $C_{[-\infty, \infty] \times [-h, 0]}$) состояния равновесия $u_0 \equiv 1$. Для случая, когда коэффициент запаздывания h близок к $\pi/2$, показано, что поведение решений (2) в окрестности u_0 определяется специальным нелинейным параболическим уравнением типа Гинзбурга–Ландау. Далее приведены результаты численного моделирования как для решений с начальными условиями, близкими к u_0 , так и решений, моделирующих распространение волны в уравнении (2) в случае неограниченной по x области.

1. Постановка задачи

Отметим, что логистическое уравнение с запаздыванием

$$\dot{u} = u[1 - u(t - h)] \quad (3)$$

достаточно хорошо изучено (см. [8–16]). При $h < e^{-1}$ решение (3) монотонно стремится к единице, а при $e^{-1} < h < \pi/2$ стремится к единице колебательным образом.

В статье [8] показано, что при условии $h \leq 37/24$ все (положительные) решения (3) стремятся к единице при $t \rightarrow +\infty$. Состояние равновесия u_0 асимптотически устойчиво при $h \leq \pi/2$. По-видимому (см. [13]), u_0 глобально устойчиво при $h \leq \pi/2$. При $h > \pi/2$ имеется медленно осциллирующее (т.е. с расстоянием между всплесками больше, чем h) устойчивое периодическое решение $u_0(t)$. При $h - \pi/2 \ll 1$ и при $h \gg 1$ его асимптотика приведена в [11] (см. также [17]).

Для уравнения (2) с классическими граничными условиями ситуация сложнее. Пусть, например, заданы периодические граничные условия

$$u(t, x + T) \equiv u(t, x). \quad (4)$$

Конечно, при $h > \pi/2$ краевая задача (2), (4), как и уравнение (3), имеет пространственно однородное периодическое решение $u_0(t)$. При условии близости параметра h к $\pi/2$, а также при $h \gg 1$ это решение устойчиво. Если же значения h и T достаточно велики, то возможна потеря устойчивости решения $u_0(t)$ и возникновение сложных пространственно неоднородных структур [15–19].

Рассмотрим более подробно случай близости запаздывания h к $\pi/2$ и предположим, что выполнено соотношение

$$h = \pi/2 + \varepsilon h_1 \quad \text{где} \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (5)$$

Если дополнительно предположить, что для параметра T в (4) выполнено условие

$$T \gg 1, \quad (6)$$

то динамика краевой задачи (2), (4) существенно усложняется. Поведение решений в малой окрестности состояния равновесия $u_0 \equiv 1$ тогда в основном определяется нелокальным поведением решений нормализованного комплексного уравнения — уравнения Гинзбурга–Ландау

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \sigma \delta \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + h_1 \delta \xi + d |\xi|^2 \xi, \quad (7)$$

$$\xi(\tau, y + 1) \equiv \xi(\tau, y). \quad (8)$$

Здесь $\tau = \varepsilon t$, $y = T^{-1}x$ — новые временная и пространственная переменные, $\sigma = T^{-2}\varepsilon^{-1}$ — величина порядка единицы,

$$\delta = \frac{4 - 2\pi i}{4 + \pi^2}, \quad d = -\frac{2(3\pi - 2 + i(\pi + 6))}{5(4 + \pi^2)}. \quad (9)$$

Решения (2), (4) и решения (7), (8) связаны формулой

$$u(t, x) = 1 + \varepsilon^{1/2} [\xi(\tau, y) \exp(it) + \bar{\xi}(\tau, y) \exp(-it)] + O(\varepsilon). \quad (10)$$

Динамические свойства (7) – (8) существенно зависят от параметра σ . Например, при достаточно малых σ все простейшие периодические решения вида

$$\rho_m \exp(2\pi i m y + i \varphi_m \tau) \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

неустойчивы [20]. В статьях [18, 21] для задачи (7) с периодическими краевыми условиями (8) и с краевыми условиями Неймана выполнен численный эксперимент, позволяющий утверждать, что при уменьшении параметра σ ее колебательные режимы становятся неупорядоченными и имеют все более сложную структуру по пространственной переменной. Следует отметить, что утверждение о соответствии между решениями квазинормальной формы (7), (8) и исходной краевой задачи может быть обосновано только в случае гиперболичности аттрактора задачи (7), (8), поэтому в статье [22] для уравнения (2) с краевыми условиями Неймана и условиями (8) был выполнен переход к специальному разностному аналогу, с последующим численным анализом дискретной системы.

Для вывода дискретного аналога уравнения (3) фиксируем произвольно натуральное k и заметим, что любое решение $u(t) > 0$ уравнения (3) удовлетворяет интегральному соотношению

$$u(t + h/k) = u(t) \exp \left[\left(\frac{h}{k} - \int_{t-h}^{t-h+h/k} u(\tau) d\tau \right) \right]. \quad (11)$$

Далее, полагая в равенстве (11) $t = nh/k$, $n \in \mathbb{Z}$, $u_n = u(nh/k)$ и аппроксимируя фигурирующий в нем интеграл по формуле прямоугольников, приходим к разностному уравнению с запаздыванием

$$u_{n+1} = u_n \exp \left[\frac{h}{k} (1 - u_{n-k}) \right], \quad n \geq 0, \quad (12)$$

которое и является дискретным вариантом уравнения (3). Для получения дискретного аналога распределенного уравнения (2) выпишем аналогичное (11) интегральное равенство

$$u(t + h/k, x) = u(t, x) \exp \left[\int_t^{t+h/k} \frac{1}{u(\tau, x)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau, x) d\tau + \left(\frac{h}{k} - \int_{t-h}^{t-h+h/k} u(\tau, x) d\tau \right) \right]. \quad (13)$$

Фиксируем теперь некоторое натуральное N , зададим узлы $x_j = T(j - 1/2)/N$, $j = 1, \dots, N$ и заменим в (13) вторую частную производную по x второй разделенной разностью. Аппроксимируя интегралы по формуле прямоугольников, для переменных $u_{n,j} = u(nh/k, x_j)$ имеем систему разностных уравнений

$$u_{n+1,j} = u_{n,j} \exp \left[d \left(\frac{u_{n,j+1}}{u_{n,j}} + \frac{u_{n,j-1}}{u_{n,j}} - 2 \right) + \frac{h}{k} (1 - u_{n-k,j}) \right], \quad j = 1, \dots, N, \quad (14)$$

где $n = 1, 2, \dots$, $d = N^2/(kT^2)$, $u_{n,0} = u_{n,N}$, $u_{n,N+1} = u_{n,1}$.

Непосредственное вычисление по формулам (14) приближенных решений краевой задачи (7), (8) позволяет проследить за усложнением решений при уменьшении параметра d (соответствует увеличению значения T) и за увеличением амплитуды колебательного режима при увеличении параметра h . На рис. 1 приведены графики распределения решения краевой задачи (7), (8) по пространственной переменной, построенные с помощью дискретной модели (14) при $N = 50$, первые два графика построены для $T = 60$, $h = 1.6$ в случае а) и $h = 1.8$ в случае б), третий и четвертый

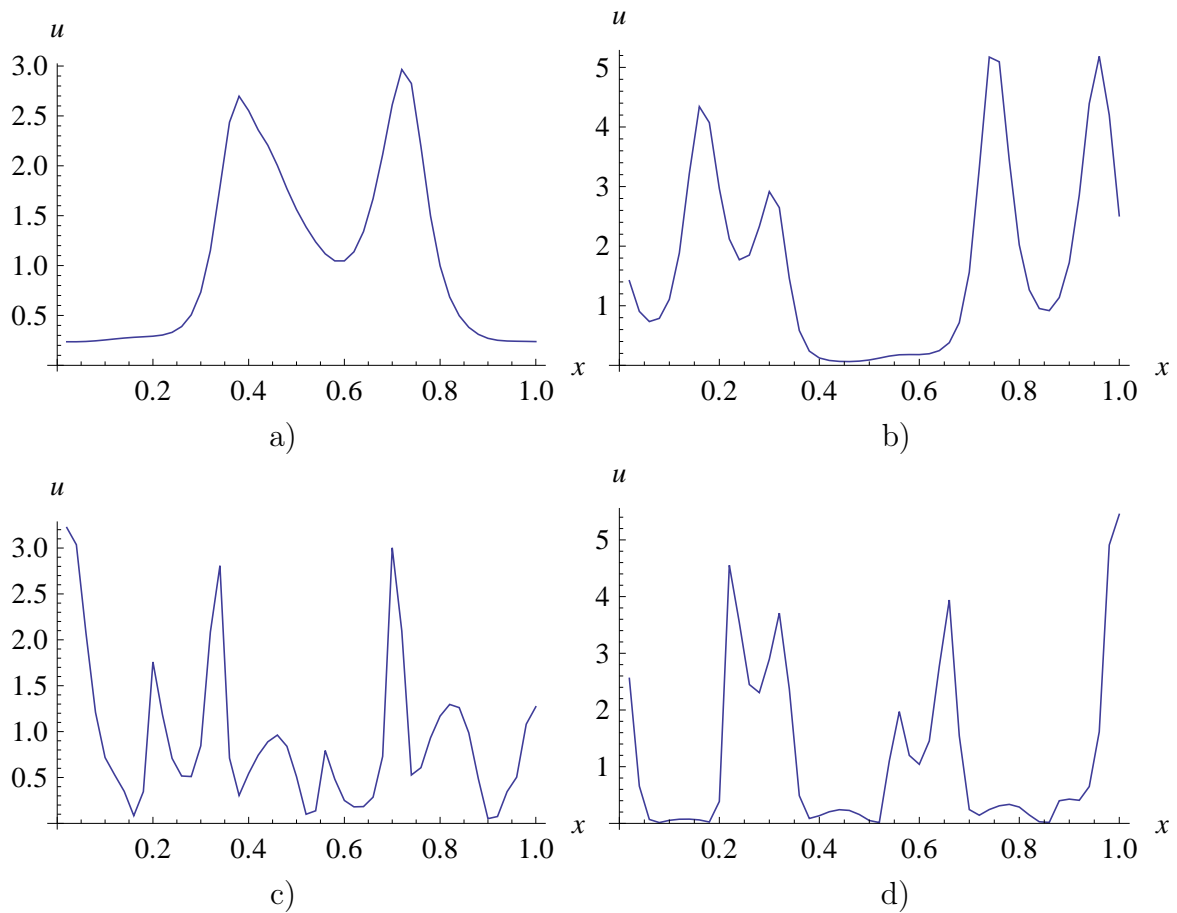


Рис. 1. Пространственное распределение решения $u(t, x)$ при а) $T = 60$, $h = 1.6$; б) $T = 60$, $h = 1.8$; в) $T = 120$, $h = 1.6$; г) $T = 120$, $h = 1.8$

графики построены для $T = 120$ и тех же значений h . На всех графиках рис. 1 пространственная переменная x пронормирована на T .

Учитывая, что для многих приложений представляет интерес задача о распространении волн концентрации в задаче (2), в следующих пунктах будем рассматривать это уравнение без граничных условий.

2. Построение нормализованного уравнения

Итак, рассмотрим вопрос о поведении решений с начальными условиями из некоторой достаточно малой, но независимой от ε окрестности в $C_{[-\infty, 0] \times [-h, 0]}$ состояния равновесия $u_0 \equiv 1$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \left[1 - u \left(t - \frac{\pi}{2} - \varepsilon, x \right) \right]. \quad (15)$$

Характеристическое (волновое) уравнение для линеаризованного на u_0 уравнения (15) имеет вид

$$\lambda = -k^2 - \exp \left(- \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) \lambda \right), \quad k \in (-\infty, \infty). \quad (16)$$

При достаточно малом k^2 это уравнение имеет корень $\lambda(k, \varepsilon)$, вещественная часть которого достаточно мала. Сформируем этот вывод более точно. Положим $k = \varepsilon^{1/2}m$. Тогда уравнение (16) имеет корень $\lambda_m(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon^{1/2}m, \varepsilon)$, для которого имеет место асимптотическое при $\varepsilon \rightarrow 0$ равенство

$$\lambda_m(\varepsilon) = i + \frac{\varepsilon(1 - m^2)(1 - i\pi/2)}{1 + \pi^2/4} + O(\varepsilon). \quad (17)$$

Таким образом при каждом $|m| < 1$ вещественная часть корня $\lambda_m(\varepsilon)$ близка к нулю, а мнимая — к 1.

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$u(t, x) = 1 + \varepsilon^{1/2}[\xi(\tau, y) \exp(it) + \bar{\xi}(\tau, y) \exp(-it)] + \varepsilon u_2(\tau, y, t) + \varepsilon^{3/2} u_3(\tau, y, t) + \dots, \quad (18)$$

где $\tau = \varepsilon t$, $y = \varepsilon^{1/2}x$, $\xi(\tau, y)$ — неизвестные и подлежащие определению «амплитуды», а зависимость функции $u_j(\tau, y, t)$ от аргумента t является 2π -периодической. Подставим (18) в (15) и будем приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в левой и правой частях получившегося формального тождества. На втором шаге тогда получим, что

$$u_2(\tau, y, t) = \frac{2-i}{5} \xi^2(\tau, y) \exp(2it) + \frac{2+i}{5} \bar{\xi}^2(\tau, y) \exp(-2it).$$

На третьем шаге, собирая коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, получим уравнение относительно u_3 . Из условия разрешимости этого уравнения в указанном классе функций, приходим, как и в предыдущем пункте, к уравнению типа Гинзбурга–Ландау для определения $\xi(\tau, y)$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \delta \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \delta \xi + d |\xi|^2 \xi, \quad (19)$$

где δ и d определяются по формулам (9). Отметим, что $\operatorname{Re} \delta > 0$ и $\operatorname{Re} d < 0$.

Основной результат состоит в следующем

Теорема 1. Пусть уравнение (19) имеет ограниченное при $\tau \rightarrow +\infty$ и при $y \rightarrow \pm\infty$ решение $\xi_0(\tau, y)$. Тогда уравнение (15) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{3/2})$ решение $u(t, x, \varepsilon)$, для которого

$$u(t, x, \varepsilon) = 1 + \varepsilon^{1/2}[\xi_0(\tau, y) \exp(it) + \bar{\xi}_0(\tau, y) \exp(-it)] + \varepsilon \left[\frac{2-i}{5} \xi^2(\tau, y) \exp(2it) + \frac{2+i}{5} \bar{\xi}^2(\tau, y) \exp(-2it) \right] + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Уравнение (19) имеет среди своих решений однопараметрическое семейство простейших периодических решений

$$u_m(\tau, y) = \rho_m \exp(imy + i\omega_m \tau), \quad (20)$$

где $\rho_m^2 = \frac{(m^2 - 1)\operatorname{Re} \delta}{\operatorname{Re} d}$, $|m| < 1$, $\omega_m = \left[\operatorname{Im} \delta - \operatorname{Im} d \frac{\operatorname{Re} \delta}{\operatorname{Re} d} \right] (1 - m^2) - \operatorname{Im} \delta$. В силу того, что имеет место неравенство

$$1 + \frac{\operatorname{Im} \alpha}{\operatorname{Re} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{Im} d}{\operatorname{Re} d} = \frac{-\pi^2 - 4}{6\pi - 4} < 0,$$

из результатов статьи [20] следует вывод о неустойчивости всех решений (20). Учитывая полученный результат, в следующем разделе рассмотрим некоторые свойства волновых решений уравнения (2).

3. Некоторые свойства уравнения распространения волны

В работе [1] было показано, что в уравнении (1) волны распространяются вдоль направлений $2t \pm x = \text{const}$, и был определен профиль волны, приводящей к переходу от нулевых значений переменной к единичным. Выполним в уравнении (2) замену в виде бегущей волны вида $u(t, x) = w(2t \pm x)$ и перейдем к новой временной переменной $s = 2t \pm x$, тогда для новой переменной $w(s)$ имеем следующее уравнение второго порядка с запаздыванием:

$$w'' - 2w' + w[1 - w(s - 2h)] = 0, \quad (21)$$

где штрихом обозначена производная по переменной s . Свойства устойчивости нулевого решения уравнения (21) не зависят от h , это решение представляет собой неустойчивый узел с кратным корнем, равным единице. Свойства устойчивости единичного состояния равновесия определяются расположением корней характеристического квазиполинома

$$P(\lambda) \equiv \lambda^2 - 2\lambda - \exp(-2h\lambda). \quad (22)$$

Рассмотрим сначала расположение и количество вещественных корней квазиполинома $P(\lambda)$. Простейший анализ свойств трансцендентного уравнения $P(\lambda) = 0$ показывает, что при всех положительных h оно имеет либо один, либо три корня. Один из этих корней положительный, а два других отрицательны и появляются при критическом значении h_1^* , для нахождения которого имеем следующую систему:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2\lambda - \exp(-2h\lambda) &= 0, \\ 2\lambda - 2 - 2h \exp(-2h\lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Решая систему (23), имеем $\lambda \approx -1.23141$, $h = h_1^* \approx 0.56077$. Приведенные выше рассуждения позволяют сформулировать следующее утверждение.

Лемма 1. *Квазиполином $P(\lambda)$ имеет при $0 < h < h_1^*$ ровно три вещественных корня: один положительный и два отрицательных, а при $h > h_1^*$ — единственный положительный вещественный корень.*

Таким образом в спектре устойчивости единичного состояния равновесия уравнения (21) всегда есть положительный вещественный корень. Рассмотрим теперь расположение остальных корней квазимногочлена $P(\lambda)$. Выполнено утверждение.

Лемма 2. *Все корни квазиполинома $P(\lambda)$, кроме одного вещественного положительного, лежат при $0 < h < h_2^*$ в левой комплексной полуплоскости. Здесь*

$$h_2^* = \frac{\arccos(-\sqrt{5} + 2)}{2\sqrt{\sqrt{5} - 2}} \approx 1.86173. \quad (24)$$

При $h = h_2^*$ на мнимую ось выходит пара чисто мнимых корней $\lambda = \pm i\omega_0$, причем

$$\omega_0 = \sqrt{\sqrt{5} - 2} \approx 0.48587. \quad (25)$$

Рассмотрим теперь окрестность решения $w(s) \equiv 1$ и найдем асимптотику режима, ответвляющегося от этого решения при $h = h_2^* + \mu$, где $0 < \mu \ll 1$. Для этого применим стандартную замену метода нормальных форм

$$w(s, \mu) = 1 + \sqrt{\mu}(z(\tau) \exp(i\omega_0 s) + \bar{z}(\tau) \exp(-i\omega_0 s)) + \mu w_1(s, \tau) + \mu^{3/2} w_2(s, \tau) + \dots, \quad (26)$$

где $\tau = \mu s$, $w_j(s, \tau)$ ($j = 1, 2$) — тригонометрические полиномы по переменной s , $z(\tau)$ — медленно меняющаяся амплитуда, подлежащая определению. Подстановка выражения (26) в уравнение (21) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях $\sqrt{\mu}$ приводит на третьем шаге к уравнению относительно $w_2(s, \tau)$, из условий разрешимости которого в классе тригонометрических полиномов получаем следующее уравнение на медленную амплитуду $z(\tau)$:

$$\frac{dz}{d\tau} = \varphi_0 z + \varphi_1 |z|^2 z, \quad (27)$$

где $\varphi_0 = \frac{2\omega_0^2(-1 + i\omega_0)}{P'(i\omega_0)}$, $\varphi_1 = \frac{1}{P'(i\omega_0)} \left(2\omega_0^2(1 - \omega_0^2 - 2i\omega_0) + b \left((\omega_0^2 + 2i\omega_0)^2 - \frac{1}{\omega_0^2 + 2i\omega_0} \right) \right)$, $b = \frac{\omega_0^2 + 2i\omega_0}{4\omega_0^2 + 4i\omega_0 + (\omega_0^2 + 2i\omega_0)^2}$. Используя полученное представление и формулы (24), (25), нетрудно найти приближенные значения коэффициентов уравнения (27) $\varphi_0 \approx 0.136807 - 0.20660i$, $\varphi_1 \approx -0.04429 - 0.03664i$. Учитывая, что $\operatorname{Re}(\varphi_0) > 0$, а $\operatorname{Re}(\varphi_1) < 0$ можно сформулировать следующее утверждение.

Лемма 3. *Существует такое $\mu_0 > 0$, что для всех $0 < \mu < \mu_0$ уравнение (21) имеет дихотомичный цикл, неустойчивое многообразие которого одномерно, а асимптотика задается формулой (26), в которой амплитуда $z(\tau)$ заменена выражением*

$$\sqrt{-\operatorname{Re}(\varphi_0)/\operatorname{Re}(\varphi_1)} \exp \left(i\epsilon s (\operatorname{Im}(\varphi_0)\operatorname{Re}(\varphi_1) - \operatorname{Re}(\varphi_0)\operatorname{Im}(\varphi_1)) / \operatorname{Re}(\varphi_0) + i\gamma \right),$$

где γ — произвольная константа, определяющая фазовый сдвиг вдоль цикла.

Представленные в первых трех разделах работы аналитические результаты позволяют получить некоторую информацию о решениях уравнения (2), однако для анализа зависимости решений от запаздывания и начальных условий требуется численный эксперимент, описанию которого и посвящен следующий раздел статьи.

4. Численный анализ уравнения КПП с запаздыванием

Численное исследование распространения волн концентрации в уравнении (2) от локализованного по пространству начального возмущения выполнялось на некотором отрезке $[a, b]$. При этом разница $|a - b|$ выбиралась достаточно большой для того, чтобы можно было проследить за распространением волны от начального момента до момента встречи фронта волны с границами a или b . Учитывая, что рассматривается задача о распространении локального возмущения, зададим на границах отрезка нулевые краевые условия $u(t, a) = u(t, b) = 0$.

Перейдем к описанию вычислительной процедуры. Вторую производную по пространственной переменной в правой части уравнения (2) заменим конечной разностью второго порядка. Для этого отрезок $[a, b]$ разобьем на N равных частей и построим сетку узлов с шагом $\Delta x = (b-a)/N$ так, что $x_j = a + j\Delta x$, где $j = 0, \dots, N-1$. Обозначим через $u_j(t)$ значение функции $u(t, x)$ в соответствующих узлах сетки. В итоге получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{u}_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{(\Delta x)^2} + [1 - u_j(t - h)]u_j, \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (28)$$

Для учета нулевых краевых условий полагаем $u_{-1}(t) = u_N(t) = 0$.

Численный эксперимент выполнялся на вычислительном кластере ЯрГУ (МНИЛ «Дискретная и вычислительная геометрия» им. Б.Н. Делоне). Одновременно решалось от $N = 0.9 \cdot 10^5$ до $N = 1.8 \cdot 10^5$ уравнений с запаздыванием. Особенностью численного решения такой системы является повышенная требовательность к объемам доступной памяти для хранения решения на промежутке запаздывания. В связи с этим приходилось существенно использовать жесткий диск кластера, что значительно замедляло процедуру расчета. Для вычислений использовался метод Дормана–Принца пятого порядка с переменной длиной шага интегрирования. Абсолютная и относительная погрешности алгоритма были приняты равными 10^{-12} . Начальный шаг интегрирования взят равным 10^{-3} .

