

DOI: 10.18255/1818–1015–2015–3–372–391

УДК 517.9

Корпоративная динамика систем логистических уравнений с запаздыванием и с большим запаздывающим управлением

Быкова Н. Д.¹, Кащенко С. А.

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409, Россия, г. Москва, Каширское шоссе, 31
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14*

e-mail: n.bykova90@gmail.com, kasch@uniyar.ac.ru

получена 29 апреля 2015

Ключевые слова: большое управление, квазинормальная форма, запаздывание

Рассматривается система двух логистических уравнений с запаздыванием, связанных через запаздывающее управление. Показано, что при достаточно большом коэффициенте запаздывающего управления задача о динамике исходных систем сводится к исследованию нелокальной динамики специальных семейств уравнений с частными производными, не содержащих малые и большие параметры. На основе представленных результатов численного исследования таких уравнений обнаружен ряд новых и интересных динамических явлений. Рассмотрены системы из трех логистических уравнений с запаздыванием с двумя типами «диффузионных» связей. Для каждой из этих систем были так же построены специальные семейства уравнений с частными производными, не содержащие малых и больших параметров. Приведены результаты исследования динамических свойств исходных уравнений. Показано, что различие в динамике рассмотренных систем трех уравнений может носить принципиальный характер.

Введение

В работе [1] рассмотрено логистическое уравнение с запаздыванием и с запаздывающим управлением

$$\dot{u} = r[1 - u(t - T)]u + \gamma[u(t - h) - u]. \quad (1)$$

В задачах математической экологии коэффициент r называют мальтузианским коэффициентом, T — время запаздывания, γ — коэффициент запаздывающего управления, h — временная задержка запаздывающего управления. Все эти коэффициенты положительны. Рассматривались решения (1) с положительными начальными

¹Работа выполнена при поддержке проекта № 984 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯргУ.

(при некотором $t = t_0$) функциями $\varphi(s) \in C_{[-H,0]}$, где $H = \max(T, h)$. Очевидно, что решение (1) с такой начальной функцией остается положительным при всех $t > t_0$. В [1] исследованы динамические свойства (1) при условиях, когда параметр γ либо является асимптотически малым, либо асимптотически большим. В настоящей работе рассматривается система из двух и из трех связанных логистических уравнений с запаздыванием и с запаздывающим управлением. Наибольший интерес представляет изучение ситуации, когда коэффициент γ является достаточно большим:

$$\gamma \gg 1. \quad (2)$$

В §1 исследована система из двух таких уравнений, а в §2 — из трех, причем с различными связями между отдельными уравнениями.

Отметим, что исследованию нелинейных систем уравнений с запаздывающим управлением посвящена значительная литература [2–34]. Применяемая в настоящей работе методика исследования базируется на результатах работ [1, 33–36].

§1. Динамика системы из двух связанных логистических уравнений с запаздыванием

По-видимому, наибольший интерес представляет рассмотрение системы из двух одинаковых связанных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u} &= r[1 - u(t - T)]u + \gamma(v(t - h) - u), \\ \dot{v} &= r[1 - v(t - T)]v + \gamma(u(t - h) - v). \end{aligned} \quad (3)$$

Все коэффициенты в (3) и начальные функции $\varphi(s), \psi(s) \in C_{[-H,0]}$ положительны, поэтому решения $u_\varphi(t), v_\psi(t)$ ($u_\varphi(t + s)|_{t=t_0} = \varphi(s), v_\psi(t + s)|_{t=t_0} = \psi(s)$) остаются положительными при $t > t_0$.

Условие (2) открывает путь к применению асимптотических методов. Рассмотрим отдельно два случая. В первом из них вместе с условием (2) выполнено условие $h \ll 1$, а во втором — параметр $h > 0$ фиксирован (при $\gamma \gg 1$).

1.1. Пусть $\varepsilon = \gamma^{-1}$ ($0 < \varepsilon \ll 1$) и для параметра h выполнено условие

$$h = c\varepsilon. \quad (4)$$

Тем самым $h\gamma = c$. Сформулируем два основных утверждения о динамических свойствах системы (3) при условиях (2) и (4). Ниже через $u_\varphi(t), v_\psi(t)$ обозначаются решения (3) с положительными начальными функциями $\varphi(s), \psi(s) \in C_{[-H,0]}$, заданными при некотором $t = t_0$.

Теорема 1. Пусть $0 < c < 1$. Фиксируем произвольно положительные начальные функции $\varphi(s), \psi(s) \in C_{[-H,0]}$. Тогда для каждого значения параметра $L > 0$ при каждом $t \in (t_0, t_0 + L]$ выполнено условие

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (u_\varphi(t) - v_\psi(t)) = 0. \quad (5)$$

Отсюда следует, что определяющую роль в динамике системы (3) при условиях (2), (4) и при условии $0 \leq c < 1$ играет поведение решений логистического уравнения с запаздыванием

$$\dot{x} = r[1 - x(t - T)]x. \quad (6)$$

Это уравнение достаточно хорошо изучено [14, 16, 17, 37]. Его устойчивыми решениями могут быть только состояния равновесия $x_0 \equiv 1$ (при $rT \leq \frac{\pi}{2}$) или устойчивое (медленно осциллирующее [17]) периодическое решение $x_0(t)$ (при $rT > \frac{\pi}{2}$). Отметим, что при $c = 0$ и при $rT > \frac{\pi}{2}$ каждая из функций (в случае общности положения) стремится к $x_0(t + const)$, но не обязательно $u_\varphi(t) - v_\varphi(t) \rightarrow 0$.

Теорема 2. Пусть $c > 1$. Тогда в ограниченной при $\varepsilon \rightarrow 0$ области фазового пространства $C = C_{[-H,0]} \times C_{[-H,0]}$ система (3) не может иметь аттрактор.

Доказательство этих утверждений довольно простое. Оно основано на том, что при условии (4) можно использовать соотношения $u(t-h) = u(t) - h\dot{u}(t) + O(h^2)$, $v(t-h) = v(t) - h\dot{v}(t) + O(h^2)$. Тогда система (3) в главном имеет вид

$$\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \varepsilon r \begin{pmatrix} (1-u(t-T))u \\ (1-v(t-T))v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (7)$$

При условии $0 < c < 1$ решения линейной системы

$$\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix} \dot{w} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} w \quad (8)$$

стремятся к решению вида $const \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, а при $c > 1$ — к решению вида $const \cdot \exp[2(c-1)^{-1} \varepsilon^{-1} t] \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Используя эти соотношения, доказательство теорем 1 и 2 завершается без труда.

Обратим внимание, что в условии теоремы 2 «неустойчивость» решений $(u_\varphi(t), v_\psi(t))$ системы (3) носит «взрывной» характер: при $\varepsilon \rightarrow 0$ они за асимптотически малый отрезок времени покидают ограниченную (фиксированную при $\varepsilon \rightarrow 0$) область фазового пространства.

1.2. Ниже предполагается, что параметр $h > 0$ — фиксирован. Здесь существенно используется методика, развитая в [29, 38–40]. Она базируется на применении специального асимптотического метода локального анализа — метода квазинормальных форм, разработанного в [29, 32, 41, 42]. Основным результатом этого раздела является построение специальных нелинейных систем уравнений параболического и вырожденно-параболического типа, не содержащих малых и больших параметров, нелокальная динамика которых определяет в главном поведение решений исходной системы (3) в ограниченной при $\gamma \rightarrow \infty$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) области фазового пространства $C = C_{[-H,0]} \times C_{[-H,0]}$.

После деления на γ система (3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{u} &= \varepsilon r [1 - u(t-T)]u + v(t-h) - u, \\ \varepsilon \dot{v} &= \varepsilon r [1 - v(t-T)]v + u(t-h) - v. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\varepsilon \dot{u} = v(t-h) - u, \quad \varepsilon \dot{v} = u(t-h) - v. \quad (10)$$

Ее характеристический квазиполином имеет вид

$$\varepsilon^2 \lambda^2 + 2\varepsilon \lambda + (1 - \exp(-2\lambda h)) = 0. \quad (11)$$

Этот квазиполином имеет бесконечно много корней, вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, и не имеет корней с положительными и отделенными от нуля (при $\varepsilon \rightarrow 0$) вещественными частями. Тем самым реализуется критический в задаче об устойчивости решений (9) случай бесконечной размерности. Результаты о существовании инвариантных интегральных многообразий [2, 26, 27] в (9) здесь уже места не имеют. В [28, 29, 31, 41] разработан специальный метод исследования динамики для такого класса систем. Применим его для изучения системы (9). Сначала детальнее рассмотрим решение линейной системы (10). Асимптотика корней $\lambda_k^{1,2}(\varepsilon)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) характеристического уравнения (11), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеет вид

$$\lambda_k^1(\varepsilon) = \frac{2\pi ki}{h} - \varepsilon \frac{2\pi ki}{h^2} - \frac{\varepsilon^2}{h^3}(2\pi^2 k^2 - 2\pi ki) + O(\varepsilon^3)$$

и

$$\lambda_k^2(\varepsilon) = \frac{(2k+1)\pi i}{h} - \varepsilon \frac{(2k+1)\pi i}{h^2} - \frac{\varepsilon^2}{2h^3}((2k+1)^2\pi^2 - 2(2k+1)\pi i) + O(\varepsilon^3).$$

Для соответствующих этим корням решений (10) верны формулы

$$\begin{pmatrix} u_{k1}(t, \varepsilon) \\ v_{k1}(t, \varepsilon) \end{pmatrix} = \xi_k \exp(\lambda_k^1(\varepsilon)t) \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon) \right],$$

$$\begin{pmatrix} u_{k2}(t, \varepsilon) \\ v_{k2}(t, \varepsilon) \end{pmatrix} = \eta_k \exp(\lambda_k^2(\varepsilon)t) \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon) \right],$$

где ξ_k и η_k — произвольные комплексные коэффициенты.

Отметим, что асимптотические формулы для $\lambda_k^{1,2}(\varepsilon)$ выполняются неравномерно по номеру k . Нас будет интересовать поведение этих корней с номерами k порядка $\varepsilon^{-1/2}$. В связи с этим обозначим через z произвольное вещественное число, а через $\theta_z = \theta(z, \varepsilon)$ обозначим такую величину из интервала $[0, 2)$, для которой выражение $z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z$ является нечетным целым. Рассмотрим те номера k , которые имеют вид $k = (z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)m$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Тогда

$$\lambda_k^1(\varepsilon) = \frac{2\pi mi}{h}(z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)(1 - \varepsilon h^{-1}) - \frac{2\pi\varepsilon^2}{h^3}(\pi(z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)^2 m^2 - i(z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)m) + O(\varepsilon^2),$$

$$\lambda_k^2(\varepsilon) = \frac{(2m+1)\pi i}{h}(z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)(1 - \varepsilon h^{-1}) - \frac{\pi\varepsilon^2}{2h^3}(\pi(z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)^2(2m+1)^2 - 2i(z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)(2m+1)) + O(\varepsilon^2).$$

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \xi_m(\tau) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp \left[\frac{2\pi mi}{h}(z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)(1 - \varepsilon h^{-1})t \right] + \right. \\ \left. + \eta_m(\tau) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \exp \left[\frac{(2m+1)\pi i}{h}(z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)(1 - \varepsilon h^{-1})t \right] \right\} + \\ + \varepsilon \begin{pmatrix} u_1(t, \tau) \\ v_1(t, \tau) \end{pmatrix} + \dots, \quad (12)$$

где зависимость от t функций $u_1(t, \tau)$, $v_1(t, \tau)$, ... — периодическая, $\tau = \varepsilon t$. Подставим (12) в (9) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε , считая, что θ_z фиксировано (не зависит от ε). Тогда, собирая коэффициенты при первой степени ε , из условий разрешимости получающихся уравнений относительно $u_1(t, \tau)$ и $v_1(t, \tau)$ в указанном классе функций приходим к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\xi_m(\tau)$ и $\eta_m(\tau)$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Пусть

$$\xi(\tau, x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m(\tau) \exp \frac{2\pi m i x}{h}, \quad \eta(\tau, x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \eta_m(\tau) \exp \frac{(2m+1)\pi i x}{h},$$

где $x = (z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)(1 - \varepsilon h^{-1})t$. Положим $w = w(\tau, x)$ и

$$F_{\Delta}(w) = rw [1 - w(\tau, x - \Delta)]. \quad (13)$$

Как оказывается, полученную для $\xi_m(\tau)$ и $\eta_m(\tau)$ бесконечную систему уравнений можно компактно записать в терминах вещественных функций $\xi(\tau, x)$ и $\eta(\tau, x)$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2h} [F_{\Delta}(\xi + \eta) + F_{\Delta}(\xi - \eta)] + \frac{z^2}{2h} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{1}{2h} [F_{\Delta}(\xi + \eta) - F_{\Delta}(\xi - \eta)] + \frac{z^2}{2h} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad (15)$$

$$\xi(\tau, x + h) \equiv \xi(\tau, x), \quad \eta(\tau, x + h) \equiv -\eta(\tau, x), \quad (16)$$

где

$$\Delta = T(z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)(1 - \varepsilon h^{-1}). \quad (17)$$

Основное утверждение состоит в том, что краевая задача (14), (15), (16) играет роль нормальной формы для системы (9), т.е. установившиеся режимы в (14) – (16) определяют динамику исходной системы. Сформулируем результат более точно.

Теорема 3. Пусть при некоторых значениях $z \in (-\infty, \infty)$ и $\theta_0 \in [0, 2)$ краевая задача (14) – (16) имеет ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$ решение $(\xi_0(\tau, x), \eta_0(\tau, x))$ и пусть последовательность $\varepsilon_m \rightarrow 0$ определяется из условия $\theta_z(\varepsilon, z) = \theta_0$. Тогда система уравнений (9) имеет асимптотическое по невязке при $\varepsilon_m \rightarrow 0$ решение

$$(u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon)) = (\xi_0(\tau, x) + \eta_0(\tau, x), \xi_0(\tau, x) - \eta_0(\tau, x)) + o(1),$$

где $\tau = \varepsilon_m t$, $x = (z\varepsilon_m^{-1/2} + \theta_0)(1 - \varepsilon_m h^{-1})t$.

Отметим, что при некоторых дополнительных условиях типа общности положения можно обосновать результаты о существовании и устойчивости периодических решений системы (9), близких к периодическим решениям краевой задачи (14) – (16).

Краевую задачу (14) – (16) удобно переписать в терминах U и V . Положим в (14) – (16) $U(\tau, x) = \xi(\tau, x) + \eta(\tau, x)$, $V(\tau, x) = \xi(\tau, x) - \eta(\tau, x)$. Тогда приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{h} F_{\Delta}(U) + z^2 (2h)^{-1} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{h} F_{\Delta}(V) + z^2 (2h)^{-1} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad (19)$$

$$U(\tau, x + h) \equiv V(\tau, x), \quad V(\tau, x + h) \equiv U(\tau, x), \quad (20)$$

где параметр Δ определен в (17).

Из теоремы 3 тогда следует, что

$$\begin{aligned} u(t, \varepsilon) &= U(\varepsilon t, (z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)(1 - \varepsilon h^{-1})t) + O(\varepsilon), \\ v(t, \varepsilon) &= V(\varepsilon t, (z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)(1 - \varepsilon h^{-1})t) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

1.3. Более общая конструкция. Центральным моментом для получения квазинормальной формы (14) – (16) было специальное представление корней характеристического квазиполинома (11), которые, во-первых, стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$, и, во-вторых, параметр, характеризующий номер рассматриваемого корня асимптотически велик при малых ε . Как оказывается [41], использованные выше представления для таких корней не единственны. Покажем это. Фиксируем произвольно номер $n > 1$ и произвольный набор вещественных ненулевых чисел z_1, \dots, z_n . Через $\theta_j = \theta_j(z_j, \varepsilon) \in (0, 1]$ обозначим такую величину, для которой выражение $z_j\varepsilon^{-1/2} + \theta_j$ является целым. Для корней $\lambda_k^1(\varepsilon)$ и $\lambda_k^2(\varepsilon)$ уравнения (11) можно использовать представление

$$\begin{aligned} \lambda_k^1(\varepsilon) &= \frac{2\pi i}{h} \sum_{j=1}^n (z_j\varepsilon^{-1/2} + \theta_j)m_j - \frac{2\pi\varepsilon i}{h^2} \sum_{j=1}^n (z_j\varepsilon^{-1/2} + \theta_j)m_j - \\ &\quad - \varepsilon h^{-3} 2\pi^2 \left(\sum_{j=1}^n z_j m_j \right)^2 + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_k^2(\varepsilon) &= \frac{\pi i}{h} \sum_{j=1}^n (z_j\varepsilon^{-1/2} + \theta_j)(2m_j + 1) - \frac{\pi\varepsilon i}{h^2} \sum_{j=1}^n (z_j\varepsilon^{-1/2} + \theta_j)(2m_j + 1) - \\ &\quad - \frac{\varepsilon\pi^2}{2h^3} \left(\sum_{j=1}^n z_j(2m_j + 1) \right)^2 + \dots, \quad m_1, \dots, m_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Аналогом формального ряда (12) является формальный ряд

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sum_{j=1}^n \sum_{m_j=-\infty}^{\infty} \xi_{m_1, \dots, m_n} \exp 2\pi h^{-1} (im_1 x_1 + \dots + im_n x_n) + \\ &+ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sum_{j=1}^n \sum_{m_j=-\infty}^{\infty} \eta_{m_1, \dots, m_n} \exp \pi h^{-1} (i(2m_1 + 1)x_1 + \dots + i(2m_n + 1)x_n) + \dots, \end{aligned}$$

где $\tau = \varepsilon t$, $x_j = (z_j\varepsilon^{-1/2} + \theta_j)(1 - \varepsilon h^{-1})t$. Подставляя это выражение в (9) и производя стандартные действия, приходим к системе уравнений относительно

$$\begin{aligned} \xi(\tau, x_1, \dots, x_n) &= \sum_{j=1}^n \sum_{m_j=-\infty}^{\infty} \xi_{m_1, \dots, m_n} \exp[2\pi h^{-1} i(m_1 x_1 + \dots + m_n x_n)], \\ \eta(\tau, x_1, \dots, x_n) &= \sum_{j=1}^n \sum_{m_j=-\infty}^{\infty} \eta_{m_1, \dots, m_n} \exp[i\pi h^{-1} ((2m_1 + 1)x_1 + \dots + (2m_n + 1)x_n)]. \end{aligned}$$

Эту систему удобно записать в терминах $U = \xi + \eta$ и $V = \xi - \eta$ с h -периодическими по x_1, \dots, x_n краевыми условиями:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{h} \Phi_\sigma(U) + (2h)^{-1} \left(z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + z_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 U, \quad (21)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{h} \Phi_\sigma(V) + (2h)^{-1} \left(z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + z_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 V, \quad (22)$$

где $\tau = \varepsilon t$, $\Phi_\sigma(W(\tau, x_1, \dots, x_n)) = rW(\tau, x_1, \dots, x_n)[1 - W(\tau, x_1 - \sigma_1, \dots, x_n - \sigma_n)]$ и $\sigma_j = T(z_j \varepsilon^{-1/2} + \theta_j)(1 - \varepsilon h^{-1})$ ($j = 1, \dots, n$).

Сформулируем итоговое утверждение.

Теорема 4. Пусть при некотором $n > 1$ и некотором наборе вещественных чисел z_1, \dots, z_n краевая задача (21), (22) имеет ограниченное вместе с производными по τ при $\tau > \tau_0$ решение $U_0(\tau, x_1, \dots, x_n)$, $V_0(\tau, x_1, \dots, x_n)$. Тогда система уравнений (9) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon)$ решение

$$\begin{aligned} u(t, \varepsilon) &= U(\varepsilon t, (z_1 \varepsilon^{-1/2} + \theta_1)(1 - \varepsilon h^{-1})t, \dots, (z_n \varepsilon^{-1/2} + \theta_n)(1 - \varepsilon h^{-1})t), \\ v(t, \varepsilon) &= V(\varepsilon t, (z_1 \varepsilon^{-1/2} + \theta_1)(1 - \varepsilon h^{-1})t, \dots, (z_n \varepsilon^{-1/2} + \theta_n)(1 - \varepsilon h^{-1})t). \end{aligned}$$

Отметим, что при условиях $x_j = \alpha_j x$ краевая задача (21), (22) сворачивается в расщепленную систему двух одинаковых параболических уравнений без граничных условий

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{1}{h} \Phi_\sigma(W) + z_0 (2h)^{-1} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}.$$

1.4. Численное исследование.

Перейдем к численному исследованию задачи (18) – (20). Для этого разобьем отрезок длины h равный периоду по пространственной переменной на N частей. И введем некоторые обозначения. Пусть $\delta = h/N$, $x_i = (i - 1)\delta$ и

$$U_i(\tau) = U(\tau, x_i), \quad V_i(\tau) = V(\tau, x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Из условия (20) получаем

$$U_{i+N} \equiv V_i, \quad V_{i+N} \equiv U_i. \quad (23)$$

Теперь аппроксимируем вторую производную по пространственной переменной с помощью второй разделенной разности

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(\tau, x_i) &\approx \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{\delta^2}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\tau, x_i) &\approx \frac{V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}}{\delta^2}. \end{aligned}$$

Для аппроксимации функции $F_\Delta(w)$, определенной формулой (13), нам необходимо вычислить $w(\tau, x - \Delta)$ в точке $x = x_i$. Для этого для каждого i ($i = 1, 2, \dots, N$) мы находим такой номер j , что $x_i - \Delta$ принадлежит полуинтервалу $(j\delta, (j+1)\delta]$. Далее,

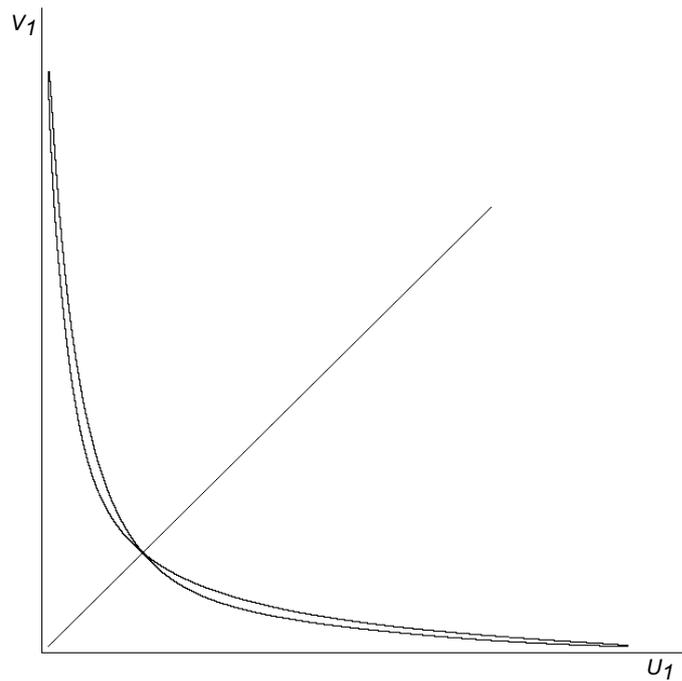


Рис. 1. Возможные циклы в системе (24) – (26).

используя номер отрезка j , определим, с помощью равенства (23), значение какой из функций (U или V) нужно взять, и обозначим его Q_j , тогда

$$w(\tau, x_i - \Delta) \approx \frac{1}{\delta}((\delta - |x_i - \Delta - j\delta|)Q_j + |x_i - \Delta - j\delta|Q_{j+1})$$

и

$$F_{\Delta}(w(\tau, x_i)) \approx F_{\Delta}^*(w_i) = rw_i(1 - \delta^{-1}((\delta - |x_i - \Delta - j\delta|)Q_j + |x_i - \Delta - j\delta|Q_{j+1})).$$

Таким образом система (18) – (20) преобразуется к виду

$$\dot{U}_i = \frac{1}{h}F_{\Delta}^*(U_i) + z^2(2h\delta^2)^{-1}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}), \tag{24}$$

$$\dot{V}_i = \frac{1}{h}F_{\Delta}^*(V_i) + z^2(2h\delta^2)^{-1}(V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}), \tag{25}$$

$$U_{i+N} \equiv V_i, \quad V_{i+N} \equiv U_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{26}$$

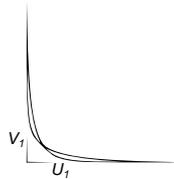
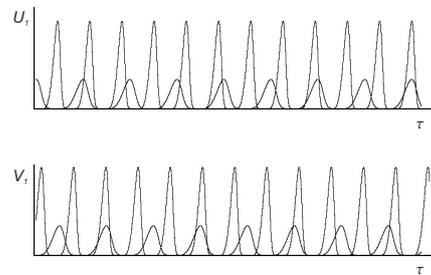
и является уже системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задача (24) – (26) исследовалась численно, при фиксированных значениях параметров

$$\varepsilon = 0.1, \quad T = 1, \quad h = 0.6, \quad N = 20,$$

при изменении параметра z , а параметр r брался равным одному из значений: 1, 1.5 или 2.

Оказалось, что аттракторами в системе (24) – (25) могут являться только состояние равновесия или периодические решения двух видов, изображенных на рис. 1.

Рис. 2. $z = 0.2$, $r = 1$.Рис. 3. Увеличение амплитуды при увеличении значения r : $U_1(\tau)$ и $V_1(\tau)$ при $r = 1$ и $r = 1.5$, $z = 0.2$.

Причем такие периодические решения могут сосуществовать. Назовем то из периодических решений, изображенных на рис. 1, для которого $U_1 \equiv V_1$, периодическим решением первого типа, а другое — периодическим решением второго типа. Рассмотрим некоторые из случаев более подробно.

1. Пусть $z = 0.2$. При каждом из указанных значений параметра r в системе устойчивым является периодическое решение второго типа (при $r = 1$ и $r = 1.5$ проекции их фазовых портретов на плоскость U_1V_1 изображены на рис. 2 и рис. 4 соответственно). Можно отметить, что при увеличении параметра r происходит увеличение амплитуды колебаний, что хорошо демонстрирует рис. 3, на котором изображена зависимость функций U_1 и V_1 от τ при $r = 1$ и $r = 1.5$. Кроме того, каждое из этих решений является бегущей волной, что демонстрирует рис. 5 для функций $U_i(\tau)$ и функций $V_i(\tau)$ ($i = 1, 6, 11, 16$), построенных при $r = 1$. На рис. 6 изображены развертки по пространственной переменной при фиксированных значениях t и значениях параметра r равных 1, 1.5 и 2 соответственно.

2. Аналогичные графики были построены при $z = 0.125$. При этом значении z в системе устойчивыми являются решения первого типа. На рис. 7 видно, что амплитуда увеличивается при увеличении параметра r . Здесь решения также являются бегущей волной (см. рис. 8). Развертка по пространственной переменной изображена на рис. 9.

3. Уменьшение значения параметра z до 0.007 привело к сильному усложнению системы. При $r = 1$ удалось найти восемь режимов второго типа (они изображены на рис. 10). Развертка одного из режимов по пространственной переменной имеет вид, изображенный на рис. 11. Найденные решения оказались не гладкими, что говорит о недостаточной мелкости разбиения, поэтому дальнейшие расчеты в этом случае ($z = 0.007$ и $r = 1$) проводились при $N = 100$. Удалось найти четыре устой-

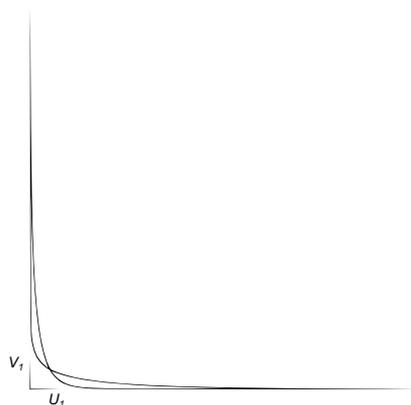


Рис. 4. $z = 0.2$ $r = 1.5$.

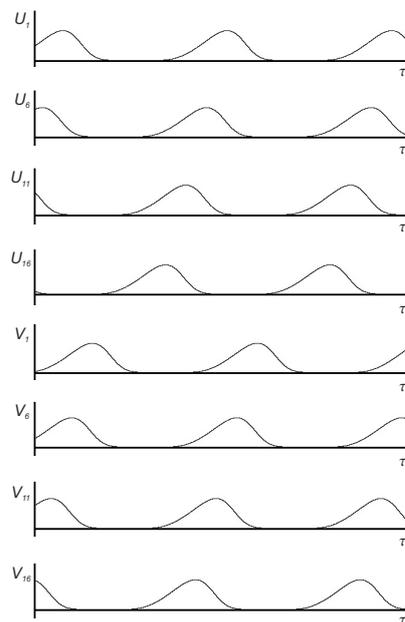


Рис. 5. Зависимость $U_1, U_6, U_{11}, U_{16}, V_1, V_6, V_{11}, V_{16}$ от τ , $r = 1$, $z = 0.2$.

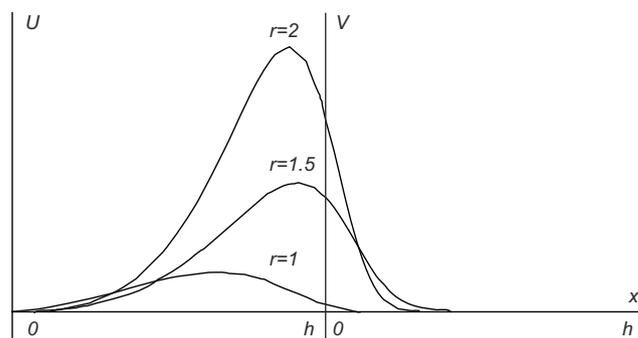


Рис. 6. Развертка по x U (слева) и V (справа), $z = 0.2$.

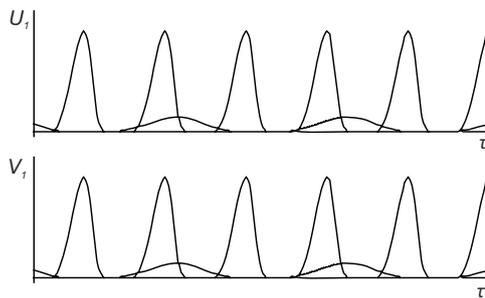


Рис. 7. Увеличение амплитуды при увеличении значения r : $U_1(\tau)$ и $V_1(\tau)$ при $r = 1$ и $r = 1.5$.

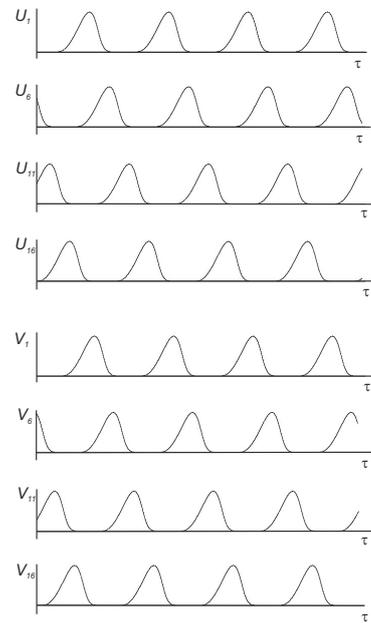


Рис. 8. Зависимость $U_1, U_6, U_{11}, U_{16}, V_1, V_6, V_{11}, V_{16}$ от τ , $r = 1$, $z = 0.125$.

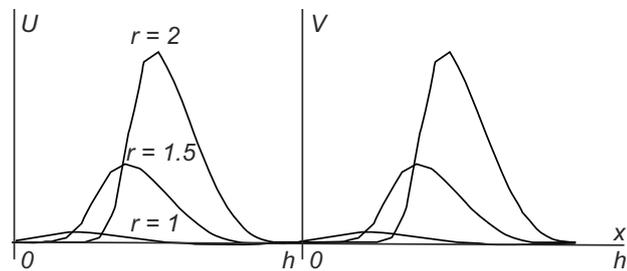


Рис. 9. Развертка по x U (слева) и V (справа), $z = 0.125$.

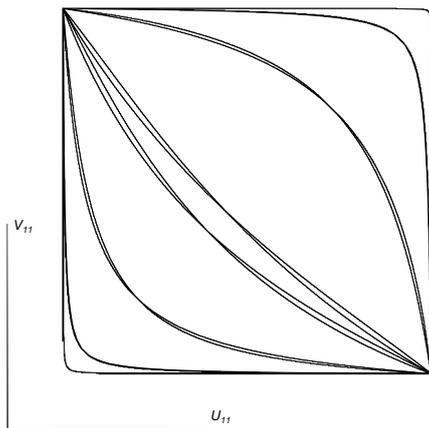


Рис. 10. $z = 0.007, r = 1, N = 20$.

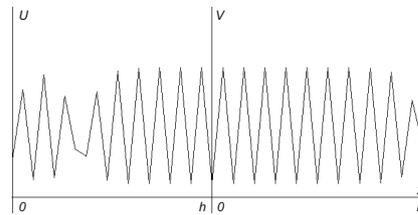


Рис. 11. Развертка по x U (слева) и V (справа), $z = 0.007, r = 1, N = 20$.



Рис. 12. $z = 0.007, r = 1, N = 100$. а) ц-1, б) ц-2 в плоскости U_1, V_1 (слева) и плоскости U_1, V_{50} (справа).

чивых периодических режима (будем обозначать эти решения как ц-1, ц-2, ц-3 и ц-4 соответственно), проекции которых изображены на рис. 12 и 13. Стоит отметить, что масштаб последних изображений в 100 раз меньше, чем у рис. 10.

Развертки по пространственной переменной для найденных решений изображены на рис. 14, 15, 16 и 17 соответственно. Легко видеть, что полученные режимы гладкие по пространственной переменной и предложенная модель адекватно описывает систему (18)–(20).

Таким образом, уменьшение параметра z приводит к усложнению пространственной динамики: вместо одного устойчивого периодического режима может появляться два и более сосуществующих. Кроме того, устойчивые режимы, возникающие в задаче, делаются все более изрезанными по пространственной переменной.

§2. О корпоративной динамике системы из трех логистических уравнений с запаздыванием

Рассмотрим вопрос о поведении решений связанных систем логистических уравнений с запаздыванием с двумя типами «диффузионных» связей:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= F(u_1) + \gamma[u_2(t-h) - 2u_1 + u_3(t-h)], \\ \dot{u}_2 &= F(u_2) + \gamma[u_1(t-h) - 2u_2 + u_3(t-h)], \\ \dot{u}_3 &= F(u_3) + \gamma[u_1(t-h) + u_2(t-h) - 2u_3] \end{aligned} \tag{27}$$



Рис. 13. $z = 0.007$, $r = 1$, $N = 100$. а) Ц-3, б) Ц-4 в плоскости U_1, V_1 (слева) и плоскости U_1, V_{50} (справа).

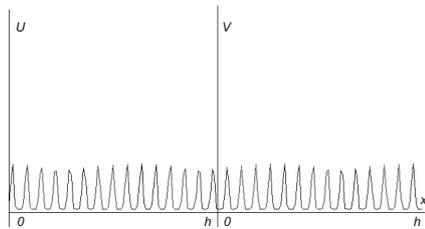


Рис. 14. Ц - 1. Развертка по x U (слева) и V (справа), $z = 0.007$.

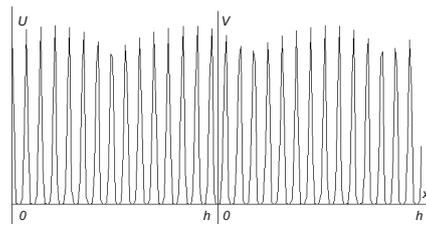


Рис. 15. Ц - 2. Развертка по x U (слева) и V (справа), $z = 0.007$.

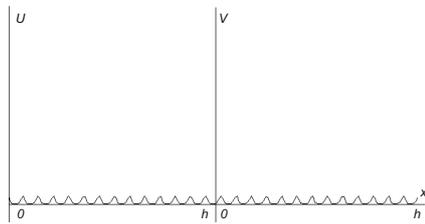


Рис. 16. Ц - 3. Развертка по x U (слева) и V (справа), $z = 0.007$.

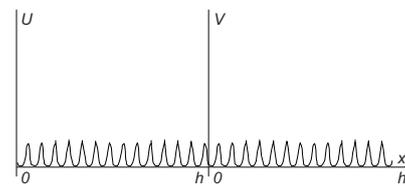


Рис. 17. Ц - 4. Развертка по x U (слева) и V (справа), $z = 0.007$.

и

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= F(u_1) + \gamma[u_2(t-h) - u_1], \\ \dot{u}_2 &= F(u_2) + \gamma[u_3(t-h) - u_2], \\ \dot{u}_3 &= F(u_3) + \gamma[u_1(t-h) - u_3], \end{aligned} \quad (28)$$

где $F(u) = ru[1 - u(t - T)]$.

Здесь тоже имеют место аналоги теорем 1 и 2. Пусть $h = \varepsilon c$. При $0 < c < 1$ и при достаточно больших γ динамика (27) и (28) определяется в главном поведении решений уравнения (6), а связь между решениями (6) и асимптотическими по невязке решениями систем (27) и (28) устанавливает формула

$$u_j(t, \varepsilon) = x((1 + o(\varepsilon))t) + O(\varepsilon) \quad (j = 1, 2, 3).$$

Если же $c > 1$, то, как и в §1, в ограниченной при $\varepsilon \rightarrow 0$ области фазового пространства $C_0 = C_{[-H,0]} \times C_{[-H,0]} \times C_{[-H,0]}$ системы (27) и (28) не могут иметь аттрактора.

Если же $h > 0$ (и фиксировано при $\varepsilon \rightarrow 0$), то динамические свойства систем (27) и (28) существенно отличаются.

2.1. Рассмотрим сначала систему (27) и ее «линейную» часть

$$\varepsilon \dot{u} = A(u), \quad (29)$$

где $u = (u_1, u_2, u_3)$ и

$$A(u) = \begin{pmatrix} -2u_1 + u_2(t-h) + u_3(t-h) \\ u_1(t-h) - 2u_2 + u_3(t-h) \\ u_1(t-h) + u_2(t-h) - 2u_3 \end{pmatrix}.$$

Характеристический квазиполином для (29) имеет вид

$$-(2 + \varepsilon\lambda)^3 + 3(2 + \varepsilon\lambda) \exp(-2\lambda h) + 2 \exp(-3\lambda h) = 0.$$

Его корни можно разделить на две группы. В первую входят все те корни, которые непрерывно зависят от $\varepsilon > 0$ и отделены от мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$. Вторую группу составляет бесконечная «цепочка» таких корней $\lambda_k(\varepsilon)$, что для каждого номера k имеем $\lambda_k(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для каждого $\lambda_k(\varepsilon)$ справедливо асимптотическое разложение

$$\lambda_k(\varepsilon) = 2\pi k i h^{-1} + \varepsilon \lambda_{k1} + \varepsilon^2 \lambda_{k2} + \dots \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (30)$$

где, в частности,

$$\lambda_{k1} = -h^{-2} \pi k i, \quad \lambda_{k2} = -(2h)^{-1} (\pi k h^{-1})^2 + (2h^2)^{-1} (\pi k h^{-1} i).$$

Собственному значению $\lambda_k(\varepsilon)$ отвечает собственный вектор $a_k(\varepsilon)$ оператора A , причем $a_k(\varepsilon) = a_0 + O(\varepsilon)$ и $a_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим выражения (30) при асимптотически больших номерах k порядка $\varepsilon^{-1/2}$. Фиксируем произвольно $z \neq 0$ и пусть $\theta = \theta(z, \varepsilon)$ — такое значение из полуинтервала $(0, 1]$, что выражение $(z\varepsilon^{-1/2} + \theta)$ является целым. Положим в (30) $k = k_\varepsilon = (z\varepsilon^{-1/2} + \theta)m$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$). Тогда

$$\operatorname{Re} \lambda_{k_\varepsilon}(\varepsilon) = -\varepsilon(2h)^{-1} (\pi z m h^{-1})^2 + o(1).$$

Согласно методике из [28], введем в рассмотрение формальный ряд

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = a_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m(\tau) \exp \frac{\pi i m x}{h} + \varepsilon \begin{pmatrix} u_{11}(\tau, x) \\ u_{21}(\tau, x) \\ u_{31}(\tau, x) \end{pmatrix} + \dots, \quad (31)$$

где $\tau = \varepsilon t$, $x = (z\varepsilon^{-1/2} + \theta)(2 - \varepsilon h^{-1})t$ и $u_{ij} - h$ -периодичны по x . Подставим (31) в (27) и будем собирать в получающемся формальном тождестве коэффициенты при одинаковых степенях ε . Тогда на втором шаге из условия разрешимости получающейся системы относительно (u_{11}, u_{21}, u_{31}) приходим к системе уравнений для определения неизвестных коэффициентов $\xi_m(\tau)$. Как оказывается, эту бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений можно записать в виде одного уравнения относительно $\xi(\tau, x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m(\tau) \exp \frac{\pi i m x}{h}$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2h} F_{\Delta}(\xi) + z^2(2h)^{-1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (32)$$

с периодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, x + h) \equiv \xi(\tau, x). \quad (33)$$

Параметр Δ в (32) определен в (17). Связь между решениями (27) и (32), (33) устанавливает формула $u_j(t, \varepsilon) = \xi(\tau, x) + O(\varepsilon)$, где $\tau = \varepsilon t$, а $x = (z\varepsilon^{-1/2} + \theta)(2 - \varepsilon h^{-1})t$. Более точное утверждение повторяет формулировку теоремы 3.

2.2. Для системы (28) ситуация существенно сложнее [33, 34]. Выражение $A(u)$ в этом случае имеет вид

$$A(u) = \begin{pmatrix} -u_1 + u_2(t - h) \\ -u_2 + u_3(t - h) \\ u_1(t - h) - u_3 \end{pmatrix},$$

а соответствующий (29) характеристический квазиполином представлен формулой

$$(1 + \varepsilon \lambda)^3 = \exp(-3\lambda h). \quad (34)$$

Ту группу корней (34), которые не являются отделенными от мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$, можно записать в виде совокупности корней $\lambda_k^0(\varepsilon)$, $\lambda_k^+(\varepsilon)$ и $\lambda_k^-(\varepsilon)$, для которых $\lambda^+(\varepsilon) = \overline{\lambda^-(\varepsilon)}$ и при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\begin{aligned} \lambda_k^0(\varepsilon) &= h^{-1} 2\pi k i + \varepsilon \lambda_{k1}^0 + \varepsilon^2 \lambda_{k2}^0 + \dots, \\ \lambda_k^+(\varepsilon) &= h^{-1} \left(\frac{2\pi i}{3} + 2\pi k i \right) + \varepsilon \lambda_{k1}^+ + \varepsilon^2 \lambda_{k2}^+ + \dots \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \lambda_{k1}^0 &= -h^{-2} 2\pi i k, \\ \lambda_{k2}^0 &= h^{-1} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi k}{h} \right)^2 + \frac{1}{h} \left(\frac{2\pi k i}{h} \right) \right], \\ \lambda_{k1}^+ &= -h^{-2} \left(2\pi k i + \frac{2\pi i}{3} \right), \\ \lambda_{k2}^+ &= -\frac{1}{2h} \left(\frac{2\pi k}{h} \right)^2 - \frac{4}{3} h^{-3} \pi^2 k + 8\pi^2 (9h^3)^{-1} + 2\pi k i h^{-3} + \frac{2}{3} h^{-3} \pi i. \end{aligned}$$

Корню $\lambda_k^0(\varepsilon)$ отвечает собственный вектор $a(\varepsilon) = a_0 + O(\varepsilon)$ и $a_0 = (1, 1, 1)$, а корню $\lambda_k^+(\varepsilon)$ — собственный вектор $c(\varepsilon) = c + O(\varepsilon)$, где $c = (c_0^2, c_0, 1)$, а $c_0 = \exp(2\pi i/3)$.

Как и выше, нас будут интересовать номера k порядка $\varepsilon^{-1/2}$. В обозначениях предыдущего раздела положим

$$k = (z\varepsilon^{-1/2} + \theta)m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$\begin{aligned} (u_1, u_2, u_3) = & a_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m(\tau) \exp \frac{2\pi imx}{h} + c_0 \exp \left(\frac{2\pi it}{3h} \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \eta_m(\tau) \exp \frac{2\pi imx}{h} + \\ & + \bar{c}_0 \exp \left(-\frac{2\pi it}{3h} \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{\eta}_m(\tau) \exp \left(-\frac{2\pi imx}{h} \right) + \\ & + \varepsilon(u_{11}(\tau, x, t), u_{12}(\tau, x, t), u_{13}(\tau, x, t)) + \dots, \end{aligned} \quad (35)$$

где $\tau = \varepsilon t$, $x = ((z\varepsilon^{-1/2} + \theta) - \varepsilon^{1/2}h^{-1}z)t$. Фигурирующие в (35) функции $u_{jn}(\tau, x, t)$ периодичны по x с периодом h и периодичны по t с периодом $3h$. Подставляя (35) в (28) и производя стандартные действия, на втором шаге получим бесконечную систему уравнений относительно неизвестных амплитуд $\xi_m(\tau)$ и $\eta_m(\tau)$. Эту систему в терминах функций $\xi(\tau, x)$ и $\eta(\tau, x)$, где

$$\xi(\tau, x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m(\tau) \exp \frac{2\pi imx}{h}, \quad \eta(\tau, x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \eta_m(\tau) \exp \frac{2\pi imx}{h},$$

можно записать в виде краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = & (2h)^{-1}z^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (2h)^{-1}r \left[\xi - \xi\xi(\tau, x - \Delta) - \right. \\ & \left. - \exp \left(\frac{2\pi iT}{3h} \right) \eta\bar{\eta}(\tau, x - \Delta) - \exp \left(-\frac{2\pi iT}{3h} \right) \bar{\eta}\eta(\tau, x - \Delta) \right], \\ & \xi(\tau, x + h) \equiv \xi(\tau, x), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = & (2h)^{-1}z^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{2\pi i}{3h^2} \eta + \\ & + (2h)^{-1}r \left[\eta - \eta\xi(\tau, x - \Delta) - \exp \left(-\frac{2\pi iT}{3h} \right) \xi\eta(\tau, x - \Delta) \right], \\ & \eta(\tau, x + h) \equiv \eta(\tau, x). \end{aligned} \quad (37)$$

По аналогии с результатами предыдущего параграфа и здесь можно построить квазинормальные формы, которые отличаются от (36), (37) только тем, что оператор $z \frac{\partial}{\partial x}$ заменяется на $(z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + z_n \frac{\partial}{\partial x_n})$.

Выводы

1. Известно, что системы параболических уравнений вида (14) – (17) ((18) – (20)), (32), (33) и (36), (37) могут обладать сложной динамикой. Это означает, что система (27) тоже может иметь сложную динамику при больших γ .

2. Построенные выше квазинормальные формы зависят от континуальных параметров (z, θ, z_j) . Тем самым при различных их значениях могут реализовываться различные по типу и по количеству установившиеся режимы. Отсюда заключаем, что для систем (27) и (28) (при больших γ) характерно явление мультистабильности.

3. Присутствие в квазинормальных формах внутреннего параметра θ приводит к выводу о том, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\gamma \rightarrow \infty$) могут бесконечно часто происходить прямые и обратные бифуркации в системах (27) и (28).

4. Запаздывание T в результате применения описанной выше методики исследования переходит в асимптотически большое (при $\varepsilon \rightarrow 0$) отклонение одной или нескольких пространственных переменных. Это, в свою очередь, тоже приводит к процессу неограниченного чередования при $\varepsilon \rightarrow 0$ прямых и обратных бифуркаций в уравнениях первого приближения — квазинормальных формах. В связи с этим возникают интересные бифуркационные явления [43] в случаях, когда коэффициент запаздывания T в (27), (28) является асимптотически малым ($T \rightarrow \varepsilon^{1/2}T$).

5. Численное исследование показало, что устойчивые режимы, возникающие в задаче (18)–(20), делаются все более изрезанными по пространственной переменной при уменьшении параметра z .

6. В качестве обобщения предложенной методики рассмотрены две системы, состоящие из трех подсистем, с различными диффузионными связями. Показано, что различие в динамике этих систем может носить принципиальный характер.

Авторы благодарят Глызина С.Д. за большую помощь в работе.

Список литературы

- [1] Kashchenko S. A., “Dynamics of the Logistic Equation with Delay and Delay Control”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **24**:8 (2014), 1440017.
- [2] Хейл Дж., *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984; Hale J. K., *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [3] Diekmann O., van Gils S. A., Verduyn Lunel S. M., Walther H.-O., *Delay Equations: Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [4] Wu J., *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, 1996.
- [5] Haken H., *Brain Dynamics; Synchronization and Activity Patterns in Pulse-Coupled Neural Nets with Delays and Noise*, Springer, 2002.
- [6] May R. M., *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, 2nd ed., Princeton University Press, Princeton, 1974.
- [7] Kuramoto Y., *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*, Springer, 1984.
- [8] Kuang Y., *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Academic Press, New York, 1993.
- [9] Huang W., “Global dynamics for a reaction-diffusion equation with time delay”, *J. Differential Equations*, **143** (1998), 293–326.
- [10] Pyragas K., “Continuous control of chaos by self-controlling feedback”, *Phys. Lett. A*, **170** (1992), 42.
- [11] Nakajima H., Ueda Y., “Limitation of generalized delayed feedback control of chaos”, *Physica D*, **111** (1998), 143.
- [12] Hovel P., Scholl E., “Control of unstable steady states by time-delayed feedback methods”, *Physical Review E*, **75** (2005), 046203.

- [13] Fiedler B., Flunkert V., Georgi M., Hovel P., Scholl E., “Refuting the odd number limitation of time-delayed feedback control”, *Phys. Rev. Lett.*, **98** (2007), 114101.
- [14] Кащенко С. А., “Асимптотика периодического решения обобщённого уравнения Хатчинсона”, *Исследования по устойчивости и теории колебаний*, ЯрГУ, Ярославль, 1981, 64–85; [Kashchenko S. A., “Asymptotics of periodical solution of Hutchinson generalized equation”, *Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebanii (Studies of Stability and Theory of Oscillations)*, YarGU, Yaroslavl, 1981, 64–85, (in Russian).]
- [15] Wright E. M., “A non-linear differential equation”, *J. Reine Angew. Math.*, **194**:1–4 (1955), 66–87.
- [16] Kakutani S., Markus L., “On the non-linear difference-differential equation $y'(t) = (a - by(t - \tau))y(t)$ contributions to the theory of non-linear oscillations”, *Ann. Math. Stud.*, **IV** (1958), 1–18.
- [17] Jones G. S., “The existence of periodic solutions of $f'(x) = -\alpha f(x - 1)[1 + f(x)]$ ”, *T. Math. Anal. and Appl.*, **5** (1962), 435–450.
- [18] Кащенко С. А., “Асимптотика решений обобщённого уравнения Хатчинсона”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **19**:3 (2012), 32–62; [Kashchenko S. A., “Asymptotics of Solutions of the Generalized Hutchinson’s Equation”, *Model. and Anal. Inform. Syst.*, **19**:3 (2012), 32–62, (in Russian).]
- [19] Григорьева Е. В., Кащенко С. А., *Релаксационные колебания в лазерах*, УРСС, М., 2013; [Grigorieva E. V., Kashchenko S. A., *Relaxation oscillations in lasers*, URSS, Moscow, 2013, (in Russian).]
- [20] Кащенко С. А., “Релаксационные колебания в системе с запаздываниями, моделирующей задачу ”хищник-жертва“”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **20**:1 (2013), 52–98; [Kashchenko S. A., “Relaxation Oscillations in a System with Delays Modeling the Predator-Prey Problem”, *Model. and Anal. Inform. Syst.*, **20**:1 (2013), 52–98, (in Russian).]
- [21] Кащенко С. А., “Исследование методами большого параметра системы нелинейных дифференциально-разностных уравнений, моделирующих задачу хищник-жертва”, *ДАН СССР*, **266**:4 (1982), 792–795; English transl.: Kashchenko S. A., “Study by large parameter method of system of nonlinear differential-difference equations modeling ‘predator-sacrifice’ problem”, *Dokl. Akad. Nauk USSR*, **266** (1982), 792–795.
- [22] Кащенко С. А., “Исследование стационарных режимов дифференциально-разностного уравнения динамики популяции насекомых”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **19**:5 (2012), 18–34; [Kashchenko S. A., “Stationary States of a Delay Differential Equation of Insect Population’s Dynamics”, *Model. and Anal. Inform. Syst.*, **19**:5 (2012), 18–34, (in Russian).]
- [23] Кащенко С. А., “Стационарные режимы уравнения, описывающего численности насекомых”, *Докл. АН СССР*, **273**:2 (1983), 328–330; [Kashchenko S. A., “Stationary regimes of equation describing numbers of insects”, *Reports Academy of Sciences of the USSR*, **273** (1983), 328–330, (in Russian).]
- [24] Эдварс Р., *Функциональный анализ. Теория и приложения*, Мир, М., 1969; Edwards R. E., *Functional Analysis: Theory and Applications*, Dover Pub, New York, 1965.
- [25] Кащенко С. А., “Бифуркации в окрестности цикла при малых возмущениях с большим запаздыванием”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.*, **40**:4 (2000), 693–702; [Kashchenko S. A., “Bifurcations in the neighborhood of a cycle under small perturbations with a large delay”, *Zh. vychisl. mat. i mat. fiz.*, **40**:5 (2000), 693–702, (in Russian).]
- [26] Марсден Дж., Мак-Кракен М., *Бифуркация рождения цикла и ее приложения*, Мир, М., 1980; Marsden J., McCracken M., *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [27] Хартман Ф., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970; Hartman P., *Ordinary Differential Equations*, Wiley, 1964.

- [28] Кащенко С. А., “Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной”, *Дифференциальные уравнения*, **25**:8 (1989), 1448–1451; [Kashchenko S. A., “Application of method of normalization for studying of differential-difference equations with small multiplier for derivative”, *Differential Equations*, **25**:8 (1989), 1448–1451, (in Russian).]
- [29] Kaschenko S. A., “Normalization in the systems with small diffusion”, *International Journal of Bifurcations and chaos*, **6**:7 (1996), 1093–1109.
- [30] Кащенко С. А., “О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией”, *ДАН СССР*, **299**:5 (1988), 1049–1053; [Kashchenko S. A., “On the quasi-normal forms for parabolic equations with small diffusion”, *Reports Academy of Sciences of the USSR*, **299** (1988), 1049–1053, (in Russian).]
- [31] Кащенко С. А., “Локальная динамика нелинейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием”, *Дифф. уравнения*, **35**:10 (1999), 1343–1355; [Kashchenko S. A., “Local Dynamics of non-linear singular perturbation systems with delay”, *Diff. Equations*, **35**:10 (1999), 1343–1355, (in Russian).]
- [32] Кащенко С. А., “Уравнения Гинзбурга–Ландау – нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием”, *Журнал выч. мат. и мат. физ.*, **38**:3 (1998), 457–465; [Kashchenko S. A., “The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay”, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, **38**:3 (1998), 457–465, (in Russian).]
- [33] Кащенко И. С., “Динамика уравнения с большим коэффициентом запаздывающего управления”, *Доклады Академии наук*, **437**:6 (2011), 743–747; English transl.: Kashchenko I. S., “Dynamics of an Equation with a Large Coefficient of Delay Control”, *Doklady Mathematics*, **83**:2 (2011), 258–261.
- [34] Кащенко И. С., “Асимптотическое исследование корпоративной динамики систем уравнений, связанных через запаздывающее управление”, *Доклады Академии наук*, **443**:1 (2012), 9–13; English transl.: Kashchenko I. S., “Asymptotic Study of the Corporate Dynamics of Systems of Equations Coupled by Delay Control”, *Doklady Mathematics*, **85**:2 (2012), 163–166.
- [35] Кащенко С. А., “Динамика логистического уравнения с запаздыванием и запаздывающим управлением”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **21**:5 (2014), 61–77; [Kashchenko S. A., “Dinamika logisticheskogo uravneniya s zapazdyvaniem i zapazdyvayushchim upravleniem”, *Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem*, **21**:5 (2014), 61–77, (in Russian).]
- [36] Кащенко С. А., “Динамика нелинейного уравнения второго порядка с большим коэффициентом запаздывающего управления”, *Доклады Академии наук*, **457**:6 (2014), 635–638; [Kashchenko S. A., “Dinamika nelineynogo uravneniya vtorogo poryadka s bol'shim koeffitsientom zapazdyvayushchego upravleniya”, *Doklady Akademii nauk*, **457**:6 (2014), 635–638, (in Russian).]
- [37] Kashchenko S. A., “Asymptotics of the Solutions of the Generalized Hutchinson Equation”, *Automatic Control and Computer Science*, **47**:7 (2013), 470–494.
- [38] Кащенко И. С., “Локальная динамика уравнения с распределенным запаздыванием”, *Дифференциальные уравнения*, **50**:1 (2014), 17–26; [Kashchenko I. S., “Lokal'naya dinamika uravneniya s raspredelennym zapazdyvaniem”, *Differentsial'nye uravneniya*, **50**:1 (2014), 17–26, (in Russian).]
- [39] Kashchenko I., “Normalization of a system with two large delays”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **24**:8 (2014), 1440021.
- [40] Кащенко И. С., Кащенко С. А., “Локальная динамика уравнения с большим запаздыванием и распределенным отклонением пространственной переменной”, *Сибирский математический журнал*, **55**:2 (2014), 315–323; [Kashchenko I. S., Kashchenko S. A., “Lokal'naya dinamika uravneniya s bol'shim zapazdyvaniem i raspredelennym otkloneniem prostranstvennoy peremennoy”, *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal*, **55**:2 (2014), 315–323, (in Russian).]

- [41] Кащенко И. С., “Асимптотический анализ поведения решений уравнения с большим запаздыванием”, *Доклады Академии Наук*, **421**:5 (2008), 586–589; English transl.: Kashchenko I. S., “Asymptotic analysis of the behavior of solutions to equations with large delay”, *Doklady Mathematics*, **78**:1 (2008), 570–573.
- [42] Кащенко И. С., Кащенко С. А., “Динамика уравнения с большим пространственно-распределенным управлением”, *Доклады Академии Наук*, **438**:1 (2011), 30–34; [Kashchenko I. S., Kashchenko S. A., “Dinamika uravneniya s bol'shim prostranstvenno-raspredelelynym upravleniem”, *Doklady Akademii Nauk*, **438**:1 (2011), 30–34, (in Russian).]
- [43] Кащенко С. А., “Локальная динамика пространственно-распределенного логистического уравнения с запаздыванием и большим коэффициентом переноса”, *Дифференциальные уравнения*, **50**:1 (2014), 73; [Kashchenko S. A., “Lokal'naya dinamika prostranstvenno-raspredelelynogo logisticheskogo uravneniya s zapazdyvaniem i bol'shim koeffitsientom perenosa”, *Differentsial'nyye uravneniya*, **50**:1 (2014), 73, (in Russian).]

Corporate Dynamics of Systems of Logistic Delay Equations with Large Delay Control

Bykova N. D., Kaschenko S. A.

*National Research Nuclear University MEPhI
Kashirskoye shosse 31, Moscow, 115409, Russia
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia*

Keywords: large control, quasinormal form, delay

A system of two logistic equations with delay coupled by delayed control is considered. It is shown that in the case of a sufficiently large delay control coefficient the problem of the dynamics of the initial systems is reduced to studying the non-local dynamics of special families of partial differential equations that do not contain small and large parameters. New interesting dynamic phenomena were discovered on the basis of the results of numerical analysis. Systems of three logistic delay equations with two types of “diffusion” relation were considered. Special families of partial differential equations that do not contain small and large parameters were also constructed for each of these systems. The results of the study of the original equations dynamic properties are presented. It is shown that the difference in the dynamics of the considered systems of three equations may be of a fundamental nature.

Сведения об авторах:

Быкова Надежда Дмитриевна,

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
аспирант,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ассистент

Кащенко Сергей Александрович,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования