Моделирование и анализ информационных систем. Т. 22, № 4 (2015), с. 453–463
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 22, No 4 (2015), pp. 453–463

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-4-453-463

УДК 519.16 + 514.172.45

Полиэдральные графы задач об остовных деревьях при дополнительных ограничениях

Бондаренко В. А.[1], Николаев А. В.[2], Шовгенов Д. А.[1]

получена 30 июля 2015

Исследуются полиэдральные графы двух задач о минимальном остовном дереве при дополнительных ограничениях. В первой задаче речь идет об отыскании дерева с минимальной суммой весов ребер среди всех остовных деревьев, количество висячих вершин которых не превосходит заданную величину. Во второй задаче дополнительное ограничение заключается в предположении о том, что степени всех вершин искомого дерева не превосходят заданную величину. Обе рассматриваемые задачи в варианте распознавания являются NP-полными.

В работе изучаются многогранники указанных задач и их графы. Устанавливается, что в обоих случаях распознавание смежности вершин этих графов представляет собой NP-полную задачу. Несмотря на это, удается получить сверхполиномиальные нижние оценки плотности (кликового числа) этих графов, которые характеризуют временную трудоемкость в широком классе алгоритмов, использующих линейные сравнения. Приведенные результаты свидетельствуют о принципиальном отличии комбинаторно–геометрических свойств рассматриваемых задач от классической задачи о минимальном остовном дереве.

Ключевые слова: остовное дерево, полиэдральный граф, плотность графа, NP-полная задача, гамильтонова цепь

Для цитирования: Бондаренко В. А., Николаев А. В., Шовгенов Д. А., "Полиэдральные графы задач об остовных деревьях при дополнительных ограничениях", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:4 (2015), 453–463.

Об авторах: Бондаренко Владимир Александрович, orcid.org/0000-0002-5976-3446, д-р физ.-мат. наук, профессор,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, e-mail: bond@bond.edu.yar.ru

Николаев Андрей Валерьевич, orcid.org/0000-0003-4705-2409, канд. физ.-мат. наук,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, e-mail: werdan.nik@gmail.com

Шовгенов Джамболет Азаматович, orcid.org/0000-0003-2022-4514, аспирант,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, e-mail: djsh92@mail.ru

Благодарности:

[1]При поддержке гранта РФФИ № 14-01-00333.

[2]При поддержке гранта Президента Российской Федерации МК-5400.2015.13.

1. Введение

Значительное число работ, связанных с вычислительной сложностью комбинаторных задач, направлено на изучение геометрических объектов, ассоциированных с задачами. Чаще всего такими объектами являются многогранники задач и графы этих многогранников. В частности, плотность полиэдрального графа (размер максимальной клики) задачи служит нижней оценкой вычислительной сложности в широком классе алгоритмов, основанных на линейных сравнениях. Более того, выяснилось, что эта характеристика полиномиальна для известных полиномиально разрешимых задач и сверхполиномиальна для труднорешаемых (см., например, [1–3]).

Хорошо известны задачи, которые в общей постановке полиномиально разрешимы, однако при введении дополнительных ограничений становятся NP-полными. Иногда происходит обратное: задача является NP-полной, однако введение дополнительных ограничений даёт возможность сконструировать для нее эффективный алгоритм. В связи с этим возникает вопрос: как введение дополнительных ограничений влияет на характеристики полиэдрального графа задачи?

Ниже рассматриваются задачи комбинаторной оптимизации, являющиеся задачами на графах и допускающие следующую постановку: задан реберно-взвешенный граф $G = (V, E)$ и некоторое множество T его подграфов, требуется найти подграф из T, имеющий минимальный (или максимальный) вес, под которым понимается сумма весов входящих в него рёбер.

Минимальное остовное дерево (minimum spanning tree, MST). В этой классической задаче требуется найти в связном графе G остовное дерево с минимальным весом.

Задача об остовном дереве полиномиально разрешима, например, алгоритмами Прима и Краскала [4].

Минимальное остовное дерево с ограничением на число висячих вершин (leaf constrained minimum spanning tree, LCST). В этой задаче требуется найти в связном графе $G(V, E)$ дерево минимального веса среди всех остовных деревьев, у которых число вершин степени 1 не превосходит заданную величину $k < |V|$.

Минимальное остовное дерево с ограничением на число висячих вершин в подграфе (restricted-leaf-in-subgraph minimum spanning tree, RLSST). Заданы связный граф G, некоторое подмножество U его вершин и положительное целое $k < |U|$, требуется найти в G остовное дерево минимального веса, не более k висячих вершин которого принадлежат множеству U.

Минимальное остовное дерево с ограничением на множество висячих вершин (set version of leaf constrained minimum spanning tree, SVST). Для связного графа $G(V, E)$ и некоторого подмножества U его вершин требуется найти в G остовное дерево минимального веса, все висячие вершины которого принадлежат множеству U.

Минимальное остовное дерево ограниченной степени (degree constrained minimum spanning tree, DCST). В этой задаче требуется найти дерево минимального веса среди всех остовных деревьев, степени вершин которых не превосходят заданную величину k.

В отличие от простой задачи об остовном дереве, для всех приведенных выше задач уже проверка существования в графе G хотя бы одного остовного дерева, удовлетворяющего дополнительным ограничениям, является NP-полной задачей [5, 6].

Значительное число работ посвящено построению приближенных алгоритмов для задач об остовном дереве с ограничениями на число листьев и степени вершин [6–8]. В частности, можно выделить линейный 2-аппроксимационный алгоритм для двойственной задачи поиска остовного дерева с максимальным числом внутренних узлов [9] и полиномиальный алгоритм построения остовного дерева с максимальной степенью вершин $k+1$ и суммарным весом, не превышающим веса оптимального остовного дерева со степенями вершин не более k [10].

2. Многогранник задачи

Рассмотрим упомянутую выше общую задачу на графе $G = (V, E)$ с множеством T его подграфов. Пусть $|V| = n$, обозначим через d количество ребер полного графа:

$$d = |E| = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^d$, координаты точек в котором ассоциированы с ребрами графа G. Для каждого элемента t из T составим его характеристический вектор $x = x(t) \in \mathbb{R}^d$, положив равными единице значения тех координат, которые соответствуют ребрам, принадлежащим t, а значения остальных координат примем равными нулю. Совокупность характеристических векторов обозначим через X. Рассмотрим вектор $c \in \mathbb{R}^d$, составленный из весов ребер графа G. Тогда поставленная задача является задачей оптимизации линейной функции (c, x) на конечном множестве X.

Обозначим через $M(X)$ многогранник задачи: $M(X) = convX$. Полиэдральным графом задачи называется граф многогранника, множеством вершин которого служит множество геометрических вершин (в данном случае это X), а множеством ребер – совокупность геометрических ребер, то есть множество одномерных граней. Для описания графа многогранника полезно следующее утверждение (см., например, [11]).

Лемма 1. *Две вершины многогранника M смежны тогда и только тогда, когда они строго отделяются от множества остальных его вершин. Или, другими словами, две вершины x и y многогранника M являются несмежными тогда и только тогда, когда их некоторая выпуклая комбинация совпадает с некоторой выпуклой комбинацией остальных вершин, то есть найдутся такие $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma_z \geq 0$, для которых*

$$\alpha x + \beta y = \sum \gamma_z z,$$
$$\alpha + \beta = \sum \gamma_z = 1,$$

и суммирование производится по всем вершинам, отличным от x и y.

3. Многогранник задачи об остовном дереве

Полное внешнее описание многогранника MST_n задачи об остовном дереве для графа $G(V, E)$ на n вершинах известно и имеет вид

$$\sum_{e \in E} x_e = n - 1, \tag{1}$$

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1, \forall S \subset V, \tag{2}$$

$$x_e \geq 0, \forall e \in E. \tag{3}$$

Если ввести дополнительные переменные, систему (1)–(3) можно переписать в эквивалентном виде с полиномиальным $(O(n^3))$ числом ограничений, что позволяет решать задачу в том числе полиномиальными алгоритмами линейного программирования [12].

Полиэдральный граф многогранника MST_n полностью описан, точное значение плотности приведено в работе [13].

Теорема 1. *Плотность полиэдрального графа многогранника MST_n полиномиальна по n и равна*

$$\omega(MST_n) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor .$$

4. Остовное дерево с ограничением на число висячих вершин

В отличие от общей задачи полное внешнее описание многогранников задач об остовном дереве с ограничениями на число листьев не известно. Формулировка задач в виде целочисленного линейного программирования получается дополнением системы (1)–(3) ограничениями

$$\sum_{e \in \delta_v} x_e + (|\delta_v| - 1) y_v \leq |\delta_v|, \forall v \in V, \tag{4}$$

$$x_e, y_v \in \{0, 1\}, \forall e \in E, v \in V, \tag{5}$$

где δ_v – множество ребер, инцидентных вершине v, и дополнительные переменные y_v соответствуют висячим вершинам [14].

Данная формулировка используется, как правило, для задачи оптимизации числа висячих вершин

$$\sum_{v \in V} y_v \to \max(\min).$$

Вариант с оптимизацией веса остовного дерева можно получить, дополнив систему (1)–(5) неравенствами

$$\sum_{v \in V} y_v \leq k$$

для задачи с простым ограничением на число висячих вершин ($LCST_{n,k}$),

$$\sum_{v \in U} y_v \leq k$$

для задачи с ограничением в подграфе ($RLSST_{n,U,k}$), и

$$\forall v \in V \backslash U : y_v = 0$$

для задачи с ограничением на множество листьев ($SVST_{n,U}$).

Рассмотрим задачу о минимальном остовном дереве с ограничением на число висячих вершин. Пусть $|V| = n$, k – разрешенное количество висячих вершин. Построим остовное дерево t специального вида. Выберем две вершины u, w из V и набор V_{uw} из k вершин, часть $V_u = \{v_1, \cdots, v_s\}$ из которых соединим ребрами с вершиной u, а остальные $\{v_{s+1}, \cdots, v_k\} = V_w$ – с вершиной w. Оставшиеся $n - k - 2$ вершины соединяются ребрами только друг с другом либо с вершинами u и w так, чтобы в результате образовалось остовное дерево (Рис. 1).

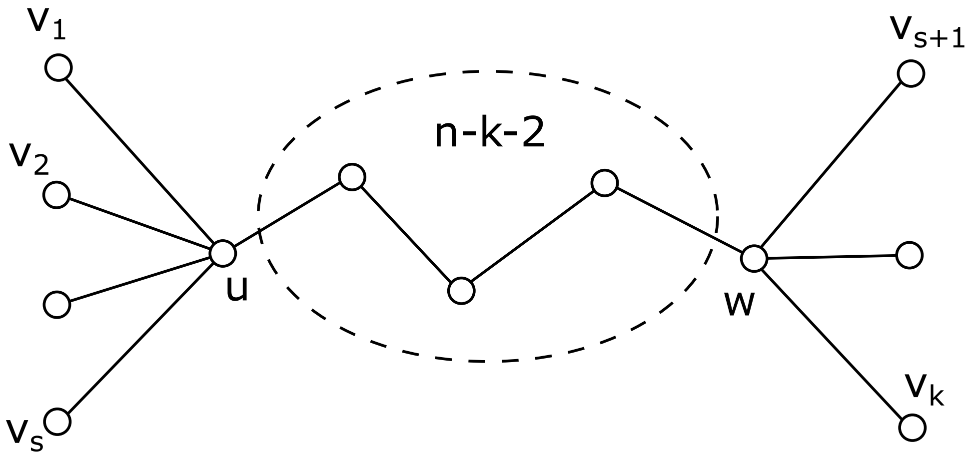

Рис. 1. Конструкция остовного дерева с k листьями
Fig. 1. Spanning tree construction with k leaves

Лемма 2. *Граф t_h, получаемый из дерева t отбрасыванием вершин $v_1, v_2, \cdots, v_k$ (вместе с ребрами (v_i, u) и (v_j, w)), является гамильтоновой цепью на $n-k$ оставшихся вершинах.*

Доказательство. Граф t_h является остовным деревом на множестве вершин $V \backslash V_{uw}$. Поэтому у него по меньшей мере две висячие вершины. Ими могут быть только u и w, так как любая другая вершина из $V \backslash V_{uw}$, оказавшись висячей в дереве t_h, останется таковой и в дереве t. Но лимит висячих вершин исчерпывается множеством V_{uw}. Следовательно, t_h является остовным деревом, у которого ровно две висячие вершины: u и w. Поэтому t_h – цепь, проходящая через все вершины из $V \backslash V_{uw}$, для которой u и w – концевые вершины. □

Зафиксируем множества V_u и V_w и рассмотрим совокупность T_k всех остовных деревьев описанного вида с k висячими вершинами. По лемме 2 каждое такое дерево содержит цепь t_h с концевыми вершинами u и w, проходящую через все вершины из $V \backslash V_{uw}$. Верно и обратное: каждой цепи указанного вида соответствует дерево из T_k. Обозначим через HC_{uw} выпуклую оболочку характеристических векторов гамильтоновых цепей t_h между вершинами u и w.

Лемма 3. *Вершины x и y многогранника $LCST_{n,k}$, отвечающие деревьям из T_k, несмежны тогда и только тогда, когда несмежны соответствующие им вершины x_h и y_h многогранника HC_{uw}.*

Доказательство. Предположим, что вершины x_h и y_h многогранника HC_{uw} несмежны. Воспользуемся леммой 1, тогда найдутся неотрицательные α, β, γ_z, для которых $\alpha + \beta = \sum \gamma_z = 1$ и выполнено условие:

$$\alpha x_h + \beta y_h = \sum \gamma_z z_h, \ z_h \in H_{uw}. \tag{6}$$

Каждой гамильтоновой цепи из H_{uw} однозначно соответствует остовное дерево из T_k. Дополняя (6) равенствами для компонент, соответствующих ребрам (v_i, u) и (v_j, w), получим равенство

$$\alpha x + \beta y = \sum \gamma_z z, \ z \in T_k,$$

означающее, что вершины x и y многогранника $LCST_{n,k}$ несмежны.

Пусть теперь вершины x и y несмежны, тогда найдутся неотрицательные α, β, γ_z, для которых $\alpha + \beta = \sum \gamma_z = 1$ и

$$\alpha x + \beta y = \sum \gamma_z z.$$

У точек x и y, все координаты, соответствующие ребрам, инцидентным вершинам $v_1, v_2, \cdots, v_k$, совпадают, так как эти ребра фиксированы для остовных деревьев из T_k, а значит, они совпадают и у точек z, что позволяет перейти к равенству

$$\alpha x + \beta y = \sum \gamma_z z, \ z \in T_k.$$

Каждому остовному дереву из T_k однозначно соответствует гамильтонова цепь между вершинами u и w из H_{uw}. Таким образом,

$$\alpha x_h + \beta y_h = \sum \gamma_z z_h, \ z_h \in H_{uw},$$

и вершины x_h и y_h многогранника H_{uw} несмежны. □

Доказанная лемма 3 дает возможность воспользоваться свойствами задачи коммивояжера для изучения многогранника $LCST_{n,k}$. Для этого достаточно учесть следующий простой факт: две вершины многогранника HC_{uw} гамильтоновых цепей смежны тогда и только тогда, когда в многограннике задачи коммивояжера смежны вершины, соответствующие гамильтоновым циклам, образованным при отождествлении крайних вершин в одну. Таким образом из леммы 3 и известного результата Х. Пападимитриу [15] следует

Теорема 2. *Задача распознавания несмежности вершин многогранника $LCST_{n,k}$ является NP-полной.*

Несмотря на сложность описания графа многогранника $LCST_{n,k}$, можно получить сверхполиномиальную нижнюю оценку его плотности.

Теорема 3. *Плотность полиэдрального графа многогранника $LCST_{n,k}$ задачи об остовном дереве с ограничением на число висячих вершин сверхполиномиальна по n:*

$$\omega(LCST_{n,k}) \geq 2^{(\sqrt{\lfloor \frac{n-k-1}{2} \rfloor}-9)/2}.$$

Для доказательства теоремы 3 достаточно воспользоваться леммой 3 и нижней оценкой плотности полиэдрального графа многогранника TSP_n задачи коммивояжера для n городов (см. [1, 2]):

$$\omega(TSP_n) \geq 2^{(\sqrt{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}-9)/2)}.$$

Задачи с ограничениями в подграфе и на множество висячих вершин исследуются аналогично. В первом случае для $RLSST_{n,U,k}$ достаточно взять вместо графа G его подграф на вершинах U и построить соответствующую конструкцию остовного дерева. Во втором случае для $SVST_{n,U}$ достаточно в рассматриваемой конструкции отождествить множество листьев V_{uw} с множеством U.

Теорема 4. *Задача распознавания несмежности вершин многогранника $RLSST_{n,U,k}$ является NP-полной.*

Теорема 5. *Плотность полиэдрального графа многогранника $RLSST_{n,U,k}$ задачи об остовном дереве с ограничением на число висячих вершин в подграфе сверхполиномиальна по мощности множества U:*

$$\omega(RLSST_{n,U,k}) \geq 2^{(\sqrt{\lfloor \frac{|U|-k-1}{2} \rfloor}-9)/2}.$$

Теорема 6. *Задача распознавания несмежности вершин многогранника $SVST_{n,U}$ является NP-полной.*

Теорема 7. *Плотность полиэдрального графа многогранника $SVST_{n,U}$ задачи об остовном дереве с ограничением на множество висячих вершин сверхполиномиальна по n:*

$$\omega(SVST_{n,U}) \geq 2^{(\sqrt{\lfloor \frac{n-|U|-1}{2} \rfloor}-9)/2}.$$

5. Задача об остовном дереве ограниченной степени

Теперь обратимся к задаче о построении минимального остовного дерева, степени вершин которого не превосходят некоторого параметра k. Как и для задачи с ограничением на число висячих вершин полное внешнее описание многогранника $DCST_{n,k}$ не известно [8]. В форме целочисленного линейного программирования задача получается дополнением системы (1)–(3) ограничениями

$$\sum_{e \in \delta_v} x_e \leq k,$$

$$x_e \in 0, 1, v \in V.$$

Для $n > 2$ и $k > 1$ обозначим через

$$s = \left\lfloor \frac{n-2}{k-1} \right\rfloor$$

и построим дерево t специального вида. Разобьем множество вершин на s подмножеств вида $V_i = \{v_i, v_{i,1}, \cdots, v_{i,k-2}\}$ по $k-1$ вершине в каждом. Все оставшиеся вершины, которых будет от 2 до $k+1$, разобьем на два подмножества $V_0 = \{v_0, v_{0,1}, ..., v_{0,p}\}$ и $V_{s+1} = \{v_{s+1}, v_{s+1,1} \cdots, v_n\}$. Рассмотрим конструкцию следующего вида: в каждом подмножестве V_i все вершины соединяются ребрами только с вершиной v_i (Рис. 2). Отметим, что степени вершин v_0 и v_{s+1} по построению не могут превосходить k.

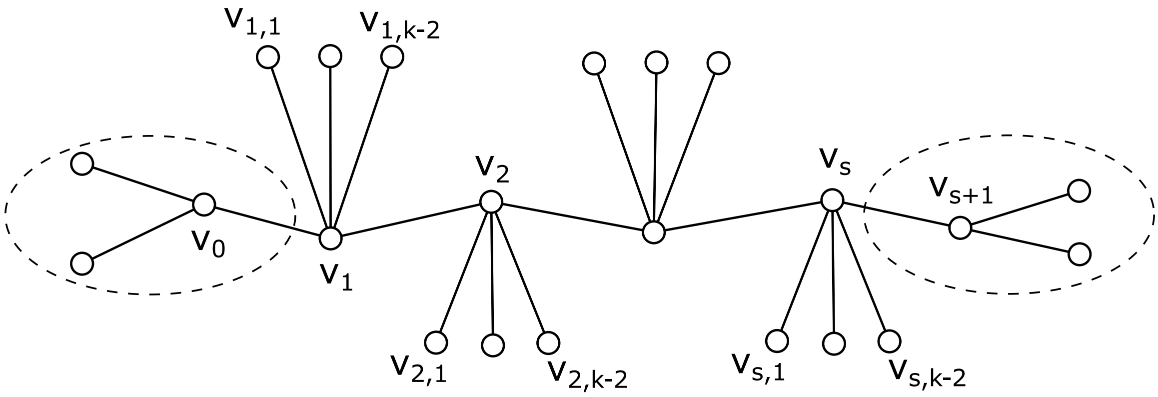

Рис. 2. Конструкция остовного дерева, степени вершин которого не превосходят k
Fig. 2. Spanning tree construction with k-bounded vertex degree

Лемма 4. *Граф t_h, получаемый из дерева t отбрасыванием вершин v_0, v_{s+1} и $v_{i,j}$ вместе с ребрами $(v_{i,j}, v_i)$, является гамильтоновой цепью с концевыми вершинами v_1 и v_s.*

Доказательство. По построению степени вершин v_1 и v_s не могут быть меньше $k-1$, а степени вершин $\{v_2, \cdots, v_{s-1}\}$ меньше $k-2$. Так как степени вершин в дереве t не могут превосходить k, то граф, получаемый после отбрасывания вершин, может быть только гамильтоновой цепью, соединяющей v_1 и v_s. □

Рассмотрим совокупность T_k всех остовных деревьев описанного вида. По лемме 4 каждое такое дерево содержит цепь t_h с концевыми вершинами v_1 и v_s, проходящую через вершины $\{v_2, \cdots, v_{s-1}\}$. Верно и обратное: каждой цепи указанного вида соответствует дерево из T_k. Обозначим через HC_{1s} выпуклую оболочку характеристических векторов гамильтоновых цепей между вершинами v_1 и v_s.

Лемма 5. *Вершины x и y многогранника $DCST_{n,k}$, отвечающие деревьям из T_k, несмежны тогда и только тогда, когда несмежны соответствующие им вершины x_h и y_h многогранника HC_{1s}.*

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 3. Как следствие получаем следующие утверждения.

Теорема 8. *Задача распознавания несмежности вершин многогранника* $DCST_{n,k}$ *является NP-полной.*

Теорема 9. *Плотность полиэдрального графа многогранника* $DCST_{n,k}$ *задачи об остовном дереве ограниченной степени сверхполиномиальна по* s*:*

$$\omega(DCST_{n,k}) \geq 2^{(\sqrt{\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor} - 9)/2}.$$

6. Заключение

Таким образом, общая задача о минимальном остовном дереве и задачи с дополнительными ограничениями на число висячих вершин и степени вершин имеют принципиально отличные полиэдральные характеристики. Для классической задачи известны полиномиальные алгоритмы, построено полное внешнее описание многогранника с полиномиальным числом неравенств, полностью описан полиэдральный граф задачи, и установлено, что его плотность полиномиальна по размерности пространства. При этом задачи с дополнительными ограничениями являются труднорешаемыми, для них не найдено полного внешнего описания соответствующих многогранников, полиэдральные графы задач являются крайне сложными: даже проверка смежности вершин является NP-полной задачей, плотности графов сверхполиномиальны по размерности пространства.

Список литературы / References

[1] Бондаренко В. А., "Оценки сложности задач комбинаторной оптимизации в одном классе алгоритмов", *Доклады Академии наук*, **328**:1 (1993), 22–24; [Bondarenko V. A., "Complexity bounds for combinatorial optimization problems in one class of algorithms", *Russian Academy of Sciences Doklady Mathematics*, **328**:1 (1993), 22–24, (in Russian).]

[2] Бондаренко В. А., Максименко А. Н., *Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации*, ЛКИ, М., 2008, 184 с.; [Bondarenko V. A., Maksimenko A. N., *Geometricheskie konstruktsii i slozhnost' v kombinatornoy optimizatsii*, LKI, Moscow, 2008, (in Russian).]

[3] Бондаренко В. А., Николаев А. В., "Комбинаторно-геометрические свойства задачи о разрезе", *Доклады Академии наук*, **452**:2 (2013), 127–129; [Bondarenko V. A., Nikolaev A. V., "Combinatorial and Geometric Properties of the Max-Cut and Min-Cut Problems", *Doklady Mathematics*, **88**:2 (2013), 516–517]

[4] Пападимитриу Х., Стайглиц К., *Комбинаторная оптимизация: алгоритмы и сложность*, Мир, М., 1985, 512 с.; [Papadimitriou C. H., Steiglitz K., *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1982.]

[5] Гэри М., Джонсон Д., *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*, Мир, М., 1982, 416 с.; [Garey M. R., Johnson D. S., *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1979.]

[6] Rahman M. S., Kaykobad M., "Complexities of some interesting problems on spanning trees", *Information Processing Letters*, **94**:2 (2005), 93–97.

[7] Fernandes L. M., Gouveia L., "Minimal spanning trees with a constraint on the number of leaves", *European Journal of Operational Research*, **104**:1 (1998), 250–261.

[8] Goemans M. X., "Minimum Bounded-Degree Spanning Trees", Proceedings of the 47th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 2006, 273–282.

[9] Salamon G., Wiener G., "On finding spanning trees with few leaves", *Information Processing Letters*, **105**:5 (2008), 164–169.

[10] Singh M., Lau L. C., "Approximating minimum bounded degree spanning trees to within one of optimal", Proceedings of the Thirty-ninth Annual ACM Symposium on Theory of Computing., 2007, 661–670.

[11] Бренстед А., *Введение в теорию выпуклых многогранников*, Мир, М., 1988, 240 с.; [Brondsted A., *An Introduction to Convex Polytopes*, Springer-Verlag, 1983.]

[12] Martin R. K., "Using separation algorithms to generate mixed integer model reformulations", *Operations Research Letters*, **10**:3 (1991), 119–128.

[13] Белов Ю. А., "О плотности графа матроида", *Модели исследования операций в вычислительных системах*, Яросл. гос. ун-т., Ярославль, 1985, 95–100; [Belov Y. A., "O plotnosti grafa matroida", *Modeli issledovanija operacij v vychislitelnyh sistemah*, Yaroslavl state university, Yaroslavl, 1985, 95–100, (in Russian).]

[14] Fujie T., "The maximum-leaf spanning tree problem: Formulations and facets", *Networks*, **43**:4 (2004), 212–223.

[15] Papadimitriou C. H., "The Adjacency Relation on the Traveling Salesman Polytope is NP-Complete", *Mathematical Programming*, **14**:1 (1978), 312–324.

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-4-453-463

1-Skeletons of the Spanning Tree Problems with Additional Constraints

Bondarenko V. A.[1], Nikolaev A. V.[2], Shovgenov D. A.[1]

Received July 30, 2015

In this paper, we study polyhedral properties of two spanning tree problems with additional constraints. In the first problem, it is required to find a tree with a minimum sum of edge weights among all spanning trees with the number of leaves less than or equal to a given value. In the second problem, an additional constraint is the assumption that the degree of all nodes of the spanning tree does not exceed a given value. The recognition versions of both problems are NP-complete. We consider polytopes of these problems and their 1-skeletons. We prove that in both cases it is a NP-complete problem to determine whether the vertices of 1-skeleton are adjacent. Although it is possible to obtain a superpolynomial lower bounds on the clique numbers of these graphs. These values characterize the time complexity in a broad class of algorithms based on linear comparisons. The results indicate a fundamental difference between combinatorial and geometric properties of the considered problems from the classical minimum spanning tree problem.

Keywords: spanning tree, 1-skeleton, clique number, NP-complete problem, hamiltonian chain

For citation: Bondarenko V. A., Nikolaev A. V., Shovgenov D. A., "1-Skeletons of the Spanning Tree Problems with Additional Constraints", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:4 (2015), 453–463.

On the authors: Vladimir Bondarenko, orcid.org/0000-0002-5976-3446, doctor of science, professor,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: bond@bond.edu.yar.ru,

Andrei Nikolaev, orcid.org/0000-0003-4705-2409, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: werdan.nik@gmail.com

Dzhambolet Shovgenov, orcid.org/0000-0003-2022-4514, graduate student,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: djsh92@mail.ru

Acknowledgments:

[1]Supported by the Russian Foundation for Basic Research, project 14-01-00333.

[2]Supported by the President's of Russian Federation grant MK-5400.2015.1.