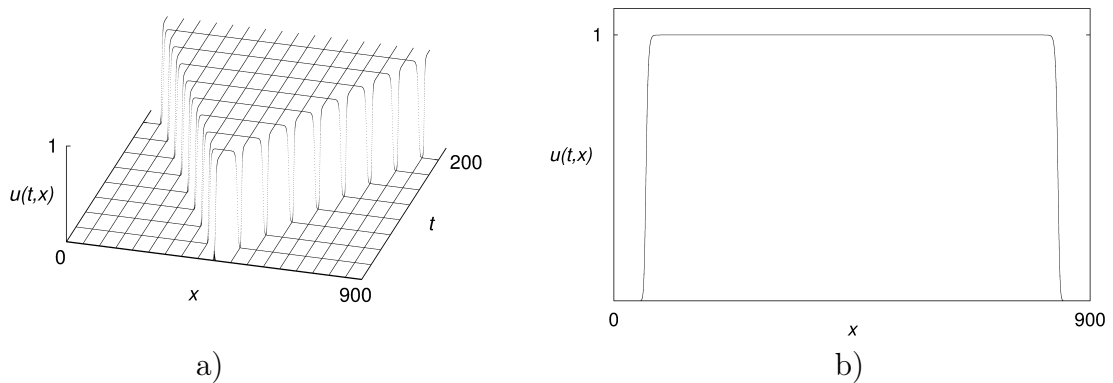


Рис. 2. Решение системы (28) с начальными условиями (29) при $h = 0$: а) распространение волны на плоскости (x, t) ; б) разрез при $t = 200$

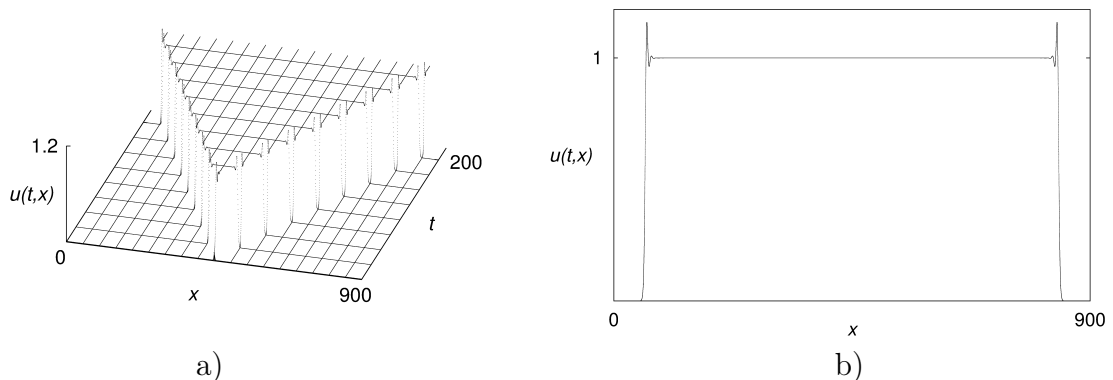


Рис. 3. Решение системы (28) с начальными условиями (29) при $h = 1$: а) распространение волны на плоскости (x, t) ; б) разрез при $t = 200$

Начальные условия выбирались в виде прямоугольного импульса высоты 0.1 и единичной ширины, расположенного в центре отрезка $[a, b]$ для всех $-h \leq t \leq 0$. В частности, для случая $x \in [0, 1800]$:

$$u_j(t) = \begin{cases} 0.1, & \text{если } j \in [89950, 90050], \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (29)$$

где $t \in [-h, 0]$. Для последующего анализа и графического отображения полученные данные прореживались.

Перейдем к результатам численного моделирования. Описание поведения уравнения (2) с запаздыванием будем проводить в сравнении с классическим уравнением (2) без запаздывания. На рис. 2 представлено распространение волны постоянной высоты от начального всплеска единичной ширины и высоты 0.1. Скорость распространения волны согласно [1] равнялась двум. (На соответствующих рисунках скорость распространения равна углу наклона профиля волны.)

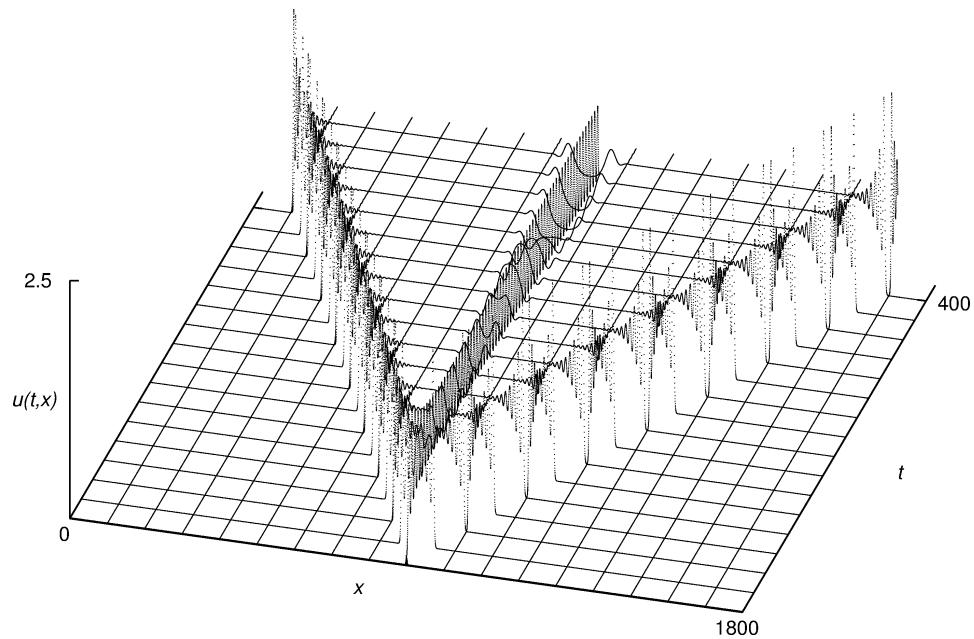
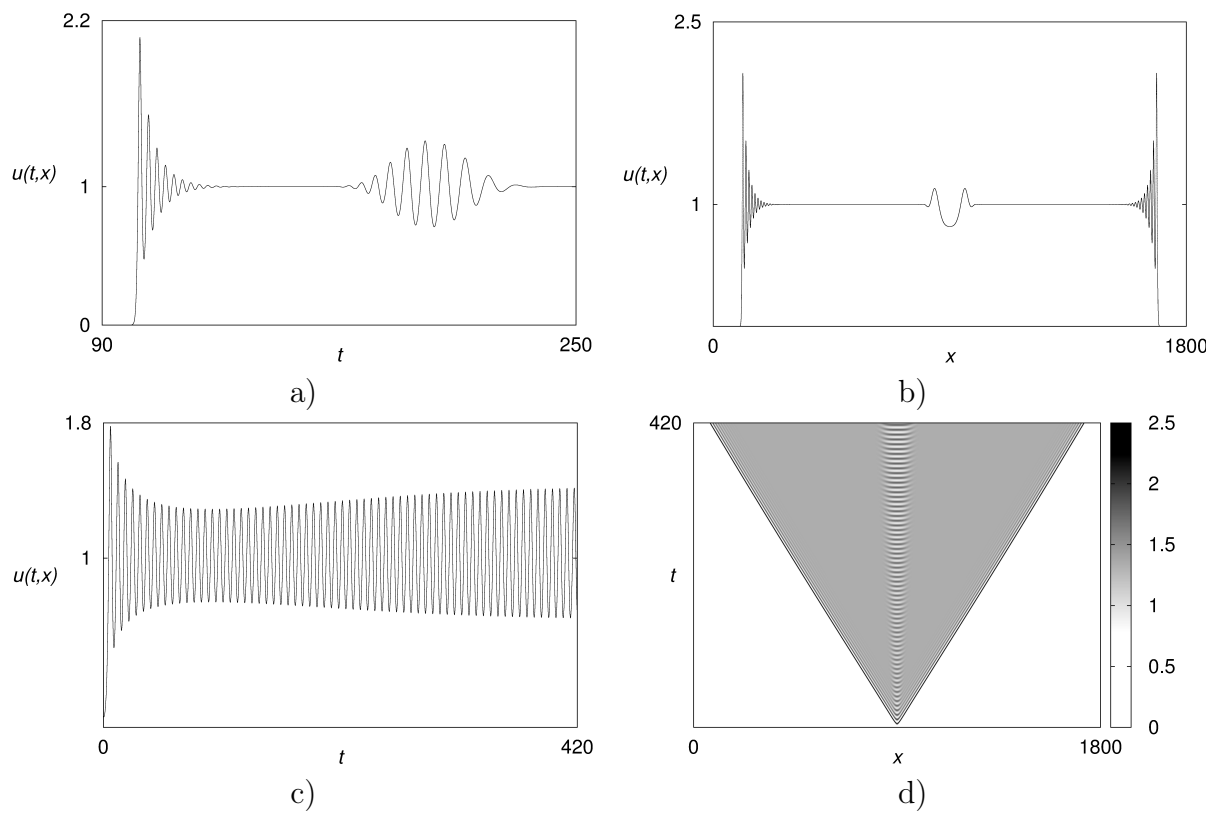
Рассмотрим теперь систему (28) с ненулевым запаздыванием. При увеличении параметра h можно выделить несколько этапов качественно различного поведения решений системы (28).

1. При относительно малом значении h на промежутке от нуля до h_1^* поведение системы (28) практически не отличается от поведения системы КПП без запаздывания. Величина h_1^* ограничивает данный промежуток, по-видимому, в связи с тем, что решения уравнения (21) на устойчивом инвариантном многообразии единичного состояния равновесия монотонно стремятся к этому состоянию.

2. При $h_1^* < h < \pi/2$ фронт распространения волны приближается к единичному значению колебательным образом. На рис. 3 показана такая волна при $h = 1$. В этом случае максимальная амплитуда всплеска равна примерно 1.2, а после прохождения фронта волны значение $u(t, x)$ быстро приближается к единице.

3. Следующее существенное изменение в распространении фронта волны системы (28) наблюдается при $h > \pi/2$. Существенной особенностью решения в этом случае является то, что оно перестает удовлетворять уравнению (21). Это происходит в силу того, что у логистического уравнения с запаздыванием (3) при $h = \pi/2$ решение $u_0 \equiv 1$ теряет устойчивость и от него отщепляется устойчивый цикл. Указанное обстоятельство приводит к тому, что в пространственной области, где были заданы ненулевые начальные условия (29), наблюдаются незатухающие колебания, амплитуда которых растет с ростом h . Размер пространственной области со сложными колебаниями медленно (в сравнении со скоростью распространения волнового фронта) расширяется. Решения в этой области близки к решениям уравнения (2) с классическими периодическими условиями (см. рис. 1а и 1с в первом разделе статьи), причем, как показано в первых двух разделах статьи, увеличение размера области неоднородности (соответствует росту величины T) приводит к появлению все более изрезанных по пространственной переменной режимов.

При $\pi/2 < h < h_2^*$ графические представления решения системы (28) с начальными условиями (29) приводятся на рис. 4, 5 для $h = 1.6$ и на рис. 6, 7 для $h = 1.7$. При этом на рис. 4, 6 приведена общая картина распространения волны от начального возмущения; на рис. 5а, 7а — разрез вдоль одного из волновых фронтов (в данном случае выбран разрез вдоль прямой $x = 2t + 900$); на рис. 5б, 7б — зависимость

Рис. 4. Распространение волны в системе (28) при $h = 1.6$ Рис. 5. Решение системы (28) при $h = 1.6$: а) разрез при $x = 2t + 900$; б) разрез при $t = 400$; в) разрез при $x = 900$; д) плотность распределения $u(t, x)$ в оттенках серого

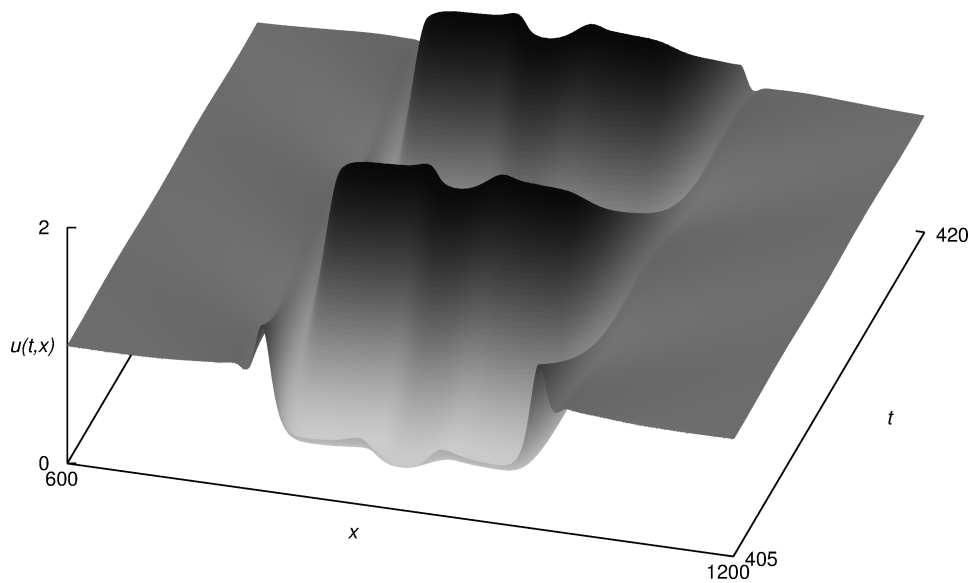


Рис. 6. Фрагмент ($x \in [600, 1200]$, $t \in [405, 420]$) графика распространения волны в системе (28) при $h = 1.7$

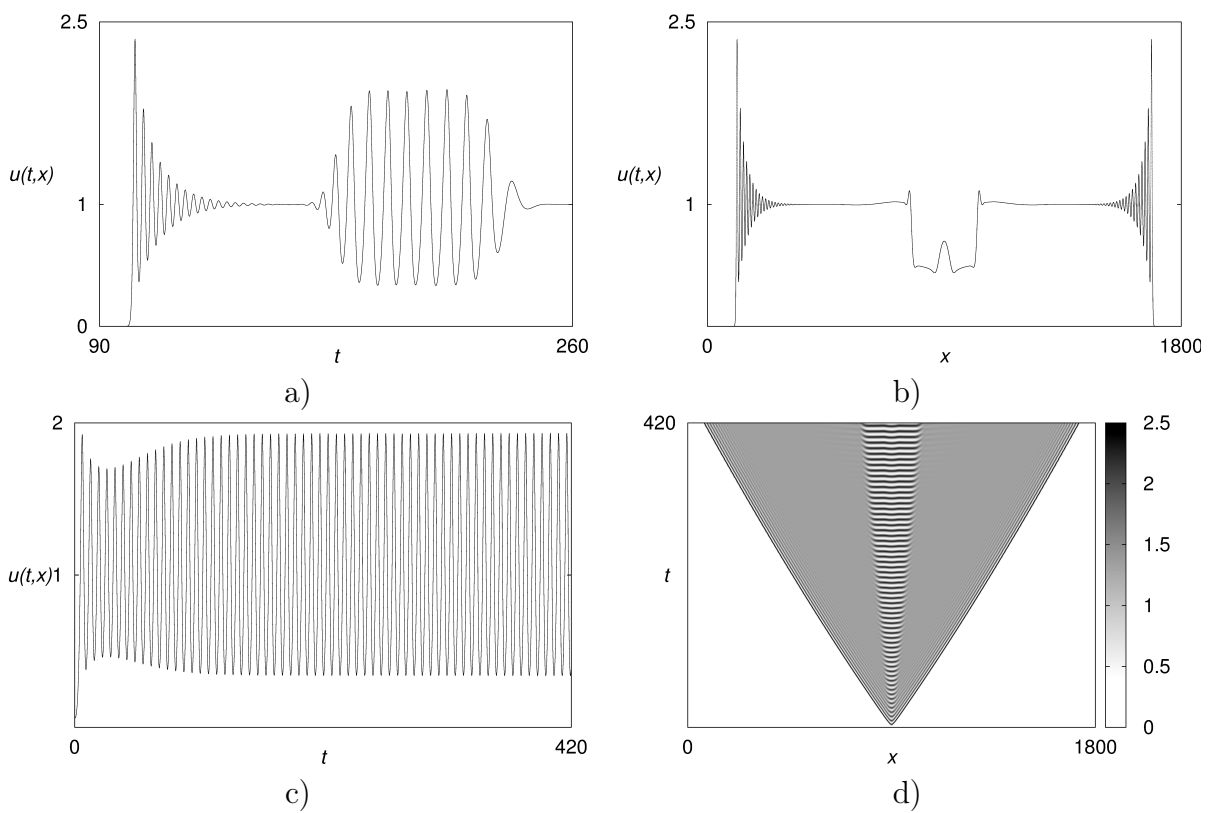


Рис. 7. Решение системы (28) при $h = 1.7$: а) разрез при $x = 2t + 900$; б) разрез при $t = 400$; в) разрез при $x = 900$; д) плотность распределения $u(t, x)$ в оттенках серого

решения от x при фиксированном $t = 400$; на рис. 5с, 7с — зависимость решения от t при фиксированном $x = 900$; и наконец, на рис. 5d, 7d изображена зависимость плотности распределения решения $u(t, x)$ в оттенках серого.

4. При дальнейшем увеличении $h > h_2^*$ характер поведения центральной части распространяющейся волны резко меняется. Для иллюстрации этих изменений на рис. 8, 9 приведен общий вид решения и несколько разрезов при $h = 1.8$ (это значение близко, но немного меньше величины h_2^* , см. (24)). Поскольку в силу леммы 3 при $h = h_2^*$ от единичного состояния равновесия уравнения (21) ветвится цикл, то пропадает область, в которой решение стремилось к единице. Это хорошо заметно на разрезе вдоль прямой $x = 2t + 900$ (рис. 9а) и на графике 9b зависимости решения от x при фиксированном $t = 400$. Кроме того, из изображенной на рис. 9d зависимости распределения решения $u(t, x)$ можно заключить, что относительно медленное распространение колебательной структуры, находящейся в центре распространяющейся волны, сменяется при значениях t , близких к 300, распространением со скоростью, близкой к скорости распространения фронта основной волны и равной двум. Представление о характере распределения решения по пространственной и временной переменным дает график $u(t, x)$ в области с границами $[400, 1400] \times [400, 420]$. Рисунки 9 и 9b показывают сильную изрезанность пространственно-временного распределения функции $u(t, x)$. Сравнивая эти рисунки с приведенными в первом разделе графиками решений задачи с периодическими краевыми условиями (рис. 1b и 1d), убеждаемся в их близости. Величина $h = 1.8$ близка, но меньше значения h_2^* . На рис. 10, 11 приведены аналогичные предыдущим графики, характеризующие распространение волны при $h = 2$. В этом случае вся область распространения волны заполнена интенсивными колебаниями по пространственной и временной переменным.

Заключение

Распространение возмущения в активной среде при учете запаздывания по времени представляет собой достаточно сложный процесс. Эта сложность обуславливает необходимость применения различных сочетаний аналитических и численных методов. На этом пути нами были получены следующие результаты.

1. Для выяснения некоторых особенностей качественного поведения решений уравнения КПП с запаздыванием было построено уравнение Гинзбурга–Ландау, которое описывает динамические свойства этого уравнения вблизи состояния равновесия $u_0 \equiv 1$.
2. Изучение уравнения распространения волны (21) позволило найти критические значения параметра запаздывания, при которых, по-видимому, меняется вид пространственного распределения решения задачи.
3. Численный анализ, выполненный с учетом аналитических результатов, позволил выделить следующие промежутки значений запаздывания:
 - промежуток, на котором поведение решений уравнения с запаздыванием близко к их поведению в задаче без запаздывания;

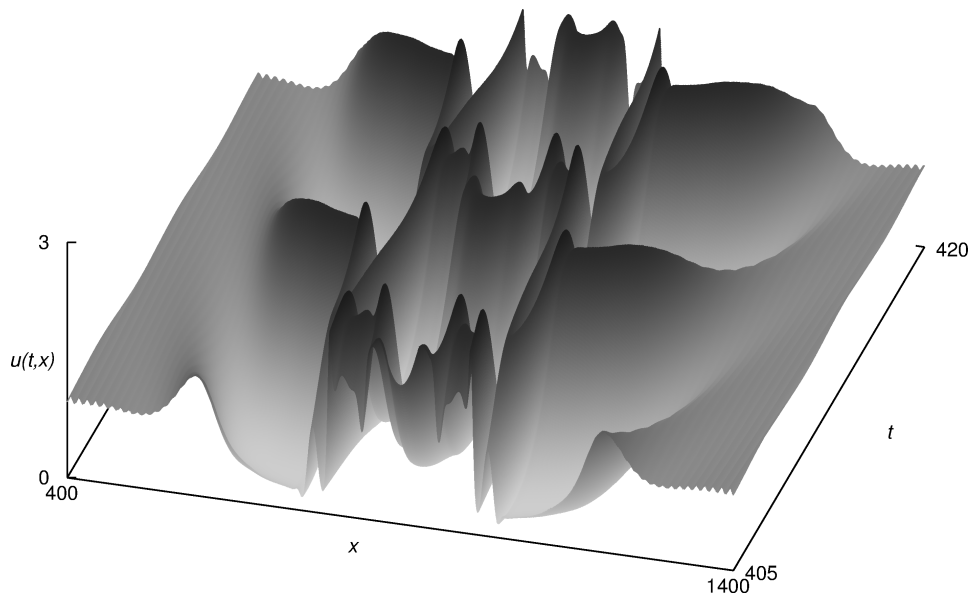


Рис. 8. Фрагмент ($x \in [400, 1400]$, $t \in [405, 420]$) графика распространения волны в системе (28) при $h = 1.8$

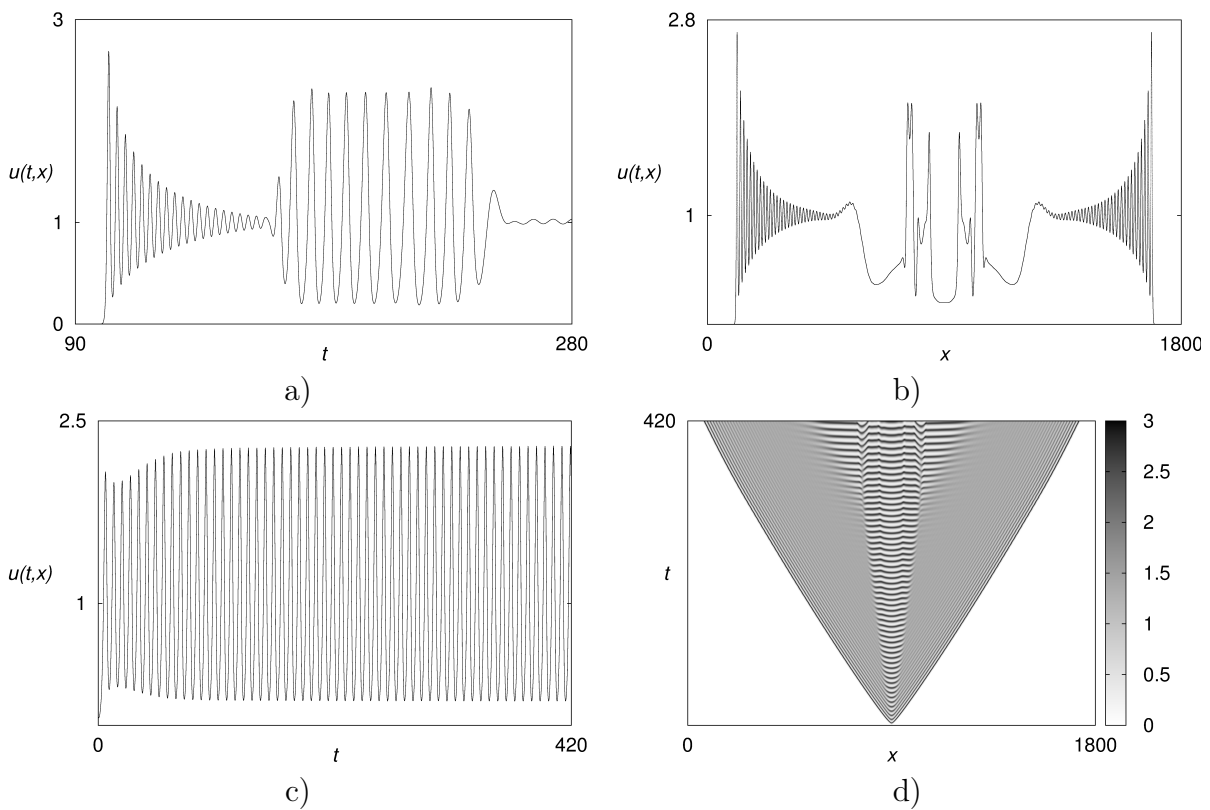


Рис. 9. Решение системы (28) при $h = 1.8$: а) разрез при $x = 2t + 900$; б) разрез при $t = 400$; в) разрез при $x = 900$; д) плотность распределения $u(t, x)$ в оттенках серого

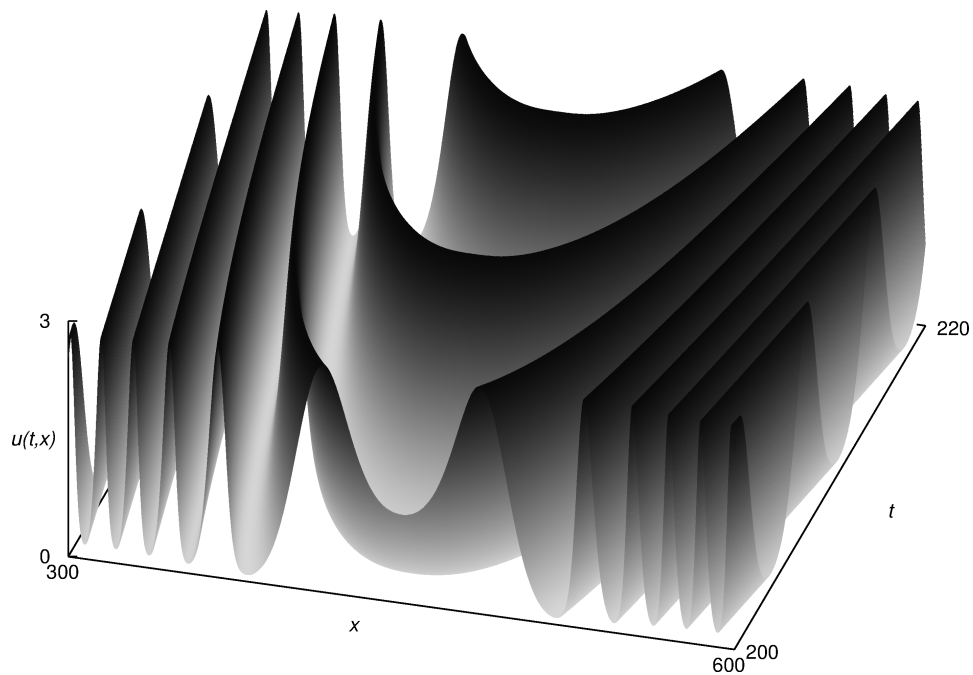


Рис. 10. Фрагмент ($x \in [300, 600]$, $t \in [200, 220]$) графика распространения волны в системе (28) при $h = 2$

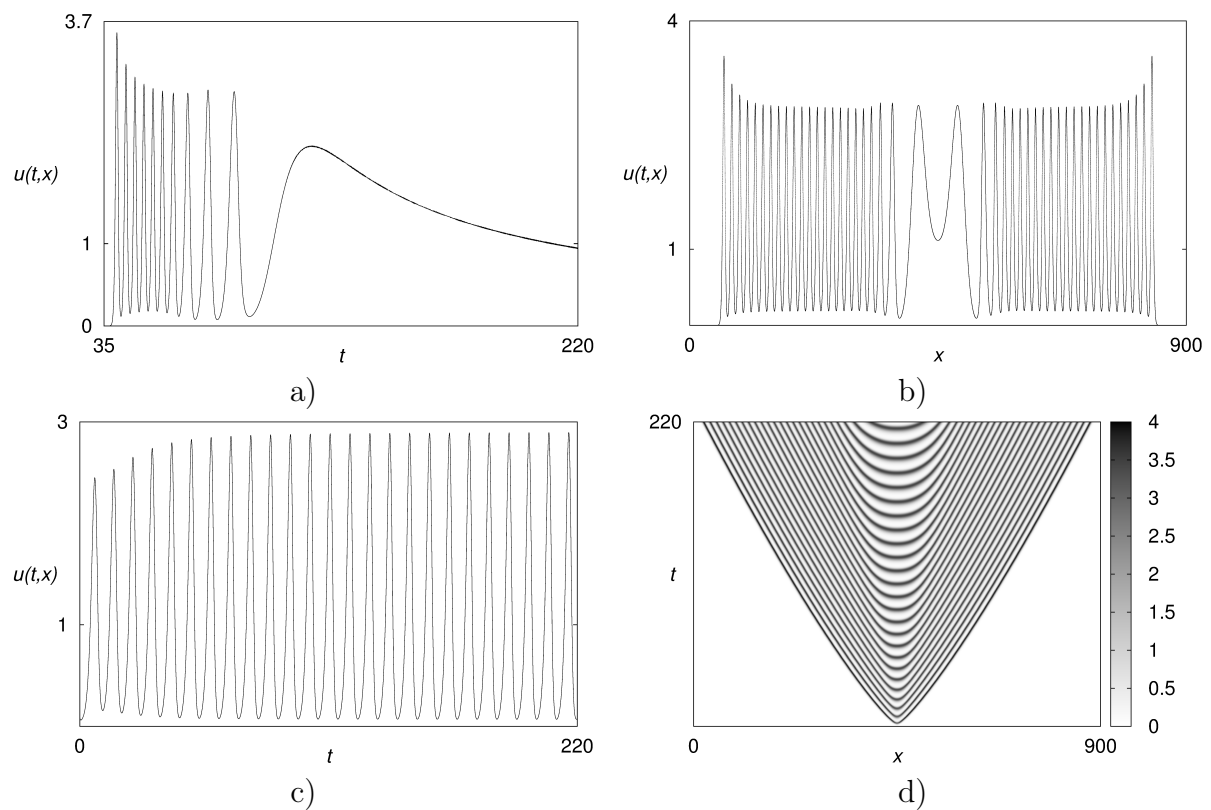


Рис. 11. Решение системы (28) при $h = 2$: а) разрез при $x = 2t + 900$; б) разрез при $t = 200$; в) разрез при $x = 450$; д) плотность распределения $u(t, x)$ в оттенках серого

- промежуток значений запаздывания, при которых в центре области распространения волны появляются участки решения со сложным пространственным распределением;
- найдены значения h , при которых в пространственном распределении решения сохраняются участки, где решение стремится к единице;
- найден промежуток значений запаздывания, при которых вся область распространения волны заполнена интенсивными колебаниями по пространственной и временной переменным.

Список литературы

- [1] Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С., “Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме”, *Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика*, **1:6** (1937), 1–26; French transl.: Kolmogorov A., Petrovsky I., Piscounov N., “Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique”, *Moscou Univ. Bull. Math.*, **1** (1937), 1–25.
- [2] Fisher R. A., “The Wave of Advance of Advantageous Genes”, *Annals of Eugenics*, **7** (1937), 355–369.
- [3] Murray J. D., *Mathematical Biology. I. An Introduction*, Third Edition, Berlin, 2001.
- [4] Danilov V. G., Maslov V. P., Volosov K. A., *Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes*, Dordrecht, Kluwer, 1995.
- [5] Volpert A., Volpert V., Volpert V., “Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems”, *American Mathematical Society*, 2000.
- [6] Ablowitz M. J., Zeppetella A., “Explicit solutions of Fisher’s equation for a special wave speed”, *Bull. Math. Biology*, **41** (1979), 835–840.
- [7] Кудряшов Н. А., “О точных решениях уравнений семейства Фишера”, *Теоретическая и математическая физика*, **94:2** (1993), 296–306; English transl.: Kudryashov N. A., “On exact solutions of families of Fisher equations”, *Theoretical and Mathematical Physics*, **94:2** (1993), 211–218.
- [8] Kakutani S., Markus L., “On the non-linear difference-differential equation $y'(t) = (a - by(t - \tau))y(t)$ contributions to the theory of non-linear oscillations”, *Ann. Math. Stud.*, **IV** (1958), 1–18.
- [9] Yang Kuang, *Delay Differential Equations. With Applications in Population Dynamics*, Academic Press, 1993.
- [10] Wright E. M., “A non-linear differential equation”, *J. Reine Angew. Math.*, **194:1–4** (1955), 66–87.
- [11] Кащенко С. А., “Асимптотика периодического решения обобщенного уравнения Хатчинсона”, *Исследования по устойчивости и теории колебаний*, ЯрГУ, Ярославль, 1981, 64–85; [Kashchenko S. A., “Asymptotics of periodical solution of Hutchinson generalized equation”, *Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy (Studies of Stability and Theory of Oscillations)*, YarGU, Yaroslavl, 1981, 64–85, (in Russian).]
- [12] Jones G. S., “The existence of periodic solutions of $f(x) = -\alpha f(x - 1)[1 + f(x)]$ ”, *T. Math. Anal. and Appl.*, **5** (1962), 435–450.
- [13] Кащенко С. А., “К вопросу об оценке в пространстве параметров области глобальной устойчивости уравнения Хатчинсона”, *Нелинейные колебания в задачах экологии*, ЯрГУ, Ярославль, 1985, 55–62; [Kashchenko S. A., “K voprosu ob otsenke v prostranstve parametrov oblasti global'noy ustoychivosti uravneniya Hutchinsona”, *Nelineynyye kolebaniya v zadachakh ekologii*, YarGU, Yaroslavl, 1985, 55–62, (in Russian).]

- [14] Колесов А. Ю., “Об устойчивости пространственно однородного цикла в уравнении Хатчинсона с диффузией”, *Математические модели в биологии и медицине*, **1**, Ин-т математики АН Лит. ССР, Вильнюс, 1985, 93–103 [Kolesov A. Yu., “Ob ustojchivosti prostranstvenno odnorodnogo cikla v uravnenii Hatchinsona s diffuziej”, *Matematicheskie modeli v biologii i medicine*, **1**, Vilnus: In-t. math. AN Lit. SSR, 1985. P. 93–103 (in Russian)].
- [15] Кащенко С. А., “Об установившихся режимах уравнения Хатчинсона с диффузией”, *ДАН СССР*, **292:2** (1987), 327–330; [Kashchenko S. A., “Ob ustanovivshihsja rezhimakh uravnenija Hatchinsona s diffuziej”, *DAN SSSR*, **292:2** (1987), 327–330, (in Russian).]
- [16] Кащенко С. А., “Пространственно-неоднородные структуры в простейших моделях с запаздыванием и диффузией”, *Математическое моделирование*, **2:9** (1990), 49–69; English transl.: Kashchenko S. A., “Spatial heterogeneous structures in the simplest models with delay and diffusion”, *Matem. mod.*, **2:9** (1990), 49–69.
- [17] Kashchenko S. A., “Asymptotics of the Solutions of the Generalized Hutchinson Equation”, *Automatic Control and Computer Science*, **47:7** (2013), 470–494.
- [18] Глызин С. Д., “Разностные аппроксимации уравнения «реакция-диффузия» на отрезке”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **16:3** (2009), 96–116; [Glyzin S. D., “Difference approximations of “reaction – diffusion” equation on a segment”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **16:3** (2009), 96–116, (in Russian).]
- [19] Wu J., *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [20] Кащенко А. А., “Устойчивость бегущих волн в уравнении Гинзбурга–Ландау с малой диффузией”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **18:3** (2011), 58–62; [Kashchenko A. A., “Analysis of Running Waves Stability in the Ginzburg–Landau Equation with Small Diffusion”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **18:3** (2011), 58–62, (in Russian).]
- [21] Glyzin S. D., “Dimensional Characteristics of Diffusion Chaos”, *Automatic Control and Computer Sciences*, **47:7** (2013), 452–469.
- [22] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Конечномерные модели диффузионного хаоса”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **50:5** (2010), 860–875; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Finite-dimensional models of diffusion chaos”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50:5** (2010), 816–830.

Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piscounov Equation with Delay

Aleshin S. V.^{*,**}, Glyzin S. D.^{*,**}, Kaschenko S. A.^{*,***}

** P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia*

*** Scientific Center in Chernogolovka RAS
Lesnaya str., 9, Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia*

**** National Research Nuclear University MEPhI,
Kashirskoye shosse 31, Moscow, 115409, Russia*

Keywords: attractor, bifurcation, Fisher–Kolmogorov equation, Ginzburg–Landau equation

We considered the problem of density wave propagation in a logistic equation with delay and diffusion (Fisher–Kolmogorov equation with delay). It was constructed a Ginzburg–Landau equation in order to study the qualitative behavior of the solution near the equilibrium state. The numerical analysis of wave propagation shows that for a sufficiently small delay this equation has a solution similar to the solution of a classical Fisher–Kolmogorov equation. The delay increasing leads to existence of the oscillatory component in spatial distribution of solutions. A further increase of delay leads to the destruction of the traveling wave. That is expressed in the fact that undamped spatio-temporal fluctuations exist in a neighborhood of the initial perturbation. These fluctuations are close to the solution of the corresponding boundary value problem with periodic boundary conditions. Finally, when the delay is sufficiently large we observe intensive spatio-temporal fluctuations in the whole area of wave propagation.

Сведения об авторах:

Алешин Сергей Владимирович,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ассистент;
ОПСИ НЦЧ РАН, старший лаборант-исследователь;

Глызин Сергей Дмитриевич,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей,
ОПСИ НЦЧ РАН, ведущий научный сотрудник;

Кащенко Сергей Александрович,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования