Моделирование и анализ информационных систем. Т. 22, №4 (2015), с. 500–506
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 22, No 4 (2015), pp. 500–506

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-4-500-506

УДК 512.543

О финитной отделимости подгрупп в расщепляемых расширениях

Кряжева А. А.

получена 21 апреля 2015

В 1973 году Аленби и Грегорас доказали следующее утверждение. Пусть G – расщепляемое расширение конечно порожденной группы A с помощью группы B. 1) Если в группах A и B все подгруппы (все циклические подгруппы) финитно отделимы, то и в группе G все подгруппы (все циклические подгруппы) финитно отделимы; 2) если в группе A все подгруппы финитно отделимы, а в группе B все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, то в группе G все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. Напомним, что группа G называется расщепляемым расширением группы A с помощью группы B, если группа A является нормальной подгруппой группы G, B – подгруппа группы G, $G = AB$ и $A \cap B = 1$. Напомним также, что подгруппа H группы G называется финитно отделимой, если для каждого элемента g группы G, не принадлежащего подгруппе H, существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, при котором образ элемента g не принадлежит образу подгруппы H. В данной работе получено обобщение теоремы Аленби и Грегораса за счет замены условия конечной порожденности группы A более общим: для любого натурального числа n число всех подгрупп группы A индекса n конечно. В действительности при этом условии удалось получить необходимое и достаточное условие финитной отделимости всех подгрупп (всех циклических подгрупп, всех конечно порожденных подгрупп) в группе G.

Ключевые слова: расщепляемое расширение, финитная отделимость подгруппы, конечно порожденная группа

Для цитирования: Кряжева А. А., "О финитной отделимости подгрупп в расщепляемых расширениях", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:4 (2015), 500–506.

Об авторах:
Кряжева Анастасия Алексеевна, orcid.org/0000-0002-5985-5172, аспирант каф. алгебры и математической логики, Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, 39, г. Иваново, 153025 Россия, e-mail: Stasia.07.10@mail.ru

Благодарности:
Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России по государственному заданию.

Введение

Напомним, что подгруппа H группы G называется финитно отделимой [1], если для каждого элемента g группы G, не принадлежащего подгруппе H, существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, при котором образ элемента g не принадлежит образу подгруппы H. Из [2, п. 1. 3. 10] известно, что в полициклической группе все подгруппы финитно отделимы. Однако условие финитной отделимости всех подгрупп является достаточно жестким ограничением. Менее жестким ограничением является финитная отделимость всех конечно порожденных подгрупп. Р. Бернс [3] для обозначения групп с финитно отделимыми конечно порожденными подгруппами ввел термин LERF, использующийся в иностранной литературе. Исследования таких групп были начаты М. Холлом в 1949 году. Он доказал [4], что произвольная конечно порожденная подгруппа любой свободной группы финитно отделима.

Рипсом [5] был построен пример группы, содержащей неотделимую конечно порожденную подгруппу и являющуюся обобщенным свободным произведением с циклическими объединенными подгруппами двух групп, все конечно порожденные подгруппы каждой из которых финитно отделимы. Позже был приведен более простой аналогичный пример свободного произведения двух конечно порожденных нильпотентных групп с циклическим объединением [6]. Вопрос финитной отделимости конечно порожденных подгрупп рассматривался также в работах [7–12].

Исследования финитной отделимости циклических подгрупп являются также весьма интересными. Здесь можно использовать те же методы, что и для свойства финитной аппроксимируемости. Основной в данном направлении является работа Стиба [13], а также работы Логиновой Е. Д. [14], Соколова Е. В. [15].

Расщепляемые расширения и их аппроксимационные свойства рассматривались в работах Мальцева А. И. [1], Азарова Д. Н. [16–19].

В данной статье рассматривается вопрос финитной отделимости подгрупп в расщепляемых расширениях. Напомним, что группа G называется расщепляемым расширением группы A с помощью группы B, если группа A является нормальной подгруппой группы G, B – подгруппа группы G, $G = AB$ и $A \cap B = 1$.

Хорошо известна следующая теорема Аленби и Грегораса [7].

Теорема 1. *Пусть G – расщепляемое расширение конечно порожденной группы A с помощью группы B.*

1. Если в группах A и B все подгруппы (все циклические подгруппы) финитно отделимы, то и в группе G все подгруппы (все циклические подгруппы) финитно отделимы.

2. Если в группе A все подгруппы финитно отделимы, а в группе B все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, то в группе G все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.

Пример прямого произведения двух свободных групп ранга 2 [7] показывает, что пункт 2 нельзя сформулировать по аналогии с пунктом 1. Легко заметить, что п. 1 теоремы Аленби и Грегороса можно обратить, но второй пункт в таком виде обратить нельзя. Поэтому возник вопрос о нахождении необходимого и достаточного условия, при котором в группе G все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. Это условие содержится в пункте 2 следующей теоремы, доказанной автором.

Теорема 2. *Пусть G – расщепляемое расширение группы A с помощью группы B. И пусть группа A удовлетворяет следующему условию: для любого натурального числа n число всех подгрупп группы A индекса n конечно. Тогда*

1. В группе G все подгруппы (все циклические подгруппы) финитно отделимы тогда и только тогда, когда в группах A и B все подгруппы (все циклические подгруппы) финитно отделимы.

2. В группе G все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы тогда и только тогда, когда в группе B все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, и в группе A финитно отделимы все подгруппы, высекаемые в A конечно порожденными подгруппами группы G. В частности, если в группе A все подгруппы финитно отделимы, а в группе B все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, то в группе G все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.

М. Холл [20, с. 250] доказал, что в любой конечно порожденной группе существует только конечное число подгрупп данного конечного индекса. Поэтому доказанная Аленби и Грегоросом теорема 1 является частным случаем теоремы 2.

1. Доказательство теоремы 2

Лемма 1. *Пусть G – расщепляемое расширение конечной группы A с помощью группы B. Если в группе B все подгруппы (все циклические подгруппы, все конечно порожденные подгруппы) финитно отделимы, то и в группе G все подгруппы (все циклические подгруппы, все конечно порожденные подгруппы) финитно отделимы.*

Доказательство. Так как конечная группа является конечно порожденной и так как в ней все подгруппы финитно отделимы, то лемма 1 является следствием сформулированной выше теоремы Аленби и Грегораса.

Лемма 2. *Пусть G – расщепляемое расширение группы A с помощью группы B и в группе B все подгруппы (все циклические подгруппы, все конечно порожденные подгруппы) финитно отделимы. Пусть H – подгруппа (циклическая подгруппа, конечно порожденная подгруппа) группы G. И пусть для произвольного элемента g из группы G, не принадлежащего подгруппе H, существует нормальная подгруппа N группы G, лежащая в группе A и имеющая конечный индекс в A такая, что $g \notin HN$. Тогда подгруппа H финитно отделима в G.*

Доказательство. Рассмотрим элемент $g \in G$, не принадлежащий подгруппе H. Тогда по условию леммы 2 для него существует нормальная подгруппа N, лежащая в группе A и имеющая конечный индекс в A такая, что $g \notin HN$. Рассмотрим фактор-группу G/N и естественный гомоморфизм $\varphi : G \longrightarrow G/N$. Так как элемент g не принадлежит подгруппе HN, то $gN \notin HN/N$, т. е. $g\varphi \notin H\varphi$.

Поскольку G – расщепляемое расширение группы A с помощью группы B и подгруппа N содержится в A, то легко видеть, что G/N является расщепляемым расширением группы A/N с помощью группы BN/N, причем группа A/N – конечна, так как подгруппа N имеет конечный индекс в группе A. Так как группа BN/N изоморфна группе B, то по условию леммы 2 в группе BN/N все подгруппы (все циклические подгруппы, все конечно порожденные подгруппы) финитно отделимы. Поэтому, в силу леммы 1, в группе G/N все подгруппы (все циклические подгруппы, все конечно порожденные подгруппы) финитно отделимы.

Отсюда и из того, что HN/N наследует от подгруппы H свойства цикличности и конечной порожденности, следует, что HN/N финитно отделима в G/N, т. е. $H\varphi$ финитно отделима в G/N. А поскольку $g\varphi \notin H\varphi$, то существует гомоморфизм ψ группы G/N в некоторую конечную группу такой, что $(g\varphi)\psi \notin (H\varphi)\psi$. Таким образом, подгруппа H финитно отделима в группе G. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если в группе все подгруппы (все циклические подгруппы, все конечно порожденные подгруппы) финитно отделимы, то в любой ее подгруппе все подгруппы (все циклические подгруппы, все конечно порожденные подгруппы) финитно отделимы.*

Доказательство. Пусть в группе G все подгруппы (все циклические подгруппы, все конечно порожденные подгруппы) финитно отделимы, H – подгруппа группы G. И пусть M – подгруппа (циклическая подгруппа, конечно порожденная подгруппа) группы H. Докажем, что подгруппа M финитно отделима в H.

Возьмем элемент $h \in H$, не принадлежащий подгруппе M. Так как M – подгруппа группы G, то по условию леммы 3 M финитно отделима в группе G. Значит, существует гомоморфизм φ группы G в некоторую конечную группу такой, что $h\varphi \notin M\varphi$. Пусть φ_1 – ограничение гомоморфизма φ на подгруппу H. Тогда φ_1 – гомоморфизм группы H на конечную группу и $h\varphi_1 \notin M\varphi_1$. Значит, подгруппа M финитно отделима в H. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G – группа. И пусть A, H – подгруппы группы G. Если подгруппа H финитно отделима в группе G, то $A \cap H$ финитно отделима в A.*

Доказательство. Пусть подгруппа H финитно отделима в группе G. Докажем, что $A \cap H$ финитно отделима в A. Возьмем элемент g из подгруппы A такой, что $g \notin A \cap H$. Тогда $g \notin H$. Подгруппа H финитно отделима в G, значит, существует гомоморфизм φ группы G на некоторую конечную группу X такой, что $g\varphi \notin H\varphi$. Следовательно, $g\varphi \notin (A\cap H)\varphi$. Пусть φ_1 – ограничение гомоморфизма φ на подгруппу A. Тогда φ_1 – гомоморфизм группы A в конечную группу X и $g\varphi_1 \notin (A \cap H)\varphi_1$. Таким образом получаем, что $A \cap H$ финитно отделима в A.

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2.

Докажем сначала достаточность в первом и втором утверждениях теоремы 2. Предположим, что в группе B финитно отделимы все подгруппы (все циклические подгруппы, все конечно порожденные подгруппы) и что в группе A финитно отделимы все подгруппы (все циклические подгруппы, все подгруппы, высекаемые в A конечно порожденными подгруппами группы G).

Возьмем произвольную подгруппу (циклическую подгруппу, конечно порожденную подгруппу) H группы G и элемент $g \in G \setminus H$. Докажем, что существует такая нормальная подгруппа N группы G, лежащая в A и имеющая конечный индекс в

A, что $g \notin HN$. Тогда в силу леммы 2 получим, что подгруппа H будет финитно отделима в G, и тем самым будет доказана достаточность в теореме.

Если элемент g не принадлежит подгруппе HA, тогда искомой подгруппой N является подгруппа A.

Пусть теперь элемент $g \in HA$, тогда он представим в виде $g = ha$, где $h \in H$, $a \in A$. Заметим, что элемент a не принадлежит подгруппе $H_1 = H \cap A$. Покажем, что подгруппа H_1 финитно отделима в A.

Если подгруппа H произвольная, то и H_1 – произвольная подгруппа группы A, и, следовательно, по условию теоремы H_1 финитно отделима в A.

Если подгруппа H циклическая, то подгруппа H_1 наследует от H свойство цикличности. Тогда в силу условия теоремы, H_1 финитно отделима в A.

Если подгруппа H конечно порожденная, то подгруппа H_1, являющаяся пересечением подгруппы A с конечно порожденной подгруппой H, финитно отделима в A в силу нашего предположения.

Таким образом, имеем, что подгруппа H_1 финитно отделима в A, и элемент a не принадлежит подгруппе H_1. Поэтому элемент $a \notin H_1 N$ для некоторой нормальной подгруппы N конечного индекса группы A.

Так как для любого натурального числа n число всех подгрупп группы A индекса n конечно, то любая подгруппа конечного индекса группы A содержит в себе характеристическую подгруппу конечного индекса. Поэтому без потери общности можем считать подгруппу N характеристической в A. А поскольку A нормальна в G, то и N нормальна в группе G. Остается доказать, что $g \notin HN$.

Если, напротив, элемент g принадлежит подгруппе HN, тогда элемент g представим в виде $g = h_1 x$, где $h_1 \in H$, $x \in N$. С другой стороны, $g = ha$, где $h \in H$, $a \in A$. Тогда $g = ha = h_1 x$. Следовательно, получаем равенство $h^{-1}h_1 = ax^{-1}$, где $h^{-1}h_1 \in H$, $ax^{-1} \in A$. Значит, $h^{-1}h_1 \in H_1$ и поэтому элемент $a = h^{-1}h_1 x \in H_1 N$, но это противоречит выбору подгруппы N. Следовательно, $g \notin HN$, и подгруппа N является искомой. Таким образом, достаточность в теореме доказана.

Необходимость в первом и во втором утверждениях теоремы 2 обеспечивается леммами 3 и 4. Тем самым теорема полностью доказана.

Автор благодарен Д. Н. Азарову за помощь при написании этой статьи.

Список литературы / References

[1] Мальцев А. И., “О гомоморфизмах на конечные группы”, *Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та.*, **18(5)** (1958), 49–60; (Mal’cev A. I., “O gomomorfizmah na konechnye gruppy”, *Uchen. zap. Ivan. gos. ped. in-ta*, **18(5)** (1958), 49–60, [in Russian].)

[2] Lennox J., Robinson D., *The theory of infinite soluble groups*, Clarendon Press, Oxford, 2004.

[3] Burns R. C., “On finitely generated subgroups of free products”, *J. Austral. Math. Soc.*, **12** (1971), 358–364.

[4] Hall M., “Coset representations in free groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67** (1949), 421–432.

[5] Rips E., “An example of a non-LERF group which is a free ptoduct of LERF groups with an amalgamated cyclic subgroup”, *Israel J. of math.*, **70**:1 (1990), 104–110.

[6] Allenby R., Doniz D., “A free product of finitely generated nilpotent groups amalgamating a cycle that is not subgroup separable”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **124**:4 (1996), 1003–1005.

[7] Allenby R., Gregorac R., "On locally extended residually finite groups", *Lecture Notes Math.*, **319** (1973), 9–17.

[8] Allenby R., Tang C., "Subgroup separability of generalized free products of freeby-finite groups", *Canad. Math. Bull.*, **36**:4 (1993), 385–389.

[9] Bruuner R. M., Burns R. G., Solitar D., "The subgroup separability of free products of two free groups with cyclic amalgamation", *Contributions to group theory. Contemp. Math.*, **33** (1984), 90–115.

[10] Baumslag G., "On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **106**:2 (1963), 193–209.

[11] Романовский Н. С., "О финитной аппроксимируемости свободных произведений относительно вхождения", *Известия АН СССР. Сер. Мат.*, **33**:6 (1969), 1324–1329; Romanovskij N. S., "O finitnoj approksimiruemosti svobodnyh proizvedenij otnositel'no vhozhdenija", *Izvestija AN SSSR. Ser. Mat.*, **33**:6 (1969), 1324–1329, [in Russian].)

[12] Молдаванский Д. И., Ускова А. А., "О финитной отделимости подгрупп обобщенных свободных произведений групп", *Чебышевский сб.*, **14**, 2013, 81–87; (Moldavanskij D. I., Uskova A. A., "O finitnoj otdelimosti podgrupp obobshhennyh svobodnyh proizvedenij grupp", *Chebyshevskij sb.*, **14**, 2013, 81–87, [in Russian].)

[13] Stebe D., "Residual finiteness of a class of knot groups", *Comm. Pure and Applied Math.*, **21** (1968), 563–583.

[14] Логинова Е. Д., "Финитная отделимость циклических подгрупп свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами", *Науч. тр. Иван. гос. ун-та*, Математика, **3**, 2000, 49–55; (Loginova E. D., "Finitnaja otdelimost' ciklicheskih podgrupp svobodnogo proizvedenija dvuh grupp s kommutirujushhimi podgruppami", *Nauch. tr. Ivan. gos. un-ta*, Matematika, **3**, 2000, 49–55, [in Russian].)

[15] Соколов Е. В., "Финитная отделимость циклических подгрупп в некоторых обобщенных свободных произведениях групп", *Вестник молодых ученых ИвГУ*, **2** (2002), 7–10; (Sokolov E. V., "Finitnaja otdelimost' ciklicheskih podgrupp v nekotoryh obobshhennyh svobodnyh proizvedenijah grupp", *Vestnik molodyh uchenyh IvGU*, **2** (2002), 7–10, [in Russian].)

[16] Азаров Д. Н., "О группах конечного общего ранга", *Вестн. Иван. гос. ун-та*, **3** (2004), 100–103; (Azarov D. N., "O gruppah konechnogo obshego ranga", *Vestn. Ivan. gos. un-ta*, **3** (2004), 100–103, [in Russian].)

[17] Азаров Д. Н., "О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга", *Сиб. мат. журн.*, **54**:6 (2013), 1203–1215; (Azarov D. N., "O finitnoj approksimiruemosti HNN-rasshirenij i obobshhennyh svobodnyh proizvedenij grupp konechnogo ranga", *Sib. mat. zhurn.*, **54**:6 (2013), 1203–1215, [in Russian].)

[18] Азаров Д. Н., "О почти аппроксимируемости конечными p-группами", *Чебышевский сб.*, **11**, 2010, 11–21; (Azarov D. N., "O pochti approksimiruemisti konechnymi p-gruppami", *Chebyshevskij sb.*, **11**, 2010, 11–21, [in Russian].)

[19] Азаров Д. Н., Чуракова Е. И., "Об аппроксимируемости конечными p-группами некоторых расщепляемых расширений", *Вестн. Иван. гос. ун-та*, **2** (2009), 68–71; (Azarov D. N., Churakova E. I., "Ob approksimiruemosti konechnymi p-gruppami nekotoryh rasshhepljaemyh rasshirenij", *Vestn. Ivan. gos. un-ta*, **2** (2009), 68–71, [in Russian].)

[20] Курош А. Г., *Теория групп*, Наука, М., 1967; (Kurosh A. G., *Teorija grupp*, Nauka, M., 1967, [in Russian].)

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-4-500-506

On Residual Separability of Subgroups in Split Extensions

Krjazheva A. A.

Received April 21, 2015

In 1973, Allenby and Gregoras proved the following statement. Let G be a split extension of a finitely generated group A by the group B. 1) If in groups A and B all subgroups (all cyclic subgroups) are finitely separable, then in group G all subgroups (all cyclic subgroups) are finitely separable; 2) if in group A all subgroups are finitely separable, and in group B all finitely generated subgroups are finitely separable, then in group G all finitely generated subgroups are finitely separable. Recall that a group G is said to be a split extension of a group A by a group B, if the group A is a normal subgroup of G, B is a subgroup of G, $G = AB$ and $A \cap B = 1$. Recall also that the subgroup H of a group G is called finitely separable if for every element g of G, which does not belong to the subgroup H, there exists a homomorphism of G on a finite group in which the image of an element g does not belong to the image of the subgroup H. In this paper we obtained a generalization of the Allenby and Gregoras theorem by replacing the condition of the finitely generated group A by a more general one: for any natural number n the number of all subgroups of the group A of index n is finite. In fact, under this condition we managed to obtain a necessary and sufficient condition for finite separability of all subgroups (of all cyclic subgroups, of all finitely generated subgroups) in the group G.

Keywords: split extensions, finitely separable subgroups, finitely generated group

For citation: Krjazheva A. A., "On Residual Separability of Subgroups in Split Extensions", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:4 (2015), 500–506.

On the authors:
Krjazheva Anastasia Alekseevna, orcid.org/0000-0002-5985-5172, graduate student,
Voronezh State Technology University,
Universitetskaya str., 7, Voronezh, 394016, Russia, e-mail: Stasia.07.10@mail.ru

Acknowledgments:

This work was supported by the Federal targeted Program.