

©Казарин Л. С., Поисеева С. С., 2015

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-4-483-499

УДК 512.547.214

О конечных группах с большой степенью неприводимого характера

Казарин Л. С.¹, Поисеева С. С.

получена 6 июля 2015

Пусть G – конечная неединичная группа с неприводимым комплексным характером χ степени d . Согласно соотношениям ортогональности для неприводимых характеров, сумма квадратов степеней этих характеров равна порядку группы G . Н. Снайдером доказано, что если $|G| = d(d + e)$, то порядок группы G ограничен функцией e при $e > 1$. Я. Берковичем доказано, что в случае $e = 1$ группа G является группой Фробениуса с дополнением порядка d .

В данной работе изучается конечная неединичная группа G , обладающая неприводимым комплексным характером Θ , для которого $|G| \leq 2\Theta(1)^2$. Доказано, что в случае, когда $\Theta(1)$ – произведение двух различных простых чисел p и q , группа G является разрешимой группой с абелевой нормальной подгруппой K индекса pq . С помощью классификации простых конечных групп доказано, что простая неабелева группа, порядок которой делится на простое число p и не превышает $2p^4$, изоморфна одной из следующих групп: $L_2(q)$, $L_3(q)$, $U_3(q)$, $Sz(8)$, A_7 , M_{11} , J_1 .

Ключевые слова: конечная группа, характер конечной группы, степень неприводимого характера конечной группы

Для цитирования: Казарин Л. С., Поисеева С. С., "О конечных группах с большой степенью неприводимого характера", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22:4** (2015), 483–499.

Об авторах:

Казарин Лев Сергеевич, orcid.org/0000-0003-1836-0955, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой алгебры и мат. логики, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, e-mail: kazarin@uniyar.ac.ru

Поисеева Саргылана Семеновна, orcid.org/0000-0003-2740-9845, аспирант, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, e-mail: pss.iii@mail.ru

Благодарности:

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-00469).

Введение

Пусть G – конечная группа, обладающая неприводимым представлением над полем комплексных чисел с характером Θ . Согласно соотношениям ортогональности для неприводимых характеров (глава 2 в [1]), сумма квадратов степеней этих характеров равна порядку группы. В частности, $\Theta(1)^2 < |G|$. В общем случае порядок группы существенно больше квадрата степени любого ее неприводимого характера. Однако, согласно [2], у любой простой неабелевой группы G имеется неприводимый характер степени, большей $|G|^{1/3}$. Н. Снайдером в [3] изучались группы, с неприводимым характером степени d , для которого $|G| = d(d + e)$. Им было доказано, что в этом случае порядок группы G ограничен функцией от e при $e > 1$. В случае $e = 1$ группа G является группой Фробениуса. Я. Берковичем в [4] классифицированы группы при $e = 1$ и $e = 2$. Для $e > 1$ М. Айзекс в [5] показал, что $|G| \leq Be^6$ для некоторой постоянной B . К. Дюрфи и С. Дженсен в [6] доказали, что $|G| \leq e^6 - e^4$. А по М. Льюису, $d \leq e^2 - e$ и $|G| \leq e^4 - e^3$ – наилучшее возможное ограничение [7].

Определение 1. Конечную группу G порядка больше двух, обладающую неприводимым характером Θ , таким, что, $2\Theta(1)^2 \geq |G|$, будем называть $LC(\Theta)$ -группой.

Цель настоящей статьи – изучение конечных $LC(\Theta)$ -групп с $\Theta(1) = pq$, где p и q – различные простые числа и $p > q$.

Так как $|G| \leq 2p^2q^2 < 2p^4$, то первым шагом в изучении $LC(\Theta)$ -групп с нашим условием будет описание простых неабелевых групп G , обладающих силовой p -подгруппой порядка p , для которых $|G| \leq 2p^4$.

Заметим, что группы с силовой подгруппой порядка p изучались в серии работ Р. Брауэра и его учеников, начиная с 40-х годов прошлого века, а позднее в работах У. Фейта (см. библиографию в книге [8]). Используя классификацию конечных простых групп, получен следующий результат.

Теорема 1. Пусть G – конечная простая неабелева группа с силовой p -подгруппой простого порядка p . Если $|G| \leq 2p^4$, то G изоморфна одной из следующих групп: $L_2(q)$, $q > 3$, $L_3(q)$, $U_3(q)$ (q – степень простого числа), $Sz(8)$, A_7 , M_{11} , J_1 .

Описание простых групп порядка $< p^3$ с силовой p -подгруппой порядка p получено в работе Брауэра и Туана (теорема VIII 5.1 и ее следствие в [8]). Для групп $L_3(q)$ соответствующее простое число $p = q^2 + q + 1$ может возникнуть при $q \not\equiv 1 \pmod{3}$, а для $U_3(q)$ такое простое число $p = q^2 - q + 1$ может появиться лишь при $q \not\equiv -1 \pmod{3}$. Для группы $Sz(8)$ будет $p = 13$, для A_7 $p = 7$, для M_{11} $p = 11$ и для J_1 $p = 19$.

Следующая теорема показывает, что в случае $\Theta(1) = pq$, где $p > q$ – простые числа, $LC(\Theta)$ -группа будет p -разрешимой.

Теорема 2. Пусть G является $LC(\Theta)$ -группой. Если $\Theta(1) = pq$, где p и q – различные простые числа, то G – p -разрешимая группа.

В доказательстве теоремы 2 также установлено, что при $|G| \notin \{54, 72\}$ порядок $|G|$ равен $pq^b m$, где $(pq, m) = 1$. Следующая теорема дает описание $LC(\Theta)$ -групп.

Теорема 3. Пусть G является $LC(\Theta)$ -группой с $\Theta(1) = pq$, где $p > q$ и p, q – простые числа. Тогда G имеет абелеву нормальную подгруппу K индекса pq .

Прямое произведение знакопеременной группы A_4 и симметрической группы S_3 имеет неприводимый характер Θ степени 6, так что $|G| = 2 \cdot 6^2$.

В общем случае задача описания строения группы, обладающей неприводимым характером Θ , таким, что $|G| \leq c\Theta(1)^2$ для небольшой константы c представляется довольно сложной. Таким характером при $c < 2,6$ обладает спорадическая группа Томпсона, при $c < 3,1$ все пять групп Матье, при $c < 4,4$ группа Янко порядка 175560 и группа Хигмана–Симса.

Все группы предполагаются конечными. Буква p везде используется для обозначения простого числа. Необходимые сведения, касающиеся обыкновенных и модулярных представлений конечных групп, можно найти в [9] и [1]. Для любого элемента a группы G через h_a обозначается число элементов группы G , сопряженных с a . Скалярное произведение характеров χ и ψ группы G обозначается $\langle \chi, \psi \rangle$. В частности, если эти характеры неприводимы, то $\langle \chi, \psi \rangle = \delta_{\chi, \psi}$. Множество неприводимых характеров группы G обозначается $\text{Irr}(G)$.

1. Вспомогательные результаты

Лемма 1. (Клиффорд) Пусть $N \triangleleft G$ и $\chi \in \text{Irr}(G)$, а $\theta \in \text{Irr}(N)$. Тогда из $\langle \chi_N, \theta \rangle_N \neq 0$ следует, что

$$\chi_N = e \sum_{i=1}^t \theta_i,$$

где θ_i – характеры, сопряженные θ . Число t различных сопряженных характеров к характеру θ равно индексу подгруппы инерции $I_G(\theta)$ характера θ (состоящей из всех $g \in G$, для которых $\theta^g = \theta$), а число $e = e(\chi)$ делит $|I_G(\theta) : N|$, если G/N – разрешимая группа.

Доказательство. См. теорему 6.2 из [1].

Лемма 2. (Ито) Пусть $N \triangleleft G$ и N –абелева. Тогда $\chi(1) \mid |G : N|$, для всех $\chi \in \text{Irr}(G)$.

Доказательство. См. теорему 6.15 из [1].

Лемма 3. Пусть $G = G'$ – группа с силовой p –подгруппой P порядка $p > 3$ и $H = O_{p'}(G)$, причем число силовских p –подгрупп группы G равно $1 + pr$. Тогда верно одно из следующих утверждений:

- (i) $G/H \simeq L_2(r)$, где либо $r = p$, либо $r = 2^a = p - 1$;
- (ii) $n \geq (p + 3)/2$.

Доказательство. См. теорему 5.1, глава VIII из [8].

Лемма 4. Пусть $G = G'$ – не p –разрешимая группа с силовой p –подгруппой P порядка $p > 3$, не имеющая нормальных подгрупп порядка 2. Если $|G| < p^3$, то $G \simeq L_2(r)$, где $r = p$ или $r = 2^a = p - 1$.

Доказательство. См. следствие 5.2, глава VIII из [8].

Лемма 5. (Брауэр и Туан). Пусть G – простая группа порядка $pq^b t$, где p, q – простые числа, b, t – натуральные числа и $t < p - 1$. Тогда $G \simeq L_2(r)$, где $q = 2$ и либо $r = p = 2^a \pm 1$, либо $r = 2^a = p - 1$.

Доказательство. См. теорему 5.4, глава VIII из [8].

Лемма 6. *Степени неприводимых характеров группы $PGL_2(q)$, где q нечетно, $q > 3$ и группы $L_2(q)$, $q = 2^a$, $a > 1$, состоят из чисел $1, q, q - 1, q + 1$.*

Доказательство. См. [10] и [9], с. 260.

Лемма 7. *Пусть G – конечная простая группа. Если силовская 2-подгруппа группы G абелева, то G изоморфна $L_2(q)$, ${}^2G_2(q)$ или J_1 . Если силовская 2-подгруппа группы G имеет нетривиальный циклический коммутант, то G изоморфна группе $L_2(q)$, $L_3(q)$, $U_3(q)$ (q нечетно), A_7 или M_{11} .*

Доказательство. Содержится в [11] и в [12].

Лемма 8. *Пусть P – силовская p -подгруппа группы G , имеет порядок p . Если подгруппа H группы G содержит $N_G(P)$, то $|G : H| \equiv 1 \pmod{p}$.*

Доказательство. Пусть $x \in G \setminus H$. Если $|H : H \cap H^x| \not\equiv 0 \pmod{p}$, то найдется силовская p -подгруппа P_1 группы H , содержащаяся в $H \cap H^x$. По теореме Силова $P_1 = P^h$ для некоторого $h \in H$. Так как $P_1 \subseteq H^x$, то $P_1^{x^{-1}} \subseteq H$. Отсюда $P_1^{x^{-1}} = P_1^{h_1}$ для подходящего $h_1 \in H$. Следовательно, $h_1x \in N_G(P) \leq H$ и $x \in H$ вопреки предположению. Значит, $|H : H \cap H^x| \equiv 0 \pmod{p}$ для любого $x \in G \setminus H$. Так как $G = \cup_{y \in G} HyH$, то $|G| = |H| + pk|H|$ для некоторого целого неотрицательного k , что и доказывает лемму.

Лемма 9. *Пусть G – $LC(\Theta)$ -группа и M – ее собственная нормальная подгруппа. Тогда характер Θ_M приводим.*

Доказательство. Допустим, что M нормальная в G и Θ_M неприводим. Тогда $\Theta(1)^2 \leq |M| - 1 < |M|$. Однако $2\Theta(1)^2 \geq |G| \geq 2|M|$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть G – $LC(\Theta)$ -группа и N – ее собственная нормальная подгруппа. Если $\Theta(1) = m$, то $(|G/N|, m) \neq 1$.*

Доказательство. Допустим, что N нормальная в G . По лемме 9 характер Θ_N приводим. Согласно лемме 1, $\Theta_N = e \sum_{i=1}^s \phi_i$, где ϕ_i – неприводимые характеры группы N , сопряженные с характером ϕ_1 , а e и s делят $|G/N|$. Поэтому $m = \Theta(1) = es\phi_1(1)$. Если $(|G/N|, m) = 1$, то $\Theta_N = \phi_1 \in Irr(N)$. Однако $\Theta(1)^2 < |N| \leq |G|/2$, противоречие. Следовательно, $(|G/N|, m) \neq 1$. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1

Согласно теореме классификации конечных простых неабелевых групп (см. [13] для более подробной информации), все простые неабелевы группы принадлежат одному из следующих семейств:

I. Классические простые группы лиева типа: $L_n(q)$, $n \geq 2$, $U_n(q)$, $n \geq 3$, $S_{2n}(q)$, $n \geq 2$, $P\Omega_{2n+1}(q)$, $n \geq 2$, $P\Omega_{2n}^\pm(q)$, $n \geq 4$.

II. Исключительные простые группы лиева типа: $G_2(q)$, $F_4(q)$, $E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$, ${}^2G_3(q)$, $({}^2F_4(q))'$, ${}^3D_4(q)$, ${}^2B_2(q)$, q – степень простого числа.

III. Спорадические простые группы.

IV. Знакопеременные группы $A_n, n \geq 7$.

Доказательство будем проводить шаг за шагом для всех перечисленных групп.

I. Классические простые группы лиева типа.

(а) Пусть $G \simeq L_n(q), n \geq 3$. Легко видеть, что $|G| > q^{n^2-n}$, а наибольший простой делитель порядка группы не превосходит $q^n - 1 < q^n$. Допустим, что $2p^4 > q^{n^2-n}$. Тогда $2q^{4n} > q^{n^2-n}$ и потому $n^2 - 5n < 1$. Отсюда $n \leq 5$. При $n = 5$ имеем более точную оценку $|G| > q^{21} \geq 2q^{20}$. Поэтому $n \leq 4$. При $n = 4$ имеем:

$$|G| = 1/dq^6(q^4 - 1)(q^3 - 1)(q^2 - 1), \text{ где } d = (4, q - 1)$$

Теперь наибольший простой делитель порядка группы не превосходит $q^2 + q + 1 < 2q^2$. Если $2p^4 \geq |G| > q^{13}$, то $2(2q^2)^4 > q^{13}$, что исключает этот случай.

(б) Пусть $G \simeq U_n(q), n \geq 3$. Легко видеть, что $|G| > q^{n^2-n}$, а наибольший простой делитель порядка группы не превосходит q^n . Допустим, что $2p^4 > q^{n^2-n}$. Тогда $2q^{4n} > q^{n^2-n}$ и потому $n^2 - 5n < 1$. Отсюда $n \leq 5$. При $n = 5$ имеем более точную оценку $|G| > q^{21} \geq 2q^{20}$. Поэтому $n \leq 4$. При $n = 4$ имеем:

$$|G| = 1/dq^6(q^4 - 1)(q^3 + 1)(q^2 - 1), \text{ где } d = (4, q + 1)$$

Теперь наибольший простой делитель порядка группы (при $q > 2$) не превосходит $q^2 - q + 1 < 2q^2$. Если $2p^4 \geq |G| > q^{13}$, то $2(2q^2)^4 > q^{13}$, что исключает этот случай. Случай $q = 2$ также невозможен.

(с) Пусть $G \simeq S_{2n}(q)$ или $P\Omega_{2n+1}(q), n \geq 2$. Порядок G равен $1/dq^{n^2}(q^{2n} - 1) \dots (q^2 - 1)$, где $d = (2, q - 1)$. Если $n \geq 2$, то $|G| > q^{2n^2}$. Наибольший простой делитель порядка G не превосходит $q^n + 1$. Легко видеть, что $2(q^n + 1)^4 < q^{4n+3} < q^{2n^2}$ для $(q, n) \neq (2, 2)$. При $(q, n) = (2, 2)$ группа $G \simeq S_4(2)$ не проста и $S_4(2)' \simeq L_2(9)$.

(д) Пусть $G \simeq P\Omega_{2n}^\pm(q), n \geq 4$. Легко видеть, что $|G| > q^{2n^2-2n}$, а наибольший простой делитель ее порядка не превосходит $q^n + 1$. Так как $2(q^n + 1)^4 < q^{4n+3}$ при $n \geq 4$, то $2p^4 < |G|$.

I. Исключительные простые группы лиева типа.

(а) Пусть $G \simeq G_2(q)$. Порядок G равен $q^6(q^6 - 1)(q^2 - 1)$, так что наибольший простой делитель его не превосходит $q^2 + q + 1 < 2q^2$. Так как $|G| > q^{13}$, то этот случай исключен.

(б) Пусть $G \simeq F_4(q)$ порядка $q^{24}(q^{12} - 1)(q^8 - 1)(q^6 - 1)(q^2 - 1)$. Наибольший простой делитель порядка G не превосходит $q^4 + 1$. Так как $|G| > 2(q^4 + 1)^4$, то этот случай исключен.

(с) Пусть G — одна из групп $E_6(q), E_7(q), E_8(q)$ или ${}^2E_6(q)$. Порядок любой из этих групп больше q^{72} , а наибольший простой делитель порядка не превосходит q^9 . Так что эти группы также исключены.

(д) Пусть $G \simeq {}^2G_2(q)$. Порядок этой группы равен $q^3(q^3 + 1)(q - 1) > q^6$. При этом $q = 3^{2n+1}$, а наибольший простой делитель p порядка группы не превосходит $q + \sqrt{3}q + 1 < 2q$. Если $q > 3$, то $|G| > 2p^4$. Если же $q = 3$, то $G \simeq L_2(8).3$ — не простая группа.

(е) Пусть $G \simeq ({}^2F_4(q))'$. Ее порядок больше, чем $2q^{16}$, тогда как наибольший простой делитель p порядка группы не превосходит $q^4 - q^2 + 1$. Этот случай исключен.

Пусть $G \simeq {}^3D_4(q)$ порядка $q^{12}(q^8 + q^4 + 1)(q^6 - 1)(q^2 - 1) > q^{26}$, тогда как наибольший простой делитель p не превосходит $q^4 + q^2 + 1 < 2q^5$. Поэтому и этот случай исключен.

Пусть $G \simeq^2 B_2(q) \simeq Sz(q)$, где $q = 2^{2n+1}$. Наибольший простой делитель p порядка G не превосходит $q + \sqrt{2q} + 1$, так что $|G| > 2p^4$ при $q > 8$. Случай $q > 8$ исключен.

III. Спорадические простые группы. Все случаи рассматриваются с помощью [14]. Единственные возможности для p соответствуют группе Матье M_{11} и группе Янко J_1 .

IV. Знакопеременные группы $A_n, n \geq 7$.

Случай $5 \leq n \leq 6$ соответствуют группам $L_2(5)$ и $L_2(9)$. При $n = 7$ появляется группа A_7 , где $p = 7$. Все остальные возможности исключены.

Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Напомним, что G – $LC(\Theta)$ -группа с $\Theta(1) = pq$, где p и q различные простые числа и $p > q$. Зафиксируем данные обозначения, которые будут употребляться на протяжении оставшейся части работы.

В силу равенства $\sum_{\chi \in Irr(G)} \chi(1)^2 = |G|$ и $2\chi(1)^2 \geq |G|$ характер Θ является единственным неприводимым характером группы G наибольшей степени. Поэтому все сопряженные с ним под действием группы Галуа расширения $\mathbb{Q}(\Theta)$ поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с помощью присоединения к нему элементов $\Theta(g)$ для всех $g \in G$, совпадают с Θ . Отсюда все значения $\Theta(g)$, $g \in G$ являются целыми рациональными числами. В частности, $\overline{\Theta(g)} = \Theta(g)$ для всякого $g \in G$. В любом случае Θ является точным характером.

В [15] авторами доказано, что любой неприводимый характер $LC(\Theta)$ -группы является конституентой характера $\Phi = \Theta^2$. Отметим, что $Z(G) = 1$ и Θ – точный характер.

Так как, $|G| \leq 2p^2q^2$, где p и q – различные простые числа и $p > q$, причем $p^2q^2 < |G| \leq 2p^2q^2 < 2p^4$, а поскольку $pq \mid |G|$, то $|G| = p^a q^b m$, $a, b, m \in \mathbb{N}$ т.е. $p^2q^2 < p^a q^b m \leq 2p^2q^2 < 2p^4$. И так как $p > 2$, то p^4 не делит $|G|$. Отсюда, $a \leq 3$, т.е. силовская p -подгруппа группы G имеет порядок не больше p^3 . Допустим, что $P \in Syl_p(G)$.

Начнем со случая, когда порядок силовской подгруппы равен p^3 , т.е. $a = 3$.

Лемма 11. Пусть G – $LC(\Theta)$ -группа и силовская p -подгруппа P имеет порядок p^3 . Тогда $p = 3$, $q = 2$ и $|G| = 54$.

Доказательство. Так как $|P| = p^3$, то $|N_G(P)| = p^3 n$, при $n \in \mathbb{N}$ и $|G| = p^3 n(1 + kp) \leq 2p^2q^2$, k – целое неотрицательное, откуда $pn(1 + kp) \leq 2q^2$.

При $k \neq 0$: $n(1 + kp) < 2q$. Если $n \geq 2$, то $1 + kp < q$, что неверно. Значит, $n = 1$.

Пусть $k \geq 1$. $|G| = p^3(1 + kp) \leq 2p^2q^2$, причем q делит $1 + kp$. Очевидно, что $k = 1$ и q делит $p + 1$, причем $q < p$. При этом $q \leq \frac{p+1}{2}$. Значит, $p(1 + p) \leq 2\frac{(p+1)^2}{4}$, что неверно, поэтому $k = 0$ и $P \triangleleft G$. При этом $|G| = p^3 q m \leq 2p^2q^2$, так, что $pm \leq 2q$. Так как $p > q$, то $m = 1$ и $p \leq 2q$.

Итак, $|G| = p^3 q$ и $P \triangleleft G$. Если P абелева, то по лемме 2 степень характера $\chi(1)$ делит q для любого $\chi \in Irr(G)$. Противоречие.

Отсюда P неабелева и $P/\Phi(P)$ – элементарная абелева, $|P/\Phi(P)| = p^2$. Следовательно, $N_G(P)/P \leq Aut(P/\Phi(P)) \leq GL_2(p)$ и q делит $p \pm 1$.

Если q делит $p - 1$, то $q \leq \frac{p-1}{2}$, а тогда $p \leq \frac{2(p-1)}{2}$, что невозможно, либо $q = p - 1 = 2$, а тогда $p \leq 2q = 4$. Значит, $p = 3, q = 2$ и $|G| = 3^3 \cdot 2 = 54$.

Пусть $q = \frac{p+1}{2}$. Тогда либо $q = 2, p = 3, |G| = 54$, либо $q = \frac{p+1}{2}$ нечетное простое число. В последнем случае $G/\Phi(P)$ -группа Фробениуса порядка $p^2 \frac{p+1}{2}$.

Так как в этом случае $Z(P) = \Phi(P)$ содержится в центре группы G , то получаем противоречие.

То есть $|P| = p^3$ возможно лишь при $p = 3, q = 2$ и $|G| = 54 = 3^3 \cdot 2$. Лемма доказана.

Все случаи при $a = 2$, т.е. когда силовская подгруппа имеет порядок p^2 , сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 12. Если G — $LC(\Theta)$ -группа, то $|G| \not\equiv 0 \pmod{p^2}$ или $|G| = 72$ либо $|G| = 54$.

Доказательство. Случай, когда порядок силовской p -подгруппы равен p^3 , рассмотрен в лемме 11. Пусть силовская p -подгруппа $LC(\Theta)$ -группы G имеет порядок p^2 и $\Theta(1) = pq$. Тогда $|G| = p^2 q m \leq 2p^2 q^2$, откуда $m \leq 2q < 2p$. В свою очередь силовская q -подгруппа группы G либо имеет порядок $\leq q$, либо $q = 2$ и $|G| \leq 8p^2$, либо $|G| = p^2 q^2$ или $2p^2 q^2$.

Возможны подслучаи:

(1) $|G| \leq 8p^2$ и $\Theta(1) = 2p, q = 2$: Учитывая, что силовская p -подгруппа P группы G абелева, а пересечение любых двух силовских подгрупп нетривиально, имеем $O_p(G) > 1$. Если силовская p -подгруппа группы G нормальна, то степени любого неприводимого характера не делятся на p (следствие Ито 12.34 в [1]). Но тогда $n(1 + kp) \leq 8$, где $n = |N_G(P) : P| > 1$ (теорема Бернсайда 7.1.1. в [16]). Значит, $1 + kp \leq 4$ и $kp \leq 3$, откуда $p = 3, k = 1$. В таком случае $|G| = 72$.

(2) $|G| = 2p^2 q^2, (2, pq) = 1$: Если $|G : N_G(P)| \equiv 1 \pmod{p}$, то $|G : N_G(P)| = 2q$ и $|N_G(P)| = p^2 q$. Так как $1 + 2p > 2q$, то $1 + p = 2q$, т.е., $q = \frac{p+1}{2}$.

С другой стороны, $O_p(G) \neq 1$, ибо любые p -силовские подгруппы абелевы и имеют нетривиальное пересечение. Значит, $O_p(G) \cong C_p$ -циклическая порядка p . Из неабелевости $N_G(P)$ следует, что q делит $p - 1$. Отсюда $q = 2$, а это случай (1).

(3) $|G| = p^2 q^2$: Пусть $P \in Syl_p(G), Q \in Syl_q(G)$. Если $N_G(P) = P$, то G — p -нильпотентна и $G = Q \rtimes P$. По лемме 2 степень характера $\chi(1) | p^2$, что неверно.

Если $N_G(P) = G$, то $G = P \rtimes Q$ и $\chi(1) | q^2$ для любого неприводимого χ , противоречие. Значит, $|N_G(P)| = p^2 q$ и $|G : N_G(P)| = q \not\equiv 1 \pmod{p}$. Таким образом, случай (3) невозможен.

(4) $|G| = p^2 q m$, где $(m, pq) = 1$: Тогда $m \leq 2q$. В то же время $|N_G(P)| = np^2$, где q делит $n(1 + kp) = qm$. Если q делит n , то $1 + kp \leq m$, что невозможно при $k > 1$. Значит, $k = 1$ и $n = q$. А тогда $m = 1 + p \leq 2q$. Как и в случае (3) q делит $p - 1$. Если $q \leq \frac{p-1}{2}$, то $2\frac{p-1}{2} \geq 2q > m = 1 + p$ и $p - 1 = q$, так, что $q = 2, p = 3$. Отсюда $|G| = 9 \cdot 2 \cdot 4 = 72$, а это случай (1).

Теперь q делит $1 + kp$ и $(n, q) = 1$. Так как $O_p(G) \cong C_p = \langle x \rangle$, то $|G : C_G(x)|$ делит $|Aut(C_p)| = p - 1$.

По лемме 1 имеем $\Theta|_{C_G(x)} = e \sum_{i=1}^s \varphi_i$, где $\varphi_i \in Irr(C_G(x))$ и поэтому $\Theta(1) = pq = e\varphi_i(1)s$.

Так как $P \leq C_G(\langle x \rangle)$, $C_G(\langle x \rangle) \triangleleft G$, то по аргументу Фраттини $G = C_G(x)N_G(P)$. Поэтому $\frac{|C_G(x)||N_G(P)|}{|C_G(x) \cap N_G(P)|} = |G|$ и $|G : N_G(P)| = 1 + kp = |C_G(x) : C_G(x) \cap N_G(P)|$.

Поэтому q делит $|C_G(x) : C_G(x) \cap N_G(P)|$ и не делит $|N_G(P)|$. Но тогда q не делит $|G : C_G(x)|$. По лемме 1 имеет место разложение $\Theta_H = c \sum_{i=1}^s \varphi_i$, где φ_i – неприводимые сопряженные с $\varphi = \varphi_1$ характеры группы H и $c = \langle \Theta_H, \varphi_i \rangle$.

При этом s делит $|G : C_G(x)|p - 1$ и c делит $p - 1$.

Отсюда $pq = cs\varphi(1)$. Так как p не делит cs и q не делит cs , то $pq = \varphi(1)$ и $cs = 1$, т.е. $\varphi|_{C(x)}$ неприводимый характер группы $C_G(x)$. В этом случае, $|\Theta(x)| = pq$ противоречие. Лемма доказана.

Далее будем считать, что $a = 1$, т.е. $|G| = pq^b m$, где m взаимно просто с pq .

Лемма 13. Пусть G – простая $LC(\Theta)$ -группа порядка $|G| = pq^b m$, где $p > q$, $(m, pq) = 1$. Тогда $b \leq 2$ и $q > 2$.

Доказательство. Так как $\Theta(1) = pq$ и $|G| = pq^b m \leq 2\Theta(1)^2$, то при $b \geq 3$ получим $m < 2p/(q^{b-2}) < p - 1$, когда $q > 2$ или $b \geq 4$. Если же $q = 2$ и $b \leq 3$, то силовская 2-подгруппа группы G имеет порядок не более 8 и потому либо абелева, либо диэдральна. По лемме 7 группа G изоморфна одной из следующих групп: $L_2(q)$, ${}^2G_2(q)$, J_1 , A_7 . Остальные группы из списка этой леммы имеют силовскую 2-подгруппу порядка не меньше 16. Используя леммы 5, 6, порядки групп ${}^2G_2(q)$ и таблицы характеров групп J_1 и A_7 из [9], получаем противоречие. Поэтому $b \leq 2$ и $q > 2$. Лемма доказана.

Лемма 14. Пусть G – $LC(\Theta)$ -группа порядка $|G| = pq^b m$, где $p > q$, $(m, pq) = 1$. Если $|G| < p^3$, то $G \neq G'$.

Доказательство. Допустим, что $G = G'$. Так как G является $LC(\Theta)$ -группой, то $Z(G) = 1$. В частности, G не имеет нормальных подгрупп порядка 2. По следствию VIII (5.2) из [8] группа G изоморфна $L_2(r)$, где $q = 2$, $r = p$ или $r = p - 1 = 2^a$, а эта группа не является $LC(\Theta)$ -группой. Лемма доказана.

Лемма 15. Пусть G – не p -разрешимая $LC(\Theta)$ -группа порядка $|G| = pq^b m$, где $p > q$, $(m, pq) = 1$. Тогда $|G| > p^3$.

Доказательство. Из леммы 14 известно, что $G \neq G'$. Предположим, что $H = O_{p'}(G)$ и G не p -разрешимая группа. Пусть M/H – минимальная нормальная подгруппа группы G/H . Тогда M/H не p -разрешимая и совпадает своим коммутантом. Так как силовская p -подгруппа группы G порядка p , то M/H – простая неабелева группа. По лемме 4 имеем $M/H \simeq L_2(r)$, где либо $r = p$, либо $r = p - 1 = 2^a$. Допустим, что $M/H \simeq L_2(p)$. Тогда $G/M \simeq L_2(p)$ или $PG L_2(p)$. При $p > 3$ и $|H| \geq 3$ порядок G больше p^3 . Тем самым, эта возможность исключена. Если $M/H \simeq L_2(p - 1)$, то $|M/H| = p(p - 1)(p - 2) = p^3 - 3p^2 + 2p > 1/2p^3$ при $p \geq 7$ и $|G| > p^3$ для G , не являющейся простой группой. Если $p = 5$, то $|G/M||H| < 125/60$ только при $|H| = 2$, что уже было исключено выше, либо $G \simeq \text{Aut}(L_2(5)) \simeq S_5$. Таблица характеров в [9] исключает и эту возможность. Поэтому $|G| > p^3$. Лемма доказана.

Лемма 16. Пусть G – не p -разрешимая $LC(\Theta)$ -группа порядка $|G| = pq^b m$, где $p > q$, $(m, pq) = 1$. Тогда $b \leq 2$.

Доказательство. В силу леммы 15 и условий, наложенных на группу G , имеем:

$$p^3 < |G| = pq^b m \leq 2p^2 q^2,$$

откуда $p < 2q^2, q^{b-2} \leq 2p/m$ и $q^{b-4} < 4/m$. При $m = 1$ или 2 и $b \geq 3$ группа G разрешима. Поэтому $m \geq 3$, откуда $b \leq 4$.

При $b = 4$ имеем $m < 4$. Следовательно, $m = 3$. Очевидно, $m < p - 1$ и по лемме 5 группа G имеет композиционный фактор, изоморфный $L_2(p)$ или $L_2(p - 1)$, где $p = 2^a + 1$. При этом $q = 2$. Отсюда, учитывая, что $m = 3$, имеем: $p = 5$ или $p = 7$. В первом случае $|G| < 200$, а во втором — $|G| < 392$. Так как центр группы G тривиален, то она изоморфна $PGL_2(s)$, где $s \in \{5, 7\}$. По лемме 6 получаем противоречие.

Предположим, что $b = 3$. Тогда $q \leq 2p/m$. Если $q \geq 3$, то $m < p - 1$. По лемме 5 у группы имеется композиционный фактор M/N , изоморфный группе $L_2(p)$ или $L_2(p - 1)$, где $p - 1 = 2^a$ для некоторого натурального числа $a \geq 2$. В обоих случаях $N = O_{p'}(G)$, а G/M изоморфна подгруппе $Out(M/N)$. Допустим, что $M/N \simeq L_2(p)$. Если q делит $p - 1/2$, то и q^3 делит $p - 1/2$. Но тогда $m \geq p + 1$, что неверно. Если q делит $p + 1$, то q^3 делит $(p + 1)/2$, откуда $m = p - 1$ что также неверно. Пусть $M/N \simeq L_2(p - 1)$, где $p = 2^a + 1$. Так как q по предположению, нечетно, то q^3 делит $p - 2 = 2^a - 1$, откуда $m = 2^a = p - 1$, что приводит к противоречию.

Пусть теперь $b = 3, q = 2$. Тогда силовская 2-подгруппа группы G либо абелева, либо неабелева порядка 8. В силу леммы 7 группа G имеет композиционный фактор, изоморфный $L_2(r), A_7, {}^2G_2(q)$ или J_1 . При этом $p < 2q^2 = 8$, а $m \leq p$. Поэтому, учитывая, что $(m, qp) = 1$, имеем либо $p = 5, m = 3$, либо $p = 7, m = 3$ или $m = 5$. Так как во всех случаях оказывается, что m — простое число, то $G = M$ — простая неабелева группа, $N = 1$. По лемме 5 группа G изоморфна $L_2(5)$ или $L_2(7)$. В обоих случаях $|G| < p^3$. По лемме 15 получили противоречие. Стало быть, $b \leq 2$. Лемма доказана.

Лемма 17. Пусть G — не p -разрешимая $LC(\Theta)$ -группа порядка $|G| = pq^b m$, где $p > q, (m, pq) = 1$. Тогда либо $b = 1$, G либо — простая группа порядка $pq^2 m$.

Доказательство. Предположим, что $b = 2$. В этом случае (ввиду лемм 15 и 16) имеем:

$$p^3 < |G| = pq^2 m \leq 2p^2 q^2.$$

Отсюда $2p \geq m, p < 2q^2$. Пусть группа G имеет неабелев композиционный фактор M/N . Понятно, что $|M/N| = pq^\lambda m_0$, где $\lambda \leq 2, m_0$ делит m . Если $\lambda = 0$, то силовская p -подгруппа группы M/N нормальна, что неверно. Значит, $\lambda \geq 1$.

При $m_0 < p - 1$, по лемме 5, группа M/N имеет композиционный фактор, изоморфный $L_2(p)$ или $L_2(p - 1), p = 2^a + 1$ и $N = O_{p'}(G)$. В обоих случаях $q = 2$. Так как $q = 2$, то $p < 8$ и G имеет абелеву силовскую 2-подгруппу (порядка 4). Отсюда $p = 5, q = 2, m_0 = 3$. Так что $M/N \simeq L_2(5)$. Следовательно, $|G/M||N| = m/m_0 < 4$. Так как G не имеет нормальных подгрупп порядка 2 и $|G| = pq^2 m < 80$, то $G \simeq L_2(5)$, что неверно.

Таким образом, $m_0 \geq p - 1$ и $m/m_0 \leq 2$. Кроме того, $|G/M||N|$ делит $2q^{2-\lambda}$. Если $\lambda = 2$, то $N = 1$, ибо G не имеет нормальных подгрупп порядка 2. Если $m = m_0$, то $|N|$ делит q и $|G/C_G(N)| = 1$ и в этом случае $N = 1$. Если же $|N| = 2q$, то G изоморфна прямому произведению неабелевой группы порядка $2q$ и простой неабелевой группы G_1 . Легко убедиться, что группа G_1 имеет неприводимый характер

степени pq . Ввиду теоремы 1 из [15] характер Θ^2 должен содержать любой характер диэдральной группы порядка $2q$, что, очевидно, неверно.

Следовательно, в любом случае $N = 1$ и M – простая неабелева группа, причем $|G : M|$ делит $2q$.

Предположим, что G не является простой группой. По лемме 9 характер Θ_M содержит неприводимый характер ϕ , для которого $pq = e\phi(1)$, где e и s делят $2q$ и $\phi(1) < pq$. Так как M – простая неабелева группа, то $\phi(1) > 1$. Поэтому $\phi(1) = p$. Более того, можно считать, что ϕ имеет q сопряженных характеров (см. теорему (6.2) из [1]). В частности, $|M| > p^2q$. Поэтому $|G/M| = q$. Кроме того, $|M| = pqt$.

Если $y \in C_M(P)$ – элемент порядка, взаимно простого с p , то $|G : C_M(y)|\phi(y)/\phi(1)$ целое алгебраическое число. По лемме Бернсайда (лемма 4.3.1 в [16]) либо $y \in Z(\phi) \leq S(M) = 1$, либо $\phi(y) = 0$. Допустим, что $y \neq 1$ и $\phi(y) = 0$. Тогда скалярное произведение $\langle \phi, 1_{\langle y \rangle} \rangle = |\langle y \rangle|^{-1}\phi(1)$ – целое рациональное число, что исключено. Поэтому $C_M(P) = P$.

По лемме 3 группа M либо изоморфна $L_2(r)$, где $r = p$ или $r = p - 1 = 2^a$, либо $|M : N_M(P)| = 1 + np$ с $n \geq (p + 3)/2$. Если $M \simeq L_2(r)$ для $r = p$, то $|Out(M)| = 2$, откуда $p \leq 8$. По лемме 6 получаем противоречие. Если, $M \simeq L_2(2^a)$ где $a = \log_2(p - 1)$, то $|Out(M)| = a$. В этом случае из $2q^2 > p$ следует, что $4\log_2(p) > p$. Поэтому $p \leq 17$. Так как q – нечетное простое число, то эта возможность исключена.

Таким образом, $|M : N_M(P)| = 1 + np$ где $n \geq (p + 3)/2$. Обозначим

$$|N_M(P) : C_M(P)| = |N_M(P) : P| = e.$$

Так как $|M| = pqt = ep(1 + np)$, то $e(1 + np) = tq \leq 2pq$. Следовательно, $e < 2q/n < 4$. Так как M не является p -нильпотентной, то $e > 1$. Поэтому $e = 2$ или 3.

Элемент $u \in G \setminus M$ порядка q индуцирует автоморфизм группы M , нормализующий подгруппу $N_M(P)$. Если q не делит $(p - 1)/e$, то $C_G(u)$ имеет порядок, делящийся на epq^2 . Отсюда $|G : C_G(u)| = tpq^2/epq^2 \leq t/2 \leq p$. По лемме 8 имеем $|G : C_G(u)| \equiv 1 \pmod{p}$, что неверно.

Поэтому q делит $(p - 1)/e$. Отсюда из $e(1 + np) = tq \leq 2pq \leq 2p(p - 1)/e$ получаем: $n \leq 2(p - 1)/e^2 \leq (p - 1)/2$. Так как $n \geq (p + 3)/2$, получили противоречие.

Следовательно, либо $b = 1$, либо G – простая группа порядка pq^2t . Лемма доказана.

Лемма 18. Пусть G – не p -разрешимая $LC(\Theta)$ -группа порядка $|G| = pq^bt$, где $p > q$, $(t, pq) = 1$. Тогда G – не простая группа.

Доказательство. По теореме 1 группа G изоморфна одной из групп в ее заключении. При этом группы $L_2(q)$, $L_3(q)$, $U_3(q)$ не являются простыми $LC(\Theta)$ -группами (их таблицы характеров имеются в [9]). Таблицы характеров групп A_7 , M_{11} , $Sz(8)$ и J_1 содержатся в Приложении 1 книги [9]. Ни одна из перечисленных групп не является $LC(\Theta)$ -группой при любом выборе неприводимого характера Θ . Лемма доказана.

Лемма 19. Пусть G – не p -разрешимая $LC(\Theta)$ -группа. Тогда $\tilde{G}$, главный не p -разрешимый фактор группы G , изоморфен $L_2(r)$ для натурального числа r , являющегося степенью простого числа s .

Доказательство. Пусть $\tilde{G}$ – главный не p -разрешимый фактор группы G . В силу лемм 17 и 18 порядок G равен pqt , причем $m < 2pq$ и $p < 2q^2$. По теореме 1 $\tilde{G}$ изоморфна одной из следующих групп: $Sz(8)$, $p = 13$, A_7 , $p = 7$, M_{11} , $p = 11$, J_1 , $p = 19$, $L_2(r)$, $L_3(r)$, $p = r^2 + r + 1$ или $U_3(r)$, $p = r^2 - r + 1$.

Допустим, что $\tilde{G} \simeq Sz(8)$, $p = 13$. Если $q = 7$, то $\Theta(1) = 7 \cdot 13 = 91$ и $2 \cdot 91^2 < |\tilde{G}|$, что исключает эту возможность.

Пусть $\tilde{G} \simeq A_7$. Тогда $pq = 35$ и $|\tilde{G}| > 2 \cdot 35^2$, что исключает эту возможность.

Пусть $\tilde{G} \simeq M_{11}$, $p = 11$, $q = 5$. Так как $|\tilde{G}| > 2 \cdot 55^2$, то эта возможность исключена.

Пусть $\tilde{G} \simeq J_1$, $p = 19$, $q = 11$. Так как $|\tilde{G}| > 2 \cdot 209^2$, то эта возможность исключена.

Во всех рассмотренных выше примерах легко убедиться, что $pq \nmid |\tilde{G}|$.

Допустим, что $\tilde{G} \simeq U_3(r)$. Наибольший простой делитель p числа $|\tilde{G}|$ не превосходит $r^2 - r + 1$. Если q не делит $|\tilde{G}|$, то $|\tilde{G}| = pm'$, где $m' < m < 2p^2$, а $|\tilde{G}| < 2p^3$, что исключено. Поэтому $pq \mid |\tilde{G}|$. Так как наибольший простой делитель порядка группы $\tilde{G}$, меньший p , не превосходит $r + 1$, то $pq < r^3 + 1$. Однако этот случай невозможен.

Допустим, что $\tilde{G} \simeq L_3(r)$. Наибольший простой делитель p числа $|\tilde{G}|$ не превосходит $r^2 + r + 1$. Если q не делит $|\tilde{G}|$, то $|\tilde{G}| = pm'$, где $m' < m < 2p^2$, а тогда $|\tilde{G}| < 2p^3$, что исключено. Поэтому $pq \mid |\tilde{G}|$. Так как наибольший простой делитель порядка группы $\tilde{G}$, меньший p , не превосходит $r + 1 < 2(r - 1)$, то $pq < 2(r^3 - 1)$. Однако и этот случай невозможен.

Таким образом, можно считать, что $G \simeq L_2(r)$. Лемма доказана.

Перейдем к завершению доказательства теоремы 2. По лемме 18 главный не p -разрешимый фактор группы G изоморфен $L_2(r)$, где r – степень простого числа s . В силу лемм 17 и 18 порядок G равен pqt , причем $m < 2pq$ и $p < 2q^2$. Наибольший простой делитель порядка $\tilde{G}$ не превосходит $r + 1$.

Предположим, что q не делит $|\tilde{G}|$. Так как $m < 2p^2$, то $|\tilde{G}| = pm'$, где $m' \mid m < 2p^2 < 2(r + 1)^2$. Порядок группы $\tilde{G}$ равен $\lambda r(r^2 - 1)$, где $\lambda = 1$ для четного r и $\lambda = 1/2$ для нечетного r . Отсюда $m' \geq \lambda r(r - 1)$. Таким образом,

$$\frac{m}{m'} \leq \frac{2(r+1)^2}{\lambda r(r-1)} \leq \frac{4(r^2+2r+1)}{r^2-r} < 7$$

при $r \geq 7$. Поэтому $|G| \leq 7q|\tilde{G}|$. Так как $G/O_{p'}(G)$ изоморфна подгруппе группы $Aut(\tilde{G})$, содержащей $\tilde{G}$, то наибольший простой делитель числа $|Out(\tilde{G})|$ не превосходит $\log_s r$. Однако в этом случае $q \leq \log_s r$. Так как $p < 2q^2$ и $m < 2pq$, то $|G| < 4q^6 \leq 4(\log_s r)^6$, а $|\tilde{G}| = \lambda r(r^2 - 1) = pm' < 2(\log_s r)^5$. Очевидно, $g \geq 5$, так что $r = s^t$, где $t \geq 5$. Однако $r = s^t > 2t^2$ для любых допустимых значений $r = s^t$. Поэтому q не делит $|Out(\tilde{G})|$. Ввиду леммы 10 получаем, что $G/O_{p'}(G) \simeq \tilde{G}$. Так как q не делит $|\tilde{G}|$, то $|O_{p'}(G)| = m/m'q \leq 7q$. Если $q = m/m'$, то $|G/O_{p'}(G)|$ не делится на q и по лемме 2 группа G не может иметь характера, степень которого делится на q . Если $q > m/m'$, то G имеет характеристическую подгруппу порядка q и снова не может иметь характера степени, делящейся на q . Наконец, если $q < m/m'$, то группа $O_{p'}(G)$ централизуется G . Так как центр G тривиален, то G – прямое произведение группы $\tilde{G}$ и группы порядка $m/m'q$, где $q < m/m' \leq 7$, не имеющей абелевых нормальных подгрупп порядка q . В этом случае $q = 3$, противоречие.

Итак, $pq \mid |\tilde{G}|$. По лемме 10 группа $G/O_{p'}(G)$ изоморфна $\tilde{G}$ и $G = G'$. Напомним, что $\tilde{G} \simeq L_2(r)$. Если r нечетно, то наибольший простой делитель p порядка $\tilde{G}$ делит либо $(r \pm 1)/2$, либо равен r .

Пусть $p = r$. Так как $|\tilde{G}| = pqm_0$, где $m_0|m$, то $m_0 \geq (p-1)$. Поэтому $|O_{p'}(G)| = m/m_0 \leq \frac{p(p+1)}{p-1} < p+3$. Если P – силовская p -подгруппа группы G , то $|O_{p'}(G) : (C_G(P) \cap O_{p'}(G))| \leq 1+p$. Поэтому P имеет на $O_{p'}(G)$ только орбиту длины p и потому $|O_{p'}(G)| = p + |C_G(P) \cap O_{p'}(G)|$. Отсюда $|O_{p'}(G)| = 1+p$. Последнее возможно лишь при $p+1 = 2^a$ и $q \leq (p-1)/2$. Тогда $m_0 \geq p+1$ и $|O_{p'}(G)| < p$. Так как $C_G(O_{p'}(G)) \supseteq P$, то $G = C_G(O_{p'}(G))O_{p'}(G)$. Так как $G = G'$ и центр G тривиален, то получили противоречие.

Пусть теперь p делит $(r+1)/2$. Так как $q < p$, то $q \leq (r-1)/2$. Стало быть, $|\tilde{G}| = pqm_0$, где $m_0 \geq r$. Отсюда

$$\frac{m}{m_0} \leq \frac{r^2-1}{4r} \leq p \leq (r+1)/2$$

Поэтому $O_{p'}(G) \leq C_G(P)$. Отсюда $G = O_{p'}(G)C_G(O_{p'}(G))$. По лемме 10 имеем $Z(G) = 1$. Так как $G = G'$, то $G = \tilde{G}$ и по лемме 4 получаем противоречие.

Если $s = 2^a$, то $p \leq r+1$, $q \leq r-1$. Так как $|\tilde{G}| = pqm_0$, где $m_0 \geq r$, то $m/m_0 \leq (r^2-1)/r < r < p$, то $O_{p'}(G)$ централизует группу G , что приводит к противоречию. Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 3

В теореме 2 было установлено, что G является p -разрешимой группой и при $|G| \notin \{54, 72\}$ порядок G равен $pq^b m$, где $(pq, m) = 1$. По теореме 6.3.3 из [16] силовская p -подгруппа группы G содержится в $H = O_{p',p}(G)$. Поэтому $G = O_{p',p,p'}(G)$. Очевидно, что $H = K \rtimes P$, где $K = O_{p'}(G)$. Эти обозначения фиксируются до конца доказательства теоремы 3.

Лемма 20. Если $H \neq G$, то $|G : H| = q$ и $\Theta_H = \sum_{i=1}^q \phi_i$, где $\phi_i \in \text{Irr}(H)$ – сопряженные характеры группы H степени p .

Доказательство. Пусть $\phi \in \text{Irr}(H)$ – неприводимый характер группы H , входящий в разложение Θ_H и пусть $I_G(\phi)$ – его группа инерции. Согласно лемме 1,

$$\Theta_H = e \sum_{i=1}^s \phi_i,$$

где ϕ_i – неприводимые сопряженные с $\phi = \phi_1$ характеры группы H , e – натуральное число, делящее $|I_G(\phi_1) : H|$, а s делит $|G : I_G(\phi)|$. Из леммы 9 получаем, что Θ_H – приводимый характер, так что $s > 1$. Так как $pq = \Theta(1) = es\phi(1)$ и $|G : H|$ взаимно просто с p , то $e = 1$, $s = q$ и $\phi(1) = p$.

Из сказанного выше ясно, что индекс H в G делится на q . Предположим, что $|G : H| = aq$ для некоторого натурального числа a . Так как H имеет q сопряженных в G неприводимых характеров степени p , то

$$|H| \geq 1 + \sum_{i=1}^q \phi_i(1)^2 = p^2 q.$$

С другой стороны, $|H| = |G|/|G : H| \leq 2p^2 q^2 / (aq) = (2/a)p^2 q$. Поэтому $a = 1$ и $|G : H| = q$. Лемма доказана.

Лемма 21. Если $H \neq G$, то для любого неприводимого характера $\phi = \phi_i$ из разложения Θ_H существует p неприводимых характеров λ_j , сопряженных с характером $\lambda = \lambda_1$, таких, что $\phi_K = \sum_{j=1}^p \lambda_j$. Группа K абелева.

Доказательство. Пусть λ – неприводимый характер группы K , входящий в разложение характера ϕ_K , где $\phi = \phi_i$ – любой неприводимый характер группы H , определенный в лемме 20. Согласно лемме 1,

$$\phi_K = e' \sum_{i=1}^t \lambda_i,$$

где λ_i – характеры, сопряженные с λ , e' и t делят $|H : K| = p$. В частности,

$$p = \phi(1) = e't\lambda(1).$$

Если ϕ остается неприводимым при ограничении на K , то это же верно и для любого его сопряженного ϕ_j , а тогда порядок подгруппы K не меньше, чем $qp^2 + 1 \leq |G|/|G : K| \leq 2pq$, что противоречиво. Следовательно, $t = p$, $e' = 1$ и $\lambda_j(1) = 1$ для всех $j \leq p$. В частности, кег λ_j содержит коммутант группы K . Отсюда $\lambda_j(y) = 1$ для всех λ_j . Но тогда $\phi(y) = p$ для любого характера, сопряженного с ϕ_1 . Как результат, $\Theta(y) = pq$. Напомним, что Θ является точным характером. Поэтому $y = 1$ и $K' = 1$, что и требовалось доказать. Лемма доказана.

Заметим, что в случае $O^q(G) \neq G$ заключение леммы 21 остается в силе. Поэтому далее можно считать, что $H = O_{p'p}(G) = G$ и $G' = O_{p'}(G) = K$. Мы предполагаем далее, что $K = G'$. В силу леммы 1,

$$\Theta_K = v \sum_{i=1}^u \psi_i,$$

где ψ_i – характеры, сопряженные с ψ_1 , v и u делят $|G : K| = p$. В частности, $pq = \Theta(1) = v\psi(1)$. Так как u и v делят $|G : K| = p$, то либо $\Theta_K = \Theta$, либо Θ_K – приводимый характер. По лемме 9 характер Θ_K приводимый. Следовательно, $u = p$, $v = 1$. Таким образом, характер $\psi = \psi_1$ имеет степень q и имеется p характеров степени q группы K , сопряженных с ψ . Напомним, что группа G имеет порядок $pq^b t$, где $(pq, t) = 1$.

Лемма 22. Группа $G = K \rtimes P$ содержит подгруппу QP порядка $q^b p$, где P – силовская p -подгруппа группы G , а Q – силовская q -подгруппа G . Если $b \geq 3$, то $t < p$. В частности, K имеет нормальную $\{p, q\}$ -подгруппу, порядка, делящегося на p .

Доказательство. В самом деле, при $b \geq 3$ имеем $pq^b t < 2p^2 q^2$, то $t < 2pq^{2-b} \leq p$. Поэтому $t \leq p - 1$. Как сказано выше, группа $G = K \rtimes P$, где $|K| = q^b t$ и $(p, qt) = 1$. Так как P действует с помощью сопряжений на множестве силовских q -подгрупп группы K , а их число не делится на p , то имеется силовская q -подгруппа Q группы K , инвариантная относительно P . Таким образом, в G содержится подгруппа $L = QP$, имеющая индекс t в G . Пусть γ – гомоморфизм группы G в группу

правых смежных классов по L . Очевидно, ядро γ содержится в L и имеет порядок, делящийся на p . Поэтому группа G имеет нормальную подгруппу $M \subseteq L$, порядок которой делится на p . Лемма доказана.

Покажем, что порядок силовской q -подгруппы группы G не превосходит q^2 .

Лемма 23. $b \leq 2$.

Доказательство. Допустим, что $b \geq 3$. В силу доказанного леммы 22 группа G имеет нормальную подгруппу M , содержащуюся в $L = QP$, порядка, делящегося на p . Из теоремы Н. Ито (Лемма 2) следует, что $M \neq P$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $M = Q_1 \rtimes P$, где Q_1 – подгруппа группы Q , на которой P действует нетривиально. Допустим сначала, что $q > 2$. Так как $q < p$, то $|Q_1| = q^a$, $a \geq 2$, причем $q^a - 1 \geq 2p$. Следовательно, $|G/M| \leq 2p^2q^2/(p(2p+1)) < q^2$. Поэтому либо $m < q$, либо $b = a$ и $m < q^2$. Допустим, что $|G/M|$ делится на q . Так как $|G/M| < q^2$, то $|G/M| = mq$, где $m < q$. В силу теорем Силова имеем $Q \triangleleft G$. При этом имеется холлова подгруппа T порядка m , на которой P действует тривиально. Таким образом, $G = Q \rtimes (T \times P)$. Поэтому при $m > 1$ имеем $G' \neq K$. В силу леммы 21 получаем противоречие.

Предположим, что $q = 2$. Очевидно, в этом случае $a \geq 3$, причем $q^a - 1 \geq p$. Поэтому $|G/M| \leq 2p^2q^2/p(p+1) = 8p/(p+1) < 8$ и либо G/M имеет подгруппу индекса $q = 2$, что неверно по предположению, либо $|G : G'|$ не совпадает с p . Последнее также исключено.

Если $|G/M|$ не делится на q , то $M = L = G$, причем $m = 1$, $a = b$. Тогда существует минимальная ненильпотентная подгруппа S порядка $q^c p$, где $q^c \equiv 1 \pmod{p}$ и $c \leq b$ (см. доказательство теоремы в [17]). Так как $q^c - 1$ делится на $2p$, то $q^c \geq 2p$ и потому $b \leq c = 1$. Отсюда либо $b = c$ и G – минимальная ненильпотентная группа с абелевыми силовскими подгруппами, либо G имеет нормальную подгруппу индекса q . Применяя лемму 2, получаем противоречие. Таким образом, случай $b > 2$ невозможен. Лемма доказана.

Лемма 24. $|G| = mpq$, где $(m, pq) = 1$ и $m < 2pq$.

Доказательство. Допустим, что $b = 2$, т.е. силовская q -подгруппа Q группы G имеет порядок q^2 . В силу леммы 22 группа $G = K \rtimes P$, причем G содержит подгруппу $L = Q \rtimes P$, где P порядка p .

Пусть y – элемент группы Q и $h_y = |G : C_G(y)|$. Заметим, что группа $L = QP$ абелева. Действительно, в противном случае p делит порядок группы автоморфизмов Q . Так как последняя имеет порядок, делящий $q^2(q^2 - 1)(q - 1)$ и $p > q$, то p не делит $|Aut(Q)|$. Таким образом, h_y взаимно прост с $\Theta(1)$. Согласно лемме 4.3.1 в [16], либо $\Theta(y) = 0$, либо $\Theta(y) = \mu\Theta(1)$ для некоторого числа μ , являющегося корнем q -ой степени из единицы. Так как Θ – точный характер, то $\ker \Theta = 1$, а так как $Z(G) = 1$, то $\Theta(y) = 0$ для любого $y \in Q^\#$. Поэтому

$$\langle \Theta_Q, 1_Q \rangle = 1/|Q| \sum_{y \in Q} \Theta(y) = \frac{pq}{q^2} = p/q$$

– целое число. Противоречие. Поэтому q^2 не делит $|G|$. То есть $|G| = pqt$, где $(pq, t) = 1$. Так как $|G| \leq 2\Theta(1)^2 = 2p^2q^2$, то $t \leq 2pq$. Лемма доказана.

Лемма 25. Пусть ψ – неприводимый характер группы K степени q , входящий в разложение Θ_K . Тогда $\psi(y) = 0$ для любого q -элемента группы G . Группа K не является простой неабелевой группой и для $R \triangleleft K$ характер ψ_R приводим.

Доказательство. Так как $|K|$ не делится на q^2 , то характер ψ степени q содержится в q -блоке группы K дефекта 0. Поэтому $\psi(y) = 0$ для любого q -сингулярного элемента группы K . В частности, для элемента порядка q .

Допустим, что K – простая неабелева группа. Так как p делит $|Out(K)|$, то по лемме 8 из [18] получаем, что либо $K \simeq L_3(q), U_3(q)$ или $L_2(q)$, либо $|K| \geq p^6$. Так как $|K| = mq \leq 2pq^2 < p^4$ в любом из случаев, то K не может быть простой неабелевой группой.

Допустим, что R – наибольшая собственная нормальная подгруппа группы K . По лемме 1 имеем:

$$\psi_R = e \sum_{s=1}^d \lambda_s,$$

где d, e – натуральные числа, делящие $|K : R|$, и λ_s – неприводимые характеры группы R , сопряженные с $\lambda_1 = \lambda$. Отсюда $q = \psi(1) = ed\lambda(1)$. Если ψ_R неприводим для любого ψ , входящего в разложение Θ_K , то подгруппа R имеет p неприводимых характеров степени q . Но тогда ее порядок равен не меньше, чем q^2p , тогда как $|R| \leq |K|/(|K : R|) \leq pq^2$. Противоречие. Значит, $\psi_R = \sum_{s=1}^p \lambda_s$, где λ_s – линейные характеры. Лемма доказана.

Закончим доказательство теоремы 3. Из леммы 25 следует, что пересечение ядер характеров λ_s , входящих в разложение Θ_R , содержит коммутант R и потому тривиально. Поэтому подгруппа R группы G , имеющая индекс pq в G абелева, что и утверждалось. Теорема доказана.

5. Примеры

1. Пусть $p = 2^a - 1$ и $q = 2^b - 1$ – два различных простых числа Мерсенна. Тогда группа $G = M \times K$, являющаяся прямым произведением групп Фробениуса порядков $p(p+1)$ и $q(q+1)$ соответственно имеет неприводимый характер Θ с $\Theta(1) = pq$.

2. Пусть $p = 5$ и $q = 3$ и G – группа Фробениуса порядка $16 \cdot 15$. Она является $LC(\Theta)$ -группой.

3. Пусть $p = 2^a - 1$ – простое число Мерсенна, $q = 2$. Тогда группа $G = M \times K$, являющаяся прямым произведением групп Фробениуса порядков $(p+1)p$ и 6 является $LC(\Theta)$ -группой.

Список литературы / References

- [1] Isaacs I. M., *Character theory of finite groups*, Academic press, New York, San Francisco, London, 1976, 305 pp.
- [2] Казарин Л. С., Сагиров И. А., “О степенях неприводимых характеров конечных простых групп”, Тр. ИММ УрО РАН, **7**, 2001, 113–123; English transl.: Kazarin L. S., Sagirov I. A., “On the degrees of irreducible characters of finite simple groups”, *Proc. of the Steklov Inst. Math. Suppl. (Supplementary issues)*, 2001, suppl. 2, № 2, S71–S81.
- [3] Snyder N., “Groups with a character of large degree”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **136**, 2008, 1893–1903.
- [4] Berkovich Y., “Groups with few characters of small degree”, *J. Math.*, **110** (1999), 325–332.
- [5] Isaacs I. M., “Bounding the order of a group with a large degree character”, *J. Algebra*, **348**:1 (2011), 264–275.
- [6] Durfee C., Jensen S., “A bound on the order of a group having a large character degree”, *J. Algebra*, **338** (2011), 197–206.
- [7] Lewis M. L., “Bounding group order by large character degrees: A question of Snyder”, *Journal of Group Theory*, **17**:6 (2014), 1081–1116.
- [8] Feit W., *The representation theory of finite groups*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1982, 510 pp.
- [9] Белоногов В. А., *Представления и характеры в теории конечных групп*, УрО АН СССР, Свердловск, 1990; [Belonogov V. A., *Predstavleniya i haraktery v teorii konechnykh grupp*, UrO AN SSSR, Sverdlovsk, 1990 (in Russian)].
- [10] Bierbrauer J., “The uniformly 3-homogeneous subsets in $PGL(2, q)$ ”, *J. Algebraic Combinatorics*, **4** (1995), 99–102.
- [11] Walter J., “The characterization of finite groups with abelian Sylow 2-subgroups”, *Ann. Math.*, **8** (1969), 405–514.
- [12] Chabot P., “Groups whose Sylow 2-subgroups have cyclic commutator groups, II, III”, *J. Algebra*, **19**, **21**, **29** (1971, 1972, 1974), 21–30, 312–320, 455–458.
- [13] Gorenstein D., *Finite Simple Groups. An introduction to their classification*, Plenum Publishing Corporation, New York, 1982, 333 pp.
- [14] Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A., *Atlas of finite groups: maximal subgroups and ordinary characters for simple groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985, 255 pp.
- [15] Казарин Л. С., Поисеева С. С., “Конечные группы с большим неприводимым характером”, *Матем. заметки*, **98**:2 (2015), 237–246; English transl.: Kazarin L. S., Poiseeva S. S., “Finite groups with large irreducible character”, *Mathematical Notes*, **98**:2 (2015), 265–272.
- [16] Gorenstein D., *Finite Group*, Chelsea publishing company, New York, 1968, 522 pp.
- [17] Шмидт О. Ю., “Группы, все подгруппы которых специальные”, *Матем. сб.*, **31**:3–4 (1924), 366–372; English transl.: Schmidt O. Y., “Groups all whose subgroups are nilpotent”, *Mat. Sb.*, **31** (1924), 366–372.
- [18] Amberg B., Kazarin L. S., “ABA-groups with cyclic subgroup B”, Труды института математики и механики УрО РАН, **18**, 2012, 10–22.

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-4-483-499

On Finite Groups with an Irreducible Character Large Degree

Kazarin L. S.¹, Poiseeva S. S.

Received July 6, 2015

Let G be a finite nontrivial group with an irreducible complex character χ of degree $d = \chi(1)$. It is known from the orthogonality relation that the sum of the squares of degrees of irreducible characters of G is equal to the order of G . N. Snyder proved that if $|G| = d(d + e)$, then the order of G is bounded in terms of e , provided $e > 1$. Y. Berkovich proved that in the case $e = 1$ the group G is Frobenius with the complement of order d . We study a finite nontrivial group G with an irreducible complex character Θ such that $|G| \leq 2\Theta(1)^2$ and $\Theta(1) = pq$, where p and q are different primes. In this case we prove that G is solvable groups with abelian normal subgroup K of index pq . We use the classification of finite simple groups and prove that the simple nonabelian group whose order is divisible by a prime p and of order less than $2p^4$ is isomorphic to $L_2(q)$, $L_3(q)$, $U_3(q)$, $Sz(8)$, A_7 , M_{11} or J_1 .

Keywords: finite group, character of a finite group, irreducible character degree of a finite group

For citation: Kazarin L. S., Poiseeva S. S., "On Finite Groups with an Irreducible Character Large Degree", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:4 (2015), 483–499.

On the authors:

Kazarin Lev Sergeevich, orcid.org/0000-0003-1836-0955, doctor of science, professor
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: kazarin@uniyar.ac.ru

Poiseeva Sargylana Semenovna, orcid.org/0000-0003-2740-9845, graduate student,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: pss.iii@mail.ru

Acknowledgments:

¹This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR), №13-01-00469