

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-3-439-447

УДК 517.9

Исследование колебательных решений дифференциально-разностного уравнения второго порядка в одном критическом случае

Кубышкин Е. П., Морякова А. Р.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: kubysh.e@yandex.ru, alyona_moryakova@mail.ru

получена 5 июля 2015

Ключевые слова: D -разбиения, метод интегральных многообразий, теория бифуркаций, хаотические колебания

Рассматривается дифференциально-разностное уравнение второго порядка запаздывающего типа. Уравнения такого типа возникают при моделировании работы ряда электронных устройств. Изучается характер потери устойчивости нулевого решения. Показана возможность потери устойчивости, связанная с прохождением через мнимую ось двух пар чисто мнимых корней характеристического квазиполинома, находящихся в резонансе 1:3. Изучаются бифурцирующие при этом автоколебательные решения. Отмечено существование хаотического аттрактора, для которого вычислены ляпуновские показатели и ляпуновская размерность. В качестве метода исследования используется теория интегральных многообразий и метод нормальных форм нелинейных дифференциальных уравнений.

1. Постановка задачи. Анализ устойчивости нулевого решения

Рассматривается дифференциально-разностное уравнение

$$\ddot{x} + A\dot{x} + x + f(x(t-h)) + g(\dot{x}(t-h)) = 0, \quad (1)$$

в котором $A, h > 0$, $f(x) = f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \dots$, $g(x) = g_1x + g_2x^2 + g_3x^3 + \dots$ гладкие при $|x| \leq x_0$ функции.

Изучается характер потери устойчивости нулевого решения уравнения (1) и бифуркации автоколебательных решений в критическом случае потери устойчивости.

Рассмотрим линейную часть уравнения (1)

$$\ddot{x} + A\dot{x} + x + f_1x(t-h) + g_1\dot{x}(t-h) = 0 \quad (2)$$

и изучим расположение корней ее характеристического уравнения

$$P(\lambda) \equiv \lambda^2 + A\lambda + 1 + (f_1 + \lambda g_1) \exp(-\lambda h) = 0. \quad (3)$$

Для этого воспользуемся методом D -разбиений [1], который позволяет исследовать движение корней уравнения (3) при изменении параметров и построить в пространстве параметров области устойчивости и неустойчивости решений уравнения (1). Положим в характеристическом уравнении $\lambda = i\omega$, $\omega > 0$, $i = \sqrt{-1}$ и выделим вещественную и мнимую части. В результате получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} -\omega^2 + 1 + f_1 \cos(\omega h) + \omega g_1 \sin(\omega h) &= 0, \\ A\omega - f_1 \sin(\omega h) + \omega g_1 \cos(\omega h) &= 0. \end{aligned}$$

Преобразуя эту систему, находим

$$f_1 = \pm \sqrt{A\omega^2 + (1 - \omega^2)^2 - \omega^2 g_1^2}, \quad (4)$$

$$h_n(\omega) = \begin{cases} \omega^{-1}(\arctg((\omega(\omega - 1)g_1 + Af_1)/((\omega^2 - 1)f_1 - \omega^2 Ag_1)) + \pi n), & 0 < \omega < \omega_1, \\ \omega^{-1}(\arctg((\omega(\omega - 1)g_1 + Af_1)/((\omega^2 - 1)f_1 - \omega^2 Ag_1)) - \pi + \pi n), & \omega_1 < \omega < \infty, \end{cases} \quad (5)$$

где ω_1 является решением уравнения

$$\omega^8 + (A - 4 - g_1^2)\omega^6 + \omega^4(6 - 2A + 2g_1^2 - Ag_1^2) + \omega^2(A - 4 - g_1^2) + 1 = 0,$$

$$h_n(\omega_1) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} (\omega^{-1}(\arctg((\omega(\omega - 1)g_1 + Af_1)/((\omega^2 - 1)f_1 - \omega^2 Ag_1)) + \pi n)),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Эти соотношения позволяют построить в плоскости $(f_1; h)$ кривые, на которых уравнение (3) имеет корни, лежащие на мнимой оси (границы областей D -разбиений). Уравнение (3) также имеет корень $\lambda = 0$ при $f_1 = -1$. Область D_j соответствует наличию j корней уравнения (3) в правой комплексной полуплоскости.

На рис. 1 приведены картины D -разбиений плоскости параметров $(f_1; h)$ при $A = 1$ для различных значений параметра g_1 .

Возможны следующие механизмы потери устойчивости нулевого решения уравнения (2), связанные с прохождением корней характеристического уравнения (3) через мнимую ось из левой комплексной полуплоскости в правую:

- 1) прохождение пары комплексно сопряженных корней,
- 2) прохождение одновременно двух пар комплексно сопряженных корней,
- 3) прохождение одного нулевого корня,
- 4) прохождение одновременно нулевого корня и пары комплексно сопряженных корней.

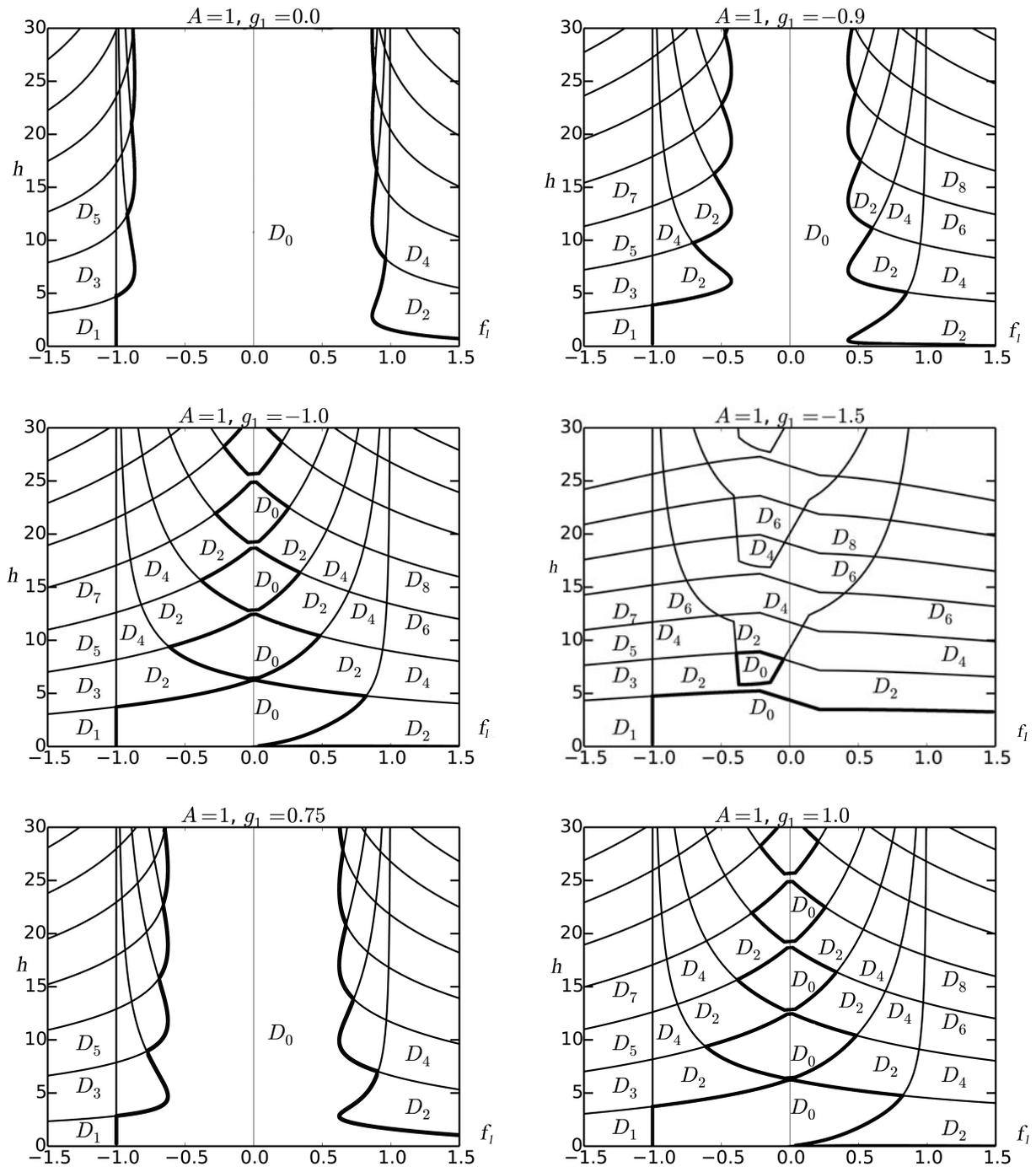


Рис. 1. D -разбиения для квазиполинома (3)

Численный анализ показал, что при прохождении двух пар комплексно сопряженных корней $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$, ($\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$) возможен внутренний резонанс 1:3 ($\omega_1/\omega_2 = 1/3, \omega_1 \approx 0.432, \omega_2 \approx 1.29$), при этом остальные корни характеристического уравнения находятся в левой комплексной полуплоскости. Соответствующие значения параметров равны $A = A_0 \approx 0.768, f_1 = f_{10} \approx 0.827, g_1 = g_{10} \approx -0.8, h = h_0 \approx 4.996$. Картина D -разбиения для этого случая качественно похожа на карти-

ну при значениях параметров $A = 1$, $g_1 = -0.9$. Этот критический случай представляет значительный интерес с точки зрения теорий бифуркаций и изучается в дальнейшем.

2. Характер поведения решений уравнения (1) в окрестности резонанса 1:3

Положим в (3) $A = A_0 + \varepsilon A_1$, $f_1 = f_{10} + \varepsilon f_{11}$, $g_1 = g_{10} + \varepsilon g_{11}$, $h = h_0 + \varepsilon h_1$, $0 < \varepsilon \ll 1$, тогда уравнение (3) примет вид

$$P(\lambda; \varepsilon) \equiv \lambda^2 + (A_0 + \varepsilon A_1)\lambda + 1 + (f_{10} + \varepsilon f_{11} + \lambda(g_{10} + \varepsilon g_{11})) \exp(-\lambda(h_0 + \varepsilon h_1)) = 0. \quad (6)$$

Считая $\lambda_j(\varepsilon) = i\omega_j + \varepsilon\lambda_{j1} + \varepsilon^2\lambda_{j2} + \dots$, $j = 1, 2$, из равенства $P(\lambda(\varepsilon); \varepsilon) = 0$ с необходимостью имеем

$$\lambda_{j1} = -\frac{P'_\varepsilon(i\omega_j; 0)}{P'_\lambda(i\omega_j; 0)} = -\frac{A_1 i\omega_j - \exp(-i\omega_j)(f_{11} + i\omega_j g_{11} + f_{10} + i\omega_j g_{10})}{2i\omega_j + A_0 - h_0(f_{10} + i\omega_j g_{10}) \exp(-i\omega_j) + g_{10} \exp(-i\omega_j)}. \quad (7)$$

Отметим, что $\operatorname{Re} \lambda_{j1}$ может быть величиной любого знака за счет выбора A_1, f_{11}, g_{11}, h_1 . Изучим поведение решений исходного уравнения с начальными условиями из некоторого шара $S(r_0)$ радиуса r_0 фазового пространства $H = C[-h, 0] \oplus C^1[-h, 0]$ уравнения (1) с центром в нуле.

Перейдем от уравнения (1) к эквивалентной краевой задаче

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial s} \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial s} \right|_{s=0} = l(u(t, s); \varepsilon). \quad (9)$$

Здесь $u(t, s) = \operatorname{col}(u_1(t, s), u_2(t, s)) = \operatorname{col}(x(t, s), \dot{x}(t, s))$, $l(u(s); \varepsilon) : H \rightarrow R^2$ — гладкий нелинейный функционал, имеющий вид:

$$l(u(s); \varepsilon) = l_1(u(s); \varepsilon) + l_2(u(s); \varepsilon) + l_3(u(s); \varepsilon) + \dots, \quad (10)$$

$$l_1(u(s); \varepsilon) = \operatorname{col}(u_2(0), -(A_0 + \varepsilon A_1)u_2(0) - u_1(0) - (f_{10} + \varepsilon f_{11})u_1(t, -(h_0 + \varepsilon h_1)) - (g_{10} + \varepsilon g_{11})u_2(t, -(h_0 + \varepsilon h_1))), \quad (11)$$

$$l_2(u(s); \varepsilon) = \operatorname{col}(0, -f_2 u_1^2(-(h_0 + \varepsilon h_1)) - g_2 u_2^2(-(h_0 + \varepsilon h_1))), \quad (12)$$

$$l_3(u(s); \varepsilon) = \operatorname{col}(0, -f_3 u_1^3(-(h_0 + \varepsilon h_1)) - g_3 u_2^3(-(h_0 + \varepsilon h_1))). \quad (13)$$

В окрестности нуля фазового пространства H краевая задача (8),(9) имеет [2,3] локальное асимптотически устойчивое гладкое инвариантное четырехмерное центральное многообразие $\Phi(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, s; \varepsilon)$, $z_1, z_2 \in C$, $-h \leq s \leq 0$, может быть представлено в виде разложения по $\varepsilon, z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2$

$$\begin{aligned} \Phi(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, s; \varepsilon) = & (u_{10}(s) + \varepsilon u_{10}^{(1)}(s) + \dots)z_1 + (u_{02}(s) + \\ & \varepsilon u_{02}^{(1)}(s) + \dots)z_2 + (u_{-10}(s) + \varepsilon u_{-10}^{(1)}(s) + \dots)\bar{z}_1 + (u_{0-2}(s) + \varepsilon u_{0-2}^{(1)}(s) + \dots)\bar{z}_2 + \\ & (u_{11}(s) + \varepsilon u_{11}^{(1)}(s) + \dots)z_1^2 + (u_{12}(s) + \dots)z_1z_2 + \dots, \end{aligned} \quad (14)$$

где $u_{10}(s) = \text{col}(1, i\omega_1) \exp(i\omega_1 s)$, $u_{02}(s) = \text{col}(1, i\omega_2) \exp(i\omega_2 s)$,
 $u_*(s) = \text{col}(u_{*1}(s), u_{*2}(s))$ – гладкие вектор-функции.

Поведение решений краевой задачи (8),(9) на многообразии определяет поведение траекторий следующей гладко зависящей от своих переменных и параметров системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_1 = (i\omega_1 + \lambda_1^1 \varepsilon + d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1 + d_1 \bar{z}_1^2 z_2 + \dots = Z_1(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2; \varepsilon), \quad (15)$$

$$\dot{z}_2 = (i\omega_2 + \lambda_2^1 \varepsilon + d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2 + d_2 \bar{z}_1^3 + \dots = Z_2(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2; \varepsilon), \quad (16)$$

в которой $\lambda_j^{(1)} = \tau_j^1 + i\omega_j^1$ определено согласно (7), комплексные постоянные $d_{jk} = a_{jk} + ic_{jk}, d_j (j, k = 1, 2)$ подлежат определению и точками обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости по $\varepsilon z_j, \varepsilon \bar{z}_j, z_j \bar{z}_j$.

Подставим выражение (14) с учетом (15)-(16) в краевую задачу (8)-(9). В результате получим тождества

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} Z_1(\cdot) + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_1} \bar{Z}_1(\cdot) + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} Z_2(\cdot) + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_2} \bar{Z}_2(\cdot) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial s} \quad (17)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right|_{s=0} \equiv l(\Phi(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, s; \varepsilon); \varepsilon) \quad (18)$$

для определения функций $u_*(s)$ и коэффициентов уравнений (15)–(16). Приравнявая в (17)–(18) последовательно коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon z_1, \varepsilon \bar{z}_1, \varepsilon z_2, \varepsilon \bar{z}_2, z_1 z_2, \dots$ получим рекуррентную последовательность краевых задач вида

$$u_{10}(s)d_1^* + u_{02}(s)d_2^* + (p_1 i\omega_1 + p_2 i\omega_2)u_* = \frac{du_*}{ds} \quad (19)$$

$$\left. \frac{du_*}{ds} \right|_{s=0} = l_1(u_*(s)) + f_*, \quad (20)$$

где p_1, p_2 – целые числа, d_1^*, d_2^* – коэффициенты, входящие в (15)–(16), f_* – постоянный вектор.

Условия разрешимости этих краевых задач позволяют эффективно и однозначно вычислить коэффициенты системы уравнений (15)–(16) и функции разложения (14).

С необходимостью имеем

$$\begin{aligned} d_{11} &= i\omega_1 \exp(-i\omega_1 h_0)(G_{11}(-2f_2 - 4g_2\omega_1^2) - 2G_{1-1}f_2 - 3(f_3 + ig_3\omega_1^3))/P'_\lambda(i\omega_1; 0), \\ d_{12} &= -\exp(-i\omega_1 h_0)((-G_{12}(f_2 + g_2\omega_2(\omega_1 + \omega_2)) - 2G_{1-2}(f_2 + (\omega_2 - \omega_1)\omega_2g_2)) + \\ &\quad + (f_2G_{2-2} + 3(f_3 + ig_3\omega_1\omega_2^2)))/P'_\lambda(i\omega_1; 0), \\ d_{21} &= -i\omega_2 \exp(-i\omega_2 h_0)((-2G_{1-2}(f_2 - (\omega_2 - \omega_1)\omega_1g_2)) - \\ &\quad - (2G_{12}(f_2 + g_2\omega_1(\omega_1 + \omega_2))2f_2G_{1-1} + 3(f_3 + ig_3\omega_1^2\omega_2)))/P'_\lambda(i\omega_2; 0), \\ d_{22} &= -i\omega_2 \exp(-i\omega_2 h_0)(-2G_{02}(f_2 + 2g_2\omega_2^2) - 2G_{2-2}f_2 - 3(f_3 + ig_3\omega_2^3))/P'_\lambda(i\omega_2; 0), \\ d_1 &= i(2\omega_1 - \omega_2) \exp(i(2\omega_1 - \omega_2)h_0)((-2f_2 - 4g_2\omega_1(\omega_2 - \omega_1))G_{-12}) + \\ &\quad + ((-f_2 - 4g_2\omega_1\omega_2)G_{-20} - 3f_3 + 3g_3i\omega_1^2\omega_2)/P'_\lambda(i\omega_2; 0), \\ d_2 &= -3i\omega_1 \exp(3i\omega_1 h_0)((-2f_2 + 4g_2\omega_1^2)G_{-20} - 3f_3 \exp(3i\omega_1 h_0) - 3g_3i\omega_1^3)/P'_\lambda(i\omega_2; 0), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G_{11} &= (-f_2 + \omega_1^2g_2) \exp(-2i\omega_1 h_0)/P(2i\omega_1; 0); \quad G_{1-1} = (-2f_2 + 2\omega_1^2g_2)(1 + f_{10}), \\ G_{12} &= -2(f_2 + \omega_1\omega_2g_2) \exp(-i(\omega_1 + \omega_2)h_0)/P(i(\omega_1 + \omega_2); 0); \\ G_{2-2} &= (-2f_2 - 2\omega_2^2g_2)/(1 + f_{10}), \\ G_{1-2} &= -2(f_2 + \omega_1\omega_2g_2) \exp(-i(\omega_2 - \omega_1)h_0)/P(i(\omega_1 - \omega_2); 0), \\ G_{-20} &= (-f_2 + \omega_1^2g_2) \exp(2i\omega_1 h_0)/P(-2i\omega_1; 0). \end{aligned}$$

Зависимость коэффициентов d_{jk} и A_j , $j, k = 1, 2$ от параметров f_2, g_2, f_3, g_3 весьма сложная. Выберем эти параметры таким образом, чтобы $a_{11}, a_{22} < 0$. Это в частности будет выполнено при

$$f_2 = -0.6, \quad f_3 = -0.9, \quad g_2 = 0.6, \quad g_3 = 0.2. \quad (21)$$

Рассмотрим “главную” часть системы уравнений (15)–(16) и выполним в ней замену $z_j = \varepsilon^{1/2}\rho_j \exp(i\tau_j)$, $\rho_j \geq 0$, $-\infty < \tau_j < \infty$ ($j = 1, 2$). Вводя теперь “медленные” переменные ρ_1, ρ_2 , $\theta = 2\tau_1 - \tau_2$ и быструю переменную τ_1 , предварительно положив $d_j = |d_j| \exp(i\gamma_j)$, $0 \leq \gamma_j < 2\pi$ и выполнив нормировки $\rho_j = \rho_j/(-a_{jj})^{1/2}$, $j = 1, 2$, $t \rightarrow t/\varepsilon$, а также выбрав A_1, f_{11}, g_{11}, h_1 таким образом, чтобы $\tau_1^1 = \tau_2^1 = 1$, получим следующую систему уравнений “медленных” переменных:

$$\dot{\rho}_1 = (1 - \rho_1^2 + a_1\rho_2^2)\rho_1 + b_1 \cos(-\theta + \gamma_1)\rho_1^2\rho_2, \quad (22)$$

$$\dot{\rho}_2 = (1 + a_2\rho_1^2 - \rho_2^2)\rho_2 + b_2 \cos(\theta + \gamma_2)\rho_1^3, \quad (23)$$

$$\dot{\theta} = \omega + c_1\rho_1^2 + c_2\rho_2^2 - 3b_1 \sin(-\theta + \gamma_1)\rho_1\rho_2 - b_2 \sin(\theta + \gamma_2)\rho_1^3/\rho_2, \quad (24)$$

где $a_1 = a_{12}/(-a_{22})$, $a_2 = a_{21}/(-a_{11})$, $b_1 = |d_1|/(a_{11}a_{22})^{1/2}$, $b_2 = |d_2|/(-a_{11})^{3/2}(-a_{22})^{1/2}$, $c_1 = (3c_{11} - c_{21})/(-a_{11})$, $c_2 = (3c_{12} - c_{22})/(-a_{22})$, $\omega = 2\omega_1^1 - \omega_2^1$.

Как известно, “грубым”, т.е. экспоненциально устойчивым (неустойчивым) состояниям равновесия системы уравнений (22)–(24) при малых ε в системе уравнений (15)–(16) и соответственно в краевой задаче (8)–(9) соответствует периодическое решение периода близкого к $2\pi/\omega_1$, того же характера устойчивости. “Грубым” периодическим решениям системы уравнений при малых ε в системе уравнений (15)–(16) и краевой задаче (8)–(9) соответствуют двумерные инвариантные торы [4].

Изучим характер фазовых перестроек системы (22) - (24). Считая $a_1 < 0$, $a_2 < 0$, зафиксируем значения параметров f_2 , $f_3 = 0.2$, $g_2 = 0.3$ согласно (21) и будем менять значение g_3 . Было отмечено существование следующего бифуркационного сценария:

1. При $g_3 < \kappa_0$, $\kappa_0 \approx 0.2$ существует устойчивый цикл.
2. На промежутке $\kappa_0 < g_3 < \kappa_1$, $\kappa_1 \approx 0.3$ происходит каскад бифуркаций удвоения периода устойчивого цикла.
3. Каскад бифуркаций удвоения периода приводит к появлению хаотического аттрактора при $g_3 \approx \kappa_1$.
4. Полученный хаотический аттрактор существует для значений параметра g_3 из промежутка $\kappa_1 < g_3 < \kappa_2$, $\kappa_2 \approx 0.9$.
5. При $g_3 \approx \kappa_2$ хаотический аттрактор исчезает и возникает устойчивое состояние равновесия.

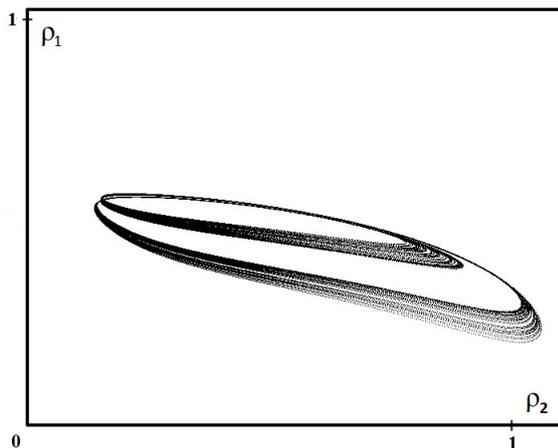


Рис. 2. Проекция хаотического аттрактора на плоскость $(\rho_1; \rho_2)$ при $g_3 \approx 0.42$

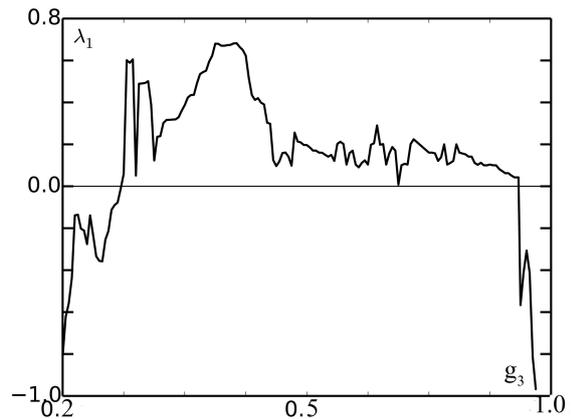


Рис. 3. График зависимости старшего ляпуновского показателя от бифуркационного параметра g_3

Для изучения характера хаотических колебаний было проведено численное исследование старшего ляпуновского показателя в зависимости от параметра g_3 . Результаты этого исследования приведены на рис. 3 в виде графика. Вычисления выполнены с шагом $1/100$ по параметру. Видно, что в моменты происхождения каскада удвоения периода и исчезновения хаотического аттрактора старшие ляпуновские показатели равны 0, а в зоне хаотических колебаний они положительны. Максимальное значение достигают при значении бифуркационного параметра $g_3 \approx 0.42$. В этом случае можно наблюдать развитой хаос, значения ляпуновских показателей для которого равны $\lambda_1 \approx 0.68$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \approx -2.58$, $d_L \approx 2.63$. Проекция данного аттрактора приведена на рис. 2.

Список литературы

- [1] Неймарк Ю. И., “D-разбиение пространства квазиполиномов (к устойчивости линеаризованных распределенных систем)”, *ПММ*, **13**:4 (1949), 349–380; [Neymark Yu. I., “D-razbienie prostranstva kvazipolinomov (k ustoychivosti linearizovannykh raspredelennykh sistem)”, *ПММ*, **13**:4 (1949), 349–380, (in Russian).]
- [2] Куликов А. Н., “О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве”, *Исследования по устойчивости и теории колебаний*, ред. Ю. С. Колесова, ЯрГУ, Ярославль, 1976, 114–129; [Kulikov A. N., “O gladkikh invariantnykh mnogoobraziyakh polugruppy nelineynykh operatorov v banakhovom prostranstve”, *Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy*, ed. Yu. S. Kolesova, YarGU, Yaroslavl’, 1976, 114–129, (in Russian).]
- [3] Марсден Дж., Мак-Кракен М., *Бифуркация рождения цикла и ее приложения*, Мир, М., 1980, 368 с.; English transl.: Marsden J. E., McCracken M., *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [4] Хейл Дж., *Колебания в нелинейных системах*, Наука, М., 1966; English transl.: Hale J. K., *Oscillations in Nonlinear Systems*, McGraw-Hill, N.Y., 1963.
- [5] Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора”, *Дифференциальные уравнения*, **41**:2 (2005), 268–273; Glyzin D. S., Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “The Dynamic Renormalization Method for Finding the Maximum Lyapunov Exponent of a Chaotic Attractor”, *Differential Equations*, **41**:2 (2005), 284–289.

Investigation of Oscillatory Solutions of Differential-Difference Equations of Second Order in a Critical Case

Kubyshkin E. P., Moryakova A.R.

P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: *D*-splitting, method of integral manifolds, bifurcation theory, chaotic oscillations

We consider a differential-difference equation of second order of delay type, containing the delay of the function and its derivatives. Such equations occur in the modeling of electronic devices. The nature of the loss of the zero solution stability is studied. The possibility of stability loss related to the passing of two pairs of purely imaginary roots, that are in resonance 1:3, through an imaginary axis is shown. In this case bifurcating oscillatory solutions are studied. It is noted the existence of a chaotic attractor for which Lyapunov exponents and Lyapunov dimension are calculated. As an investigation techniques we use the theory of integral manifolds and normal forms method for nonlinear differential equations.

Сведения об авторе:

Кубышкин Евгений Павлович,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
доктор физ.-мат. наук, профессор, orcid.org/0000-0003-1796-0190

Морякова Алёна Романовна,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
аспирант, orcid.org/0000-0003-2529-6277