Модел. и анализ информ. систем. Т. **19**, № **3** (2012) 32–62

УДК 517.9

Асимптотика решений обобщённого уравнения Хатчинсона[1]

Кащенко С. А.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

получена 20 февраля 2012

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с запаздыванием, уравнение Хатчинсона, большой параметр, асимптотика, периодическое решение

Рассматривается вопрос о поведении решений уравнения Хатчинсона и его обобщений. Получены результаты об оценке в пространстве параметров области глобальной устойчивости положительного состояния равновесия. Основные утверждения касаются вопросов существования, устойчивости и асимптотики медленно осциллирующего периодического решения. В качестве приложения разработанных новых асимптотических методов рассмотрена задача о динамических свойствах системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей известную реакцию Белоусова — Жаботинского.

Введение

Уравнение Хатчисона

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \lambda\,[1 - N(t-h)]\,N \qquad (\lambda > 0, \quad h > 0) \tag{1}$$

принадлежит к числу фундаментальных уравнений математической экологии. Исследованию решений этого уравнения посвящена значительная литература [1]. Напомним простейшие свойства решений этого уравнения. Через $C_{[-h,0]}$ ниже обозначается пространство непрерывных на отрезке $[-h, 0]$ функций со стандартной нормой. Это пространство примем в качестве фазового, т. е. пространства начальных условий уравнения (1). Отметим, что решение (1) с положительной начальной функцией, заданной в некоторый момент времени $t = t_0$, остаётся положительным при всех $t > t_0$. В дальнейшем термин "решение" применяется только к положительным решениям (1).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.G34.31.0053.

Уравнение (1) является диссипативным: при достаточно больших t каждое решение $N(t)$ этого уравнения удовлетворяет неравенству

$$N(t) \leqslant -1 + \exp \lambda h.$$

Состояние равновесия $N \equiv 0$ неустойчиво, а состояние равновесия $N_0 \equiv 1$ асимптотически устойчиво при

$$0 < \lambda h \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

и неустойчиво при $\lambda h > \frac{\pi}{2}$.

В [2, 3] исследовался вопрос об отыскании всех тех значений параметров λ и h, при которых состояние равновесия N_0 глобально устойчиво, т. е. все решения (1) стремятся к 1 при $t \to \infty$. В [2] было показано, что область глобальной устойчивости выделяется неравенствами

$$0 < \lambda h \leqslant \frac{37}{24}. \tag{3}$$

В [4] проведён алгоритм, который допускает улучшение этой оценки. Конструкции этого алгоритма составляют содержание первой главы. Сразу отметим, что с его помощью определяются оценки сверху для всех решений (1) даже при отсутствии глобальной устойчивости состояния равновесия.

В главе 2 исследуется асимптотика релаксационного периодического решения обобщённого уравнения Хатчинсона

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \lambda \left[1 - \int_{-h_2}^{-h_1} dr(s) N(t+s)\right] N. \tag{4}$$

Это уравнение является весьма важным для приложений. Оно описывает, в частности, динамику изменения численности биологических популяций с учётом возрастной структуры и характера (сезонного или непрерывного) размножения. Положительные параметры λ h_1, h_2 ($h_2 > h_1$) и монотонная функция $r(s)$ (с ограниченным изменением на $[-h_2, -h_1]$) имеют чёткий биологический смысл. В главе 2 будем интересоваться вопросом о существовании медленно осциллирующего положительного периодического решения и его свойствами при $\lambda \to \infty$.

В [5] показано, что при всех $\lambda h > \frac{\pi}{2}$ уравнение (1) имеет непостоянное периодическое решение. В том случае, когда λh мало отличается от $\frac{\pi}{2}$, применимы стандартные методы теории бифуркаций. Сформулируем здесь соответствующее утверждение. Положим $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1$, $h = h_0 + \varepsilon h_1$, где $\lambda_0 h_0 = \frac{\pi}{2}$, а параметр ε является достаточно малым: $0 < \varepsilon \ll 1$. Тогда в достаточно малой (и не зависящей от ε) окрестности состояния равновесия $N_0 \equiv 1$ существует двумерное локальное инвариантное устойчивое интегральное многообразие, на котором уравнение (1) записывается в виде скалярного комплексного уравнения

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \alpha\xi + d \mid \xi \mid^2 \xi + O(\varepsilon). \tag{5}$$

Здесь $\tau = \varepsilon t$,

$$\alpha = \Big[(\frac{\pi}{2} + i)\lambda_1 + \lambda_0^2 h_1 (1 - i\frac{\pi}{2})\Big] \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)^{-1},\ d = -\lambda_0 \Big[3\pi - 2 + i(\pi + 6)\Big] \left(10(1 + \frac{4}{\pi^2})\right)^{-1}.$$

Решения (1) и (5) связаны формулой

$$N = 1 + \varepsilon^{1/2}\left[\xi(\tau)\exp(i\frac{\pi}{2h_0}t) + \xi(\tau)\exp(-i\frac{\pi}{2h_0}t)\right] + O(\varepsilon).$$

Отметим, что $\operatorname{Re} d < 0$. Отсюда и из (5) заключаем, что при $\operatorname{Re}\alpha > 0$ в малой окрестности $N \equiv 1$ уравнение (1) имеет устойчивый цикл $N_0(t, \varepsilon)$, где

$$N_0(t,\varepsilon) = 1 + 2\sqrt{\varepsilon}\xi_0\cos\left(\frac{\pi}{2h_0} + \varepsilon\varphi_0 + o(\varepsilon)\right)t + O(\varepsilon),$$

$$\xi_0 = \left[10\left(\frac{\pi}{2}\lambda_1 + \lambda_0^2 h_1\right)(3\pi - 2)^{-1}\right]^{1/2},$$

$$\varphi_0 = \left(1 + \frac{\pi}{4}^2\right)^{-1}\left(\lambda_1 - \lambda_0^2 h_1\frac{\pi}{2} - \lambda_0\Big(3\pi - 2\Big)^{-1}\Big(\pi + 6\Big)\left(\frac{\pi}{2}\lambda_1 + \lambda_0^2 h_1\right)\right).$$

В [6] исследован вопрос о существовании, устойчивости и асимптотике периодического решения уравнения (4) при условии, когда параметр λ является достаточно большим: $\lambda \gg 1$. Суммирующие построения приведены в главе 2. Будет показано, что при этом условии уравнение (4) имеет устойчивое периодическое решение релаксационного характера и будет найдено его асимптотическое разложение. Отметим, что в техническом плане наибольшие сложности представляет исследование свойств устойчивости. В этой связи обратим внимание на то, что количество различных неустойчивых периодических решений (1) неограниченно растёт при $\lambda \to \infty$ [7].

Уравнение (4) при $\lambda \gg 1$ является сингулярно возмущённым. Для исследования его решений в [6] был разработан специальный метод большого параметра. Суть его заключается в следующем. В фазовом пространстве $C_{[-h,0]}$ специальным образом (используя, в том числе, и соображения биологического характера) фиксируется множество $S = S(\lambda)$. Далее изучается асимптотика всех решений $N(t, \varphi)$ с начальными функциями $\varphi(s) \in S$. Устанавливается, что через некоторый промежуток времени $t = t_\varphi(\lambda)$ решение $N(t, \varphi)$ снова попадает в S. Тем самым определяется оператор последования Π: $\Pi(\varphi(S)) = N(S+t_\varphi(\lambda), \varphi)$ $(S \in [-h, 0])$. Центральным его свойством является выполнение включения $\Pi S \subset S$. Отсюда и из общих утверждений (см., например, [8]) приходим к выводу, что оператор Π в S имеет неподвижную точку $\varphi_0(S)$, которой отвечает периодическое решение $N_0(t, \lambda) = N(t, \varphi_0)$. Указанная схема была успешно применена для исследования сложных релаксационных колебаний во многих прикладных задачах [9–17].

В главе 3 исследуются модели, которые совсем немного — на малую величину ε — отличаются от моделей из главы 2 [18]. Биологический смысл параметра ε состоит в предположении, что в рассматриваемый однородный ареал происходит миграция с малой постоянной скоростью. Сформулированные ниже результаты о динамике простейших экосистем с малой миграцией существенно отличаются от тех, в которых миграция не учитывалась. Тем самым, даже малая миграция в определённых ситуациях может приводить к принципиальным изменениям динамики установившихся режимов. В этом плане наблюдается интересная аналогия с задачей о структуре решений в моделях популяций с малой диффузией [10, 20].

Изложенный в главе 2 и 3 подход проиллюстрирован в главе 4 при исследовании колебаний в математической модели реакции Белоусова — Жаботинского.

Отметим ещё работу [21], в которой с помощью разработанной здесь методики решена интересная оптимизационная задача из математической экологии.

1. Оценка в пространстве параметров области глобальной устойчивости уравнения Хатчинсона

1. Положим в уравнении (1) $N = 1 + x$. В результате получим уравнение

$$\dot{x} = -\lambda x(t-1)[1 + x(t)], \quad \lambda > 0, \quad x(t) > -1. \tag{6}$$

Здесь коснёмся лишь одного вопроса, относящегося к уравнению (6). Поставим задачу об отыскании тех значений параметра λ, при которых все решения (> -1) уравнения (6) стремятся к нулю при $t \to \infty$. Отметим, что этот вопрос изучался в [2] (в [3] был повторен в более слабой форме один из результатов работы [2]). Было показано, что при условии

$$0 < \lambda \leqslant \frac{37}{24} \tag{7}$$

все решения (6) стремятся к нулю при $t \to \infty$, а при каждом $\lambda > \frac{\pi}{2}$ найдётся решение, не имеющее своим пределом нулевое состояние равновесия уравнения (6). Известно, что при $0 < \lambda \leqslant \frac{\pi}{2}$ состояние равновесия $x \equiv 0$ локально асимптотически устойчиво. Таким образом, остаётся открытым вопрос о глобальной асимптотической устойчивости решений (6) при $\frac{37}{24} < \lambda \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Здесь будет сформулирован алгоритм, который позволяет последовательно расширять область (7) глобальной устойчивости решений. Кроме того, будут получены оценки в фазовом пространстве уравнения (6) решений в тех случаях, когда вопрос о глобальной устойчивости остаётся открытым.

2. Основная конструкция. Прежде всего отметим, что при всех достаточно больших t каждое решение $x(t)$ уравнения (6) удовлетворяет оценкам

$$-1 + \exp[-\lambda(\exp\lambda - 1)] \leqslant x(t) \leqslant \exp\lambda - 1.$$

Это легко следует из условия $x(t) > -1$ и формулы

$$x(t) = -1 + (1 + x(\tau))\exp\Big[-\int_{\tau-1}^{t-1} x(s)ds\Big]. \tag{8}$$

Предположим затем, что некоторое решение $x(t)$ удовлетворяет при больших значениях t оценкам

$$-\alpha \leqslant x(t) \leqslant M \quad (\alpha \in (0,1)). \tag{9}$$

Из (6) и (9) можно получить оценки сверху и снизу для всех производных $x(t)$ (при больших t):

$$-b_n \leqslant x^n(t) \leqslant a_n \quad (n = 1, 2, \dots), \tag{10}$$

где $a_n = a_n(\alpha, M)$, $b_n = b_n(\alpha, M)$. Фиксируем теперь номер $m \geqslant 1$. Через $C(m, \alpha, M)$ и $S(m, \alpha, M)$ обозначим экстремумы функционалов

$$C(m, \alpha, M) = \inf \int_0^1 x(s)ds, \quad S(m, \alpha, M) = \sup \int_0^1 x(s)ds,$$

где нижняя и верхняя грани берутся по всем $m-1$ раз непрерывно дифференцируемым функциям, удовлетворяющим неравенствам (9), (10) ($n = 1, \ldots, m$) и условию $x(1) = 0$.

Через $M = M(\alpha)$ ($M(0) = 0$) обозначим положительный корень уравнения

$$M = -1 + \exp[-\lambda C(m, \alpha, M)].$$

Положим затем

$$F(\alpha) = 1 - \exp[-\lambda S(m, \alpha, M(\alpha))].$$

Теорема. *Для стремления к нулю всех решений* (> -1) *уравнения* (6) *достаточно, чтобы*

$$\Phi(\alpha) \equiv \alpha - F(\alpha) > 0 \quad (\alpha \in (0,1)). \tag{11}$$

Доказательство. Фиксируем произвольно решение $x(t) > -1$ уравнения (6) и положим

$$-\alpha = \lim_{\tau\to\infty} \inf_{t\geqslant\tau} x(t), \quad M = \lim_{\tau\to\infty} \sup_{t\geqslant\tau} x(t).$$

Достаточно рассмотреть лишь те решения $x(t)$, которые имеют бесконечно много нулей на каждом промежутке (n, ∞) ($n = n_0, n_0+1, \ldots$, n_0 — достаточно велико). Действительно, если (при больших значениях t) выполнено условие $x(t) > 0$ или $x(t) < 0$, то функция $x(t)$ монотонно стремится к нулю при $t \to \infty$ (т. е. $\alpha = M = 0$). Отметим, что экстремумы $x(t)$ реализуются через отрезок времени длины 1 после обращения в нуль этой функции. Отсюда и из формулы (8) сразу вытекает, что

$$0 \leqslant M < \exp\lambda - 1, \quad 0 \leqslant \alpha < 1 - \exp[-\lambda(\exp\lambda - 1)].$$

Фиксируем произвольно целое $m \geqslant 0$ и $0 < \varepsilon < \min(\alpha, 1-\alpha)$, и пусть при $t \geqslant \tau_\varepsilon$ выполнено неравенство

$$-(\alpha + 2) \leqslant x(t) \leqslant M + \varepsilon. \tag{12}$$

Дифференцируя уравнение (6) (на заданной функции $x(t)$) и учитывая оценку (12), находим величины $a_k(\varepsilon) = a_k(\alpha+\varepsilon, M+\varepsilon)$ и $b_k(\varepsilon) = b_k(\alpha+\varepsilon, M+\varepsilon)$, оценивающие соответственно сверху и снизу значения $x^k(t)$ ($k = 0, \ldots, m$) при $t > \tau_\varepsilon + m$. Очевидно, что $a_k(\varepsilon)$, $b_k(\varepsilon)$, а также $C(m, \alpha+\varepsilon, M+\varepsilon)$ и $S(m, \alpha+\varepsilon, M+\varepsilon)$ непрерывно зависят от ε. Обозначим через τ_0 и τ^0 ($\tau_0, \tau^0 > \tau_\varepsilon + m$) какие-то точки локальных минимума и максимума $x(t)$ соответственно. Из (8) при $\tau = \tau_0$ и $\tau = \tau^0$ имеем

$$-\alpha = x(\tau_0) = -1 + \exp[-\lambda \int_{\tau_0-2}^{\tau_0-1} x(s)ds], \tag{13}$$

$$M_0 = x(\tau^0) = +\exp[-\lambda \int_{\tau^0-2}^{\tau^0-1} x(s)ds] - 1. \qquad (14)$$

Формула (14) сразу приводит к оценке

$$m_0 \leqslant -1 + \exp[-\lambda C(m, \alpha+\varepsilon, M+\varepsilon)].$$

Учитывая здесь, что точка локального максимума и значение τ^0 выбраны произвольно, получаем неравенство

$$M \leqslant -1 + \exp[-\lambda C(m, \alpha, M)].$$

Отсюда вытекает оценка

$$M \leqslant M(\alpha), \qquad (15)$$

где $M(\alpha)$ — корень уравнения

$$M + 1 = \exp[-\lambda C(m, \alpha, M)].$$

Осталось воспользоваться формулой (13), из которой находим, что

$$\alpha_0 \leqslant 1 - \exp[-\lambda S(m, \alpha+\varepsilon, M+\varepsilon)].$$

Используя, наконец, неравенство (15) и произвол в выборе τ_0 и ε, получаем, что α удовлетворяет неравенству

$$\Phi(\alpha) \leqslant 0. \qquad (16)$$

Сравнивая (16) с условием (11), приходим к выводу $\alpha = M = 0$, т.е. функция $x(t)$ имеет нулевой предел при $t \to \infty$. Теорема доказана.

Проиллюстрируем действие этой конструкции для $m = 0, 1, 2$.

3. Пусть сначала $m = 0$. Очевидно тогда

$$C(0, \alpha, M) = -\alpha, \quad S(0, \alpha, M) = M,$$

$$M(\alpha) = -1 + \exp\lambda\alpha, \quad F(\alpha) = 1 - \exp[-\lambda(\exp\lambda\alpha - 1)].$$

Необходимым и достаточным условием неравенства (11) является требование

$$0 < \lambda \leqslant 1. \qquad (17)$$

Тем самым получили, что при условии (17) все решения (6) стремятся к нулю при $t \to \infty$.

При $\lambda > 1$ функция $\Phi(\alpha)$ имеет единственный положительный (на (0, 1]) нуль $\alpha_0(\lambda)$. В этом случае каждое решение (6) при больших t удовлетворяет оценке

$$-\alpha_0(\lambda) \leqslant x(t) \leqslant M(\alpha_0(\lambda)).$$

В частности, при всех $\lambda \in (1, \frac{\pi}{2})$

$$-\alpha_0(\frac{\pi}{2}) \leqslant x(t) \leqslant M(\alpha_0(\frac{\pi}{2})).$$

4. Пусть $m = 1$. Имеет смысл рассмотреть лишь случай $\lambda > 1$. Из (9) и (6) тогда вытекает, что при условии $x(t) < 0$ (и больших t) $\dot{x}(t) \leqslant \lambda\alpha$, а при $x(t) > 0$ имеем $\dot{x}(t) \geqslant -\lambda\alpha M(1+M)$, т. е. $a_1 = \lambda\alpha$, $b_1 = \lambda M(1+M)$. Значения $C(1,\alpha,M)$ и $S(1,\alpha,M)$ реализуются соответственно на функциях

$$x_0(t) = \begin{cases} -\alpha, & 0 \leqslant t \leqslant 1 - \frac{1}{\lambda}, \\ \lambda\alpha(t-1), & 1 - \frac{1}{\lambda} < t \leqslant 1, \end{cases}$$

$$x^0(t) = \begin{cases} M, & 0 \leqslant t \leqslant 1 - (\lambda(1+M))^{-1}, \\ -b_1(t-1), & 1 - (\lambda(1+M))^{-1} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Поэтому $C(1,\alpha,M) = -\alpha(1 - \frac{1}{2\lambda})$, $S(1,\alpha,M) = M[1 - (2\lambda(1+M))^{-1}]$, откуда следует, что

$$M(\alpha) = -1 + \exp[\lambda\alpha(1 - \frac{1}{2\lambda})], \quad F(\alpha) = 1 - \exp[-\lambda M(\alpha)(1 - (2\lambda(1 + M(\alpha))^{-1}))].$$

Неравенство (11) выполняется при условии $0 < \lambda \leqslant \frac{3}{2}$.

Для $\lambda > \frac{3}{2}$ через $\alpha_2(\lambda)$ обозначим наибольший на отрезке $(0,1]$ нуль функции $\Phi(\alpha)$ ($\alpha_2(\lambda)$ заведомо определено, так как при $\lambda > \frac{3}{2}$ $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) < 0$ и $\Phi(1) > 0$). Последний вывод заключается в том, что при $\frac{3}{2} < \lambda \leqslant \frac{\pi}{2}$ и при достаточно больших t для каждого решения (6) выполнены неравенства

$$\alpha_2\Big(\frac{\pi}{2}\Big) \leqslant -\alpha_2(\lambda) \leqslant x(t) \leqslant M(\alpha_2(\lambda)) \leqslant M\Big(\alpha_2\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big),$$

причем $\alpha_2(\lambda) < \alpha_1(\lambda)$.

5. Пусть $m = 2$, $\lambda > \frac{3}{2}$. В этом случае можно взять

$$a_2 = \frac{1}{2}\lambda^2 M(1+2M), \quad b_2 = -\frac{1}{2}\lambda^2\alpha(1+M)^2.$$

Функции $x_0(t)$ и $x^0(t)$, на которых соответственно реализуются значения $C(2,\alpha,M)$ и $S(2,\alpha,M)$, имеют вид

$$x_0(t) = \begin{cases} -\alpha, & 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ -\alpha + \frac{1}{2}a_2(t-t_1)^2, & t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \\ \lambda\alpha(t-1), & t_2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \qquad t_1 = 1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda\alpha}{2a_2}, \quad t_2 = -\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda\alpha}{2a_2},$$

$$x^0(t) = \begin{cases} M, & 0 \leqslant t \leqslant \tau_1, \\ M - \frac{1}{2}b_1(t-\tau_1)^2, & \tau_1 < t \leqslant \tau_2, \\ -b_1(t-1), & \tau_2 < t \leqslant 1, \end{cases} \qquad \tau_1 = 1 - \frac{M}{b_1} - \frac{b_1}{2b_2}, \quad \tau_2 = 1 - \frac{M}{b_1} + \frac{b_1}{2b_2}.$$

Отсюда

$$C(2,\alpha,M) = -\alpha[1 - \frac{1}{2\lambda} - \alpha^2(24M^2(1+2M)^2)^{-1}],$$

$$S(2,\alpha,M) = M\tau_2 - b_1^3(6b_2^2)^{-1} + \frac{1}{2}b_1(\tau_2 - 1)^2.$$

Функция $M(\alpha)$ является корнем уравнения

$$M(\alpha) = -1 + \exp\left[\lambda\alpha(1 - \frac{1}{2\lambda} - \alpha^2(24\lambda M^2(\alpha)(1+2M(\alpha))^2)^{-1})\right],$$

а для $F(\alpha)$ справедлива формула

$$F(\alpha) = 1 - \exp[-\lambda M(\alpha)\tau_2 - b_1^3(6b_2^2)^{-1} + \frac{1}{2}b_1(\tau_2 - 1)^2].$$

Оказывается, что неравенство (11) выполняется при всех $0 < \lambda \leqslant \frac{37}{24}$, т. е. другим способом получен результат работы [1].

При $\lambda > \frac{37}{24}$ через $\alpha_3(\lambda)$ обозначим наибольший на $(0, 1]$ корень уравнения $\Phi(\alpha) = 0$. Получаем тогда, что все решения (6) при больших значениях t удовлетворяют неравенствам

$$-\alpha_3(\lambda) \leqslant x(t) \leqslant M(\alpha_3(\lambda)), \tag{18}$$

$$\alpha_3(\lambda) < \alpha_2(\lambda). \tag{19}$$

Заметим, что неравенства типа (18), (19) справедливы и при всех $m > 2$. При $m = 3$ область глобальной устойчивости (7) расширяется. Получение точных оценок в приведённой конструкции наталкивается, однако, на значительные вычислительные трудности. Наиболее сложную часть — определение $C(3, \alpha, M)$, $S(3, \alpha, M)$ — можно упростить, если удастся построить такие выражения $\overline{C}(3, \alpha, M)$, $\overline{S}(3, \alpha, M)$, что

$$C(3, \alpha, M) \geqslant \overline{C}(3, \alpha, M) > S(2, \alpha, M),$$

$$S(3, \alpha, M) \leqslant \overline{S}(3, \alpha, M) < C(2, \alpha, M).$$

2. Асимптотика периодического решения обобщённого уравнения Хатчинсона

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим вопрос о динамике решения обобщённого уравнения Хатчинсона

$$\dot{N} = \lambda\left[1 - \int_{-h_2}^{-h_1} dr(s)N(t+s)\right]N. \tag{20}$$

Отметим, что в работе [22] установлено существование при достаточно больших λ и при $h_0 < 2h_1$ медленно осциллирующего периодического решения уравнения

$$\dot{N} = \lambda[1 - \alpha_1 N(t - h_1) - \alpha_2 N(t - h_1 - h_0)]N, \tag{21}$$

где $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Для уравнения типа (21) с конечным числом целочисленных отклонений аргумента в [23] получены некоторые результаты о существовании неустойчивых быстро осциллирующих периодических решений.

Ниже считается, что вариация функции $r(s)$ на отрезке $[-h_2, -h_1]$ равна единице. Ясно, что это допущение не ограничивает общности. Итак, ниже предполагаем, что параметр λ достаточно велик, т. е.

$$\lambda \gg 1.$$

Теорема 1. *Фиксируем произвольно $\delta_0 \in (0,1)$. Существует такое $\lambda_0 > 0$, что при $\lambda > \lambda_0$ уравнение (20) имеет (непрерывно зависящее от λ медленно осциллирующее периодическое решение $N(t,\lambda)$, которое на некотором интервале длины h_2 удовлетворяет неравенству*

$$N(t,\lambda) \leqslant \delta_0. \tag{22}$$

Это периодическое решение единственно (с точностью до сдвига по фазе) и экспоненциально орбитально устойчиво.

Рассмотрим затем вопрос об асимптотике $N(t,\lambda)$ при $\lambda \to \infty$. Введём несколько обозначений. Период этой функции обозначим через $T(\lambda)$ и положим

$$A(\lambda) = \max_{0 \leqslant t \leqslant T(\lambda)} N(t,\lambda), \quad a(\lambda) = \min_{0 \leqslant t \leqslant T(\lambda)} N(t,\lambda).$$

Время, за которое $N(t,\lambda)$ изменяется от своего наибольшего значения до среднего, обозначим через $t_0(\lambda)$. Отметим, что среднее $N(t,\lambda)$ равно единице:

$$\frac{1}{T(\lambda)} \int_0^{T(\lambda)} N(t,\lambda) = 1. \tag{23}$$

Введённые величины являются важными характеристиками периодического решения. Поэтому вместе с асимптотикой $N(t,\lambda)$ ниже будем приводить и их зависимость от λ при $\lambda \to \infty$. Исходя из биологического смысла, конкретизируем функцию $r(s)$. Интерес представляют два случая.

Первый случай:

$$\int_{-h_2}^{-h_1} dr(s)N(s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i N(-\delta_i),$$

где $\alpha_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n$ и $\delta_1 = h_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_n = h_2$.

Второй случай:

$$\int_{-h_2}^{-h_1} dr(s)N(s) = \int_{-h_2}^{-h_1} r_0(s)ds,$$

где достаточно гладкая функция $r_0(s)$ положительна при всех $s \in (-h_2, -h_1)$.

Первый случай соответствует той ситуации, когда размножение вида является сезонным, а второй — непрерывным. Отметим, что в силу сделанного выше допущения

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \quad \int_{-h_2}^{-h_1} r(s)ds = 1. \tag{24}$$

Равенства (23) и (24) дают возможность так распорядиться выбором фазового сдвига $N(t,\lambda)$, что $N(0,\lambda) = 1$, $\dot{N}(0,\lambda) > 0$.

Изучим сначала первый случай. Положим $h_0 = \min(h_1, \delta_2 - h_1)$ и фиксируем произвольно $t_0 \in (0, \frac{h_0}{3})$.

Теорема 2. *Имеют место равенства:*

$$N(t,\lambda) = \exp\left[\lambda t - \alpha_1 e^{\lambda_1(t-h_1)}\right]\left[1 + O(e^{-\frac{\lambda h_0}{2}})\right]$$

равномерно для всех t *из отрезка* $[-T(\lambda)+h_1+h_2+t_0, h+t_0]$, *где*

$$T(\lambda)=\frac{e^{\lambda h_1}}{\lambda\alpha_1}[1+O(e^{-\lambda h_0})];\quad N(t,\lambda)=O\Big(\exp\Big[-\frac{1}{2\alpha_1}e^{\lambda t_0}\Big]\Big)$$

равномерно для всех $t\in[h_1+t_0, h_1+h_2+t_0]$.

Отметим еще, что

$$A(\lambda)=\frac{1}{\alpha_1}\exp[\lambda h_1-1][1+O(e^{-\lambda h_0})],\quad a(\lambda)=\exp\Big[-\frac{c(\lambda)}{\alpha_1}e^{\lambda h_1}\Big],$$

$$c(\lambda)=1+O(e^{-\frac{\lambda h_0}{2}}),\quad t_0(\lambda)=\frac{\ln\lambda}{\lambda}+O\Big(\frac{\ln\lambda}{\lambda}\Big).$$

Примерный вид периодического решения $N(t,\lambda)$ приведён на рис. 1.

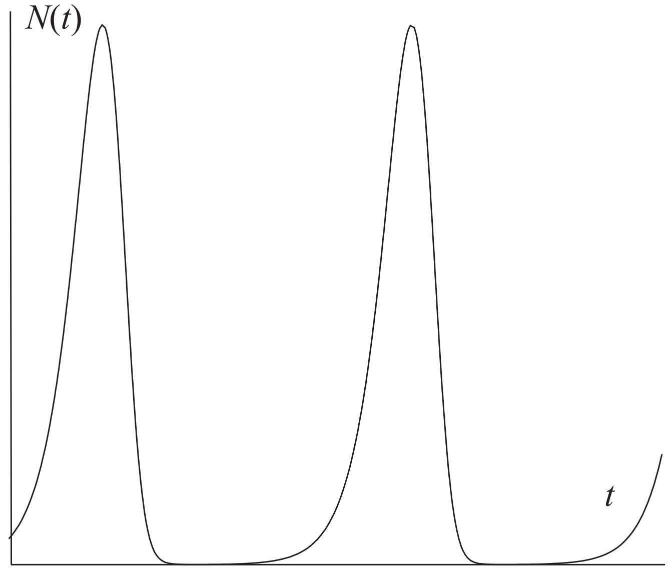

Рис. 1.

Перейдём ко второму случаю. Наложим на функцию $r_0(s)$ одно ограничение типа общности положения. Допустим существование такого $k\geqslant 0$, что при $s\to -h_1$ верно соотношение $r_0(s)=(-1)^k\alpha_{0k}(s+h_1)^k+O((s+h_1)^k)$, в котором $\alpha_{0k}\neq 0$. Очевидно тогда, что $\alpha_{0k}>0$. Фиксируем произвольно $t_0\in(0,h_2-h_1)$.

Теорема 3. *Имеют место равенства:*

$$N(t,\lambda)=\exp[\lambda t-\frac{\alpha_{0k}(k-1)!}{\lambda^{k+1}}e^{\lambda_1(t-h_1)}][1+O(e^{\lambda^{-(k+2)}})]$$

равномерно для всех $t\in[-T(\lambda)+h_1+h_2+t_0, h_1+t_0]$, *где*

$$T(\lambda)=\frac{\lambda^k e^{\lambda h_1}}{\alpha_{0k}(k-1)!}[1+O(\lambda^{-(k+2)})];\quad N(t,\lambda)=O\Big(\exp\Big[-\frac{\alpha_{0k}(k-1)!}{2\lambda^{k+1}}e^{\lambda t_0}\Big]\Big)$$

равномерно для всех $t\in[h_1+t_0, h_1+h_2+t_0]$.

Отметим, что в данном случае

$$A(\lambda) = \frac{\lambda^{k+1}}{\alpha_{0k}(k-1)!} e^{\lambda h_1 - 1}[1 + O(\lambda^{-(k+2)})], \quad a(\lambda) = \exp\Big[-\frac{c(\lambda)\lambda^{k+1}}{\alpha_{0k}(k-1)!} e^{\lambda h_1}\Big],$$

$$c(\lambda) = 1 + O(e^{-\frac{\lambda h_1}{2}}), \quad t_0(\lambda) = \frac{\ln\lambda}{\lambda} + O\Big(\frac{\ln\lambda}{\lambda}\Big).$$

При доказательстве теорем 2 и 3 будет описан алгоритм, применение которого позволяет неограниченно улучшать порядок точности всех приведённых выше формул.

Сделаем одно замечание. Как следует из теоремы 2, асимптотика в главном члене медленно осциллирующего периодического решения уравнения (20) в «первом» случае аналогична главной асимптотике соответствующего решения уравнения (1). Однако имеются и существенные различия. Решение $N(t,\lambda)$ уравнения (20) может совершать на интервале (h_1, h_2) еще $n-1$ колебаний (оставаясь при этом порядка $O(\exp[-\frac{1}{2\alpha_1}e^{\lambda h_0}])$, в то время как соответствующее решение уравнения (1) имеет на полуинтервале длины периода ровно две точки экстремума.

Теперь о структуре статьи. В следующем пункте будет доказано существование медленно осциллирующего периодического решения уравнения (20). В п. 3. доказываются теоремы 2 и 3, а в п. 4. завершается доказательство теоремы 1. В п. 5. рассмотрены некоторые обобщения.

2. Доказательство существования периодического решения

Сначала в уравнении (20) выполним замену

$$N = 1 + x \quad (x > -1),$$

в результате которой получим уравнение

$$\dot{x} = -\lambda(1+x)\int_{-h_2}^{-h_1} dr(s)x(t+s). \tag{25}$$

Доказательство существования периодического решения основывается на синтезе идей из [15] и некоторых выводах, следующих из асимптотической теории для уравнений с запаздыванием. Пусть, как и ранее, δ_0 — произвольная постоянная из интервала (0, 1). Рассмотрим на отрезке $[-h_2, 0]$ конусное множество S таких неубывающих функций $\varphi(s)$, для которых выполнены условия

$$\varphi(0) = 0, \quad -1 < \varphi(s) \leqslant \delta_0(e^s - 1). \tag{26}$$

Обозначим через $x_\varphi(t+s)$ определённую при $t > 0$ траекторию уравнения (7) с начальным условием $\varphi(s)$. Пусть $t_1(\lambda)$ — первый положительный нуль (если он существует) функции $x_\varphi(t)$.

Лемма 1. *Найдется такое $\lambda_0 > 0$, что при $\lambda > \lambda_0$ существует $t_1(\lambda)$, причём*

$$\lim_{\lambda\to\infty} t_1(\lambda) = h_1. \tag{27}$$

Доказательство. Из формулы

$$1 + x_\varphi(t) = \exp[-\lambda \int_0^t \int_{-h_2}^{-h_1} dr(s)x_\varphi(\tau + s)d\tau] \tag{28}$$

и условий (26) вытекает, что для значений t из полуинтервала $(0, h]$ верно неравенство

$$1 + x_\varphi(t) \geqslant \exp[\lambda\delta_0\gamma(t)], \tag{29}$$

где $\gamma(t)$ — некоторая положительная функция, не зависящая от $\varphi(s)$ и λ. Фиксируем затем произвольно ещё одну постоянную δ из интервала $(0, h_1)$. Используя неравенство (11) и формулу (10), находим, что для значений t из отрезка $[h_1+\delta, 2h_1]$ справедливо соотношение

$$1 + x_\varphi(t) \leqslant \exp[\lambda h_1 - \lambda \int_{h_1+\delta}^t \int_{-h_1-\delta}^{-h_1} dr(s)e^{\lambda\delta_0\gamma(\tau+s)}d\tau]. \tag{30}$$

Отсюда и из произвола в выборе δ приходим к обоснованию предельного равенства (27), а значит — и к доказательству леммы.

Обозначим через $t_2(\lambda)$ следующий за $t_1(\lambda)$ нуль (если он существует) функции $x_\varphi(t)$.

Лемма 2. *Найдется такое $\lambda_0 > 0$, что при $\lambda > \lambda_0$ существует $t_2(\lambda)$.*

Доказательство. В предположении противного из уравнения (7) получаем, что некоторое решение $x_\varphi(t)$, оставаясь отрицательным, монотонно стремится к нулю при $t \to \infty$. Рассмотрим линеаризованное в нуле уравнение (31):

$$\dot{x} = -\lambda(1 + x) \int_{-h_2}^{-h_1} dr(s)x(t + s). \tag{31}$$

Ясно, что при достаточно больших λ решения этого уравнения неустойчивы. При этом решения со знакопостоянными начальными условиями экспоненциально растут при $t \to \infty$. Отсюда следует, что решения уравнения (31) с достаточно малыми знакопостоянными начальными условиями обязательно покидают некоторую окрестность нулевого решения. Получено противоречие. Лемма доказана.

Нам понадобится еще одно свойство $t_2(\lambda)$.

Лемма 3. *Имеет место равенство*

$$\lim_{\lambda\to\infty} t_2(\lambda) = \infty. \tag{32}$$

Доказательство. Из неравенства (29) получаем, что $t_2(\lambda) > 2h_1$ (при больших λ), а непосредственно из уравнения (31) приходим к равенству

$$\int_{t_1(\lambda)}^{t_2(\lambda)} \int_{-h_2}^{-h_1} dr(s)x_\varphi(\tau + s)d\tau = 0.$$

Интеграл в этом равенстве удобно разбить на два:

$$\int_{t_1(\lambda)}^{2h_1}\int_{-h_2}^{-h_1} dr(s)x_\varphi(\tau+s)d\tau + \int_{2h_1}^{t_2(\lambda)}\int_{-h_2}^{-h_1} dr(s)x_\varphi(\tau+s)d\tau.$$

В силу неравенства (29) первый из них неограниченно растёт при $\lambda \to \infty$, поэтому

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{2h_1}^{t_2(\lambda)}\int_{-h_2}^{-h_1} dr(s)x_\varphi(\tau+s)d\tau = -\infty.$$

Учитывая здесь, наконец, что $x_\varphi(t) > -1$, приходим к обоснованию равенства (13). Лемма доказана.

Приведённые выше леммы позволяют получить важные выводы о поведении функции $x_\varphi(t)$. Сформулируем их в виде лемм.

Лемма 4. *При любом $\delta > 0$ равномерно относительно каждой функции $\varphi(s) \in S$ и значений t из промежутка $[h_1+\delta, t_2(\lambda)-h_1]$ при $\lambda \to \infty$ верно соотношение*

$$1 + x_\varphi(t) = O(\lambda^{-1}). \tag{33}$$

Лемма 5. *Для значений t из промежутка $[t_2(\lambda)-h_2, t_2(\lambda)]$ функция $x_\varphi(t)$ является монотонно возрастающей, и имеет место равенство*

$$1 + x_\varphi(t) = \exp[-\lambda(t_2(\lambda)-t)][1+\psi(t,\lambda)], \tag{34}$$

где равномерно относительно указанных значений t и $\varphi(s) \in S$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\psi(t,\lambda) = 0.$$

Доказательство лемм 4 и 5. Равенство (33) для значений t из отрезка $[h_1+\delta, h_1+\delta+h_2]$ непосредственно вытекает из равенства

$$1 + x_\varphi(t) = [1 + x_\varphi(h_1+\delta)]\exp\Big[-\lambda\int_{h_1+\delta}^{t}\int_{-h_2}^{-h_1} dr(s)x_\varphi(\tau+s)d\tau\Big]$$

и неравенств $x_\varphi(t) > -1$ и (12). Для значений t из промежутка $[h_1+\delta+h_2, t_2(\lambda)]$ функция $x_\varphi(t)$ является монотонно возрастающей. Это следует из самого уравнения (7) и условия $x_\varphi(t) < 0$. Поэтому

$$x_m = x_\varphi(t_2(\lambda)-h_1) = \max_{h_1+h_2+\delta\leqslant t_2(\lambda)-h_1} x_\varphi(t). \tag{35}$$

Воспользуемся затем формулой

$$1 + x_\varphi(t) = [1 + x_m]\exp\Big[-\lambda\int_{t_2(\lambda)-h_1}^{t}\int_{-h_2}^{-h_1} dr(s)x_\varphi(\tau+s)d\tau\Big],$$

аналогичной (28), и положим в ней $t = t_2(\lambda)$. Используя, наконец, условие (35), получаем неравенство

$$1 \geqslant [1 + x_m] \exp[\lambda h_1 |x_m|].$$

Из этого неравенства уже легко следует, что

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(1 + x_m) = 0.$$

Пусть теперь $t \in [t_2(\lambda) - h_2, t_2(\lambda)]$. Учитывая в равенстве

$$1 + x_\varphi(t) = \exp[-\lambda \int_{t_2(\lambda)}^{t} \int_{-h_2}^{-h_1} dr(s) x_\varphi(\tau + s) ds]$$

соотношение (33), непосредственно получаем равенство (34).

Введем в рассмотрение оператор Π, который каждой функции $\varphi(s) \in S$ ставит в соответствие функцию $x_\varphi(s + t_2(\lambda))$. Из леммы 5 следует, что при достаточно больших λ выполнено включение $\Pi S \subset S$. Далее, из (34) и общих утверждений об операторах, преобразующих конусное множество в себя, сразу вытекает, что оператор Π имеет в S неподвижную точку $\varphi_0(s)$. При этом ясно, что функция $x_0(t, \lambda) = x_{\varphi_0}(t)$ есть периодическое решение с периодом $t_2(\lambda)$ уравнения (25), а функция $N(t, \lambda) = 1 + x_0(t, \lambda)$ — периодическое решение уравнения (20).

3. Доказательство теорем 2 и 3

В этом пункте найдем асимптотику $N(t, \lambda)$ при $\lambda \to \infty$. Считаем, что $N(0, \lambda) = 0$ и $\dot{N}(0, \lambda) > 0$. Будем использовать формулу

$$N(t, \lambda) = \exp[\lambda t - \lambda \int_0^t \int_{-h_2}^{-h_1} dr(s) N(\tau + s) d\tau]. \tag{36}$$

Фиксируем произвольно постоянную $\delta > 0$. На первом этапе найдём асимптотику $N(t, \lambda)$ на отрезке $[-T(\lambda)+h_1+2h_2+\delta, 0]$. Из лемм 4, 5 и равенства (17) вытекает, что при $\lambda \to \infty$ равномерно на отрезке $[-T(\lambda) + h_1 + h_2 + \delta, 0]$ выполнено соотношение

$$N(t, \lambda) = e^{\lambda t}[1 + O(1)].$$

Пусть в (36) $t \in [-T(\lambda) + h_1 + h_2 + \delta, 0]$. Тогда аргумент $N(\tau + s)$ в (36) принадлежит промежутку $[-T(\lambda) + h_1 + \delta, -h_1]$. Поэтому в правой части (36) для $N(\tau + s)$ справедливо последнее асимптотическое равенство. Используя этот факт, приходим к выводу, что равномерно относительно рассматриваемых значений t

$$N(t, \lambda) = e^{\lambda t}[1 + O(e^{-\lambda h_1})]. \tag{37}$$

Дальнейшая последовательность действий такова. Подставляя выражение (37) в правую часть (36), приходим к равенству типа (37), в котором будут выписаны слагаемые порядка $O(e^{-\lambda h_1})$ и улучшена степень точности до $O(e^{-2\lambda h_1})$. При этом необходимо рассматривать $N(t, \lambda)$ на несколько меньшем отрезке $[-T(\lambda)+h_1+2h_2+\delta, 0]$. Затем опять, подставляя получившееся выражение в (36), ещё более точно находим

$N(t,\lambda)$ (снова соответствующим образом уменьшая при этом промежуток изменения t) и т.д. Выпишем для примера формулы для $N(t,\lambda)$, которые легко получить в результате применения изложенного алгоритма. Соответствующий результат сформулируем в виде леммы.

Лемма 6. *Равномерно на отрезке* $[-T(\lambda)+h_1+2h_2+\delta,0]$ *имеют место следующие равенства. Первый случай:*

$$N(t,\lambda)=e^{\lambda t}[1-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(e^{\lambda(t-\delta_i)}-e^{-\lambda\delta_i})+O(e^{-2\lambda h_1})]; \tag{38}$$

второй случай:

$$N(t,\lambda)=e^{\lambda t}[1-\lambda\int_0^t e^{\lambda\tau}\int_{-h_2}^{-h_1} r_0(s)e^{\lambda s}dsd\tau+O(e^{-2\lambda h_1})]. \tag{39}$$

По поводу формулы (39) заметим, что

$$\lambda\int_0^t e^{\lambda\tau}\int_{-h_2}^{-h_1} r_0(s)e^{\lambda s}dsd\tau=\frac{\alpha_{0k}(k-1)!e^{-\lambda h_1}}{\lambda^{k+1}}(e^{\lambda t}-1)(1+O(\lambda^{-1})). \tag{40}$$

Второй этап. Найдем асимптотику $N(t,\lambda)$ на отрезке $[0,h_1]$. Аргумент $N(\tau+s,\lambda)$ в правой части (36) принадлежит в рассматриваемом случае промежутку $[-h_2,0]$, поэтому для $N(\tau+s,\lambda)$ можно воспользоваться представлением (38) или (39). Проводя соответствующие вычисления, получим следующий результат.

Лемма 7. *Равномерно на отрезке* $[0,h_1]$ *имеют место следующие равенства. Первый случай:*

$$N(t,\lambda)=\exp[\lambda t-\gamma_1 e^{\lambda t}]\cdot\Big[1+\gamma_1+\gamma_1^2e^{\lambda t}+\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2e^{2\lambda t}+O(e^{-2\lambda h_1})\Big]; \tag{41}$$

второй случай:

$$N(t,\lambda)=\exp\Big[\lambda t-\lambda\int_0^t e^{\lambda\tau}\int_{-h_2}^{-h_1} r_0(s)e^{\lambda s}dsd\tau\Big]\times$$
$$\times\Big[1+\lambda^2\int_0^t e^{\lambda\tau}\int_{-h_2}^{-h_1} r_0(s)e^{\lambda s}\int_0^{\tau+s}e^{\lambda\sigma}\int_{-h_2}^{-h_1} r_0(\xi)e^{\lambda\xi}d\xi d\sigma dsd\tau+O(e^{-2\lambda h_1})\Big]. \tag{42}$$

Здесь положено

$$\gamma_1=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie^{-\lambda\delta_i},\quad \gamma_2=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie^{-2\lambda\delta_i}.$$

Сделаем одно замечание. Степень точности при $\lambda\to\infty$ формул (41) и (42) зависит лишь от степени точности формул (38) и (39) на отрезке $[-h_2,0]$, следовательно, может быть неограниченно улучшена по порядку. Аналогичное замечание будет применимо ко всем приводимым ниже асимптотическим формулам.

Отметим ещё, что подобно (40) легко получить асимптотическое разложение последнего выражения в формуле (39). Приведем его:

$$\lambda^2 \int_0^t e^{\lambda\tau} \int_{-h_2}^{-h_1} r_0(s) e^{\lambda s} \int_0^{\tau+s} e^{\lambda\sigma} \int_{-h_2}^{-h_1} r_0(\xi) e^{\lambda\xi} d\xi d\sigma ds d\tau =$$
$$= \frac{\alpha_{0k}^2((k-1)!)^2}{\lambda^{2(k+1)}} e^{\lambda(t-2h_1)} \Big[\frac{e^{\lambda(t-h_1)}}{2^{k+2}} - 1 + O(\lambda^{-1})\Big].$$

Третий этап. Осталось показать, как найти асимптотику $N(t,\lambda)$ на отрезке $[h_1, m]$, где $m > h_2$ — произвольно фиксированная величина. Действительно, учёт в правой части равенства

$$N(t,\lambda) = N(h,\lambda) \exp\Big[\lambda(t-h_1) - \lambda \int_{h_1}^t \int_{-h_2}^{-h_1} dr(s) N(\tau+s) d\tau\Big]$$

асимптотического представления $N(t,\lambda)$ на отрезке $[h_1-h_2, h_1]$ позволяет построить асимптотику этой функции на отрезке $[h_1, h_1+h_2]$, а это, в свою очередь, приводит к асимптотическим формулам для $N(t,\lambda)$ на отрезке $[h_1+h_2, h_1+2h_2]$ и т.д. Соответствующие формулы весьма громоздки. Поэтому ограничимся здесь тем, что выпишем асимптотику на отрезке $[h_1, h_1+\delta]$ (где $\delta > 0$ и достаточно мало) и укажем порядок малости $N(t,\lambda)$ на отрезке $[h_1+\delta, m]$.

Лемма 8. *Равномерно на указанных ниже промежутках имеют место следующие равенства. Первый случай:*

$$N(t,\lambda) = \exp[\lambda t - \gamma_1 e^{\lambda t}][1 + \gamma_1 - \gamma_1^2 e^{\lambda t} + \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 e^{2\lambda t} + O(e^{-2\lambda h_1 + 3\delta})], \quad t \in [h_1, h_1+\delta],$$
$$N(t,\lambda) = \exp[-\frac{c(t,\lambda)}{\alpha_1} e^{\lambda(t-h_1)}], \quad t \in [h_1+\delta, m],$$

где функция $c(t,\lambda)$ такова, что

$$c(t,\lambda) = 1 + O(e^{-\frac{\lambda h_1}{2}});$$

второй случай:

$$N(t,\lambda) = \exp[\lambda t - \lambda \int_0^t e^{\lambda\tau} \int_{-h_2}^{-h_1} r_0(s) e^{\lambda s} ds d\tau] \cdot \Big[1 + O(e^{-\lambda h_1 + 3\delta}) +$$
$$+ \lambda^2 \int_0^t e^{\lambda\tau} \int_{-h_2}^{-h_1} r_0(s) e^{\lambda s} \int_0^{\tau+s} e^{\lambda\sigma} \int_{-h_2}^{-h_1} r_0(\xi) e^{\lambda\xi} d\xi d\sigma ds d\tau\Big], \quad t \in [h_1, h_1+\delta],$$
$$N(t,\lambda) = \exp\Big[-c(t,\lambda)\frac{\lambda^{k+1}}{\alpha_{k0}} e^{\lambda(t-h_1)}\Big], \quad t \in [h_1+\delta, m],$$

причем

$$c(t,\lambda) = 1 + O\big(e^{-\lambda h_1/2}\big).$$

Из лемм 6—8 легко следуют все формулы, приведённые в теоремах 2 и 3, кроме формулы для периода $T(\lambda)$.

Четвёртый этап. Найдём асимптотику $T(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$. Используем для этого равенство

$$T(\lambda) = \int_{-T(\lambda)+h_1+\delta}^{h_1+\delta} N(t,\lambda)dt,$$

которое следует из (23) и (24). Интеграл правой части этого равенства удобно разбить на два:

$$\int_{-T(\lambda)+h_1+\delta}^{-m} N(t,\lambda)dt + \int_{-m}^{h1+\delta} N(t,\lambda)dt = T(\lambda). \tag{43}$$

На промежутке $[-T(\lambda)+h_1+\delta, -m]$ ($m > 0$ — произвольно фиксировано) равномерно относительно t верно равенство $N(t,\lambda) = O(e^{-\lambda m})$, поэтому первый интеграл в (43) допускает оценку

$$\int_{-T(\lambda)+h_1+\delta}^{-m} N(t,\lambda)dt \leqslant ce^{-\lambda m}T(\lambda), \tag{44}$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от λ. Второй интеграл в (43) вычисляется, используя асимптотическое разложение $N(t,\lambda)$ на промежутке $[-m, h_1+\delta]$. Из (44) получаем, что

$$T(\lambda) = \int_{-m}^{h_1+\delta} N(t,\lambda)dt[1 + O(e^{-\lambda m})].$$

Приведём здесь формулу для $T(\lambda)$ с точностью до $O(e^{-2\lambda h_1})$.

Лемма 9. *Имеют место следующие равенства. Первый случай:*

$$T(\lambda) = \frac{1}{\lambda\gamma_1}\Big[1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} + O(e^{-2\lambda h_1})\Big],$$

второй случай:

$$T(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big[\lambda t - \lambda\int_0^t e^{\lambda\tau}\int_{-h_2}^{-h_1} r_0(s)e^{\lambda s}dsd\tau\Big]\cdot\Big[1+ \\ + \lambda^2\int_0^t e^{\lambda\tau}\int_{-h_2}^{-h_1} r_0(s)e^{\lambda s}\int_0^{\tau+s} e^{\lambda\sigma}\int_{-h_2}^{-h_1} r_0(\xi)e^{\lambda\xi}d\xi d\sigma dsd\tau\Big]dt\cdot[1 + O(e^{-2\lambda h_1})].$$

Последняя формула легко трансформируется в соответствующую формулу теоремы 3.

В заключение этого пункта сделаем несколько замечаний. Во-первых, результаты, сформулированные в п. 1, и все формулы, приведённые после теоремы 3, кроме последней, сохраняются и в том случае, когда $h_1 = 0$ и $k > 0$. Второе замечание относится к поведению $N(t,\lambda)$ в «первом» случае. Из полученных выше формул видно, что промежуток $[h_1, h_2]$ можно разбить на несколько (а именно на n участков, на которых $N(t,\lambda)$ сначала резко убывает при увеличении t, а затем изменяется относительно плавно. Длина промежутка, на котором происходит резкое (сверхэкспоненциальное) убывание, имеет порядок $O(\frac{\ln\lambda}{\lambda})$. Заметим, наконец, что такого же типа формулы для $N(t,\lambda)$ легко получить в случае более общей функции $r(s)$, удовлетворяющей условиям теоремы 1.

4. Завершение обоснования теоремы 1

Сначала докажем экспоненциальную устойчивость $N(t,\lambda)$ при достаточно больших значениях λ. Линеаризуем для этого уравнение (25) на решении $x_0(t,\lambda)$ и в полученном уравнении произведём замену

$$x = y\exp[-\lambda\int_0^t\int_{-h_2}^{-h_1} dr(s)x_0(\tau+s,\lambda)d\tau].$$

Отметим, что $y(t)$ здесь умножается на периодическую функцию. В результате этой замены придем к уравнению

$$\dot{y} = -\lambda\int_{-h_2}^{-h_1} dr(s)[1+x_0(\tau+s,\lambda)]y(t+s). \tag{45}$$

Задача об устойчивости решений (45) полностью эквивалентна задаче изучения спектра оператора T сдвига за период этого уравнения. Представим этот оператор в удобном для дальнейших исследований виде. Обозначим сначала через $C_{[-h_2,0]}$ банахово пространство непрерывных на отрезке $[-h_2,0]$ функций $y(s)$. Норму введем стандартным образом:

$$\|y(s)\| = \max_{-h_2\leqslant s\leqslant 0}|y(s)|.$$

Пусть $T(t,\tau)$ — оператор Коши уравнения (45). Напомним, что он при $t>\tau$ определён и действует в $C_{[-h_2,0]}$. Оператор T сдвига за период представим в виде

$$Ty(s) = T_2T_1y(s).$$

Здесь

$$T_1y(s) = T(-h_1,-T(\lambda)+h_1+h_2+\delta)y(s), \quad T_2y(s) = T(h_1+h_2+\delta,-h_1)y(s),$$

где δ — произвольное положительное число.

Изучим отдельно каждый из операторов T_1 и T_2.

Лемма 10. *Для всех достаточно больших λ существует такое коразмерности I подпространство E пространства $C_{[-h_2,0]}$, что для всех $y(s)\in E$ выполнено неравенство*

$$\|T_1y(s)\| \leqslant c_1\exp[-c_2e^{\lambda h_1}]\|y(s)\|, \tag{46}$$

где положительные постоянные c_1 и c_2 не зависят от λ и от $y(s)\in E$.

Лемма 11. *Имеет место неравенство*

$$\|T_2y(s)\| \leqslant c_3e^{c_4\lambda}\|y(s)\|, \tag{47}$$

где положительные постоянные c_3 и c_4 не зависят от λ и $y(s)\in C_{[-h_2,0]}$.

Из этих утверждений легко вытекает обоснование экспоненциальной орбитальной устойчивости $x_0(t,\lambda)$. В самом деле, из неравенств (46) и (47) следует, что на подпространстве E верно неравенство

$$\|Ty(s)\| \leqslant q(\lambda)\|y(s)\|, \quad lim_{\lambda\to\infty}q(\lambda) = 0.$$

Отсюда делаем вывод о том, что весь спектр вполне непрерывного оператора T, кроме, может быть, одного простого собственного значения, лежит в области комплексной плоскости, выделяемой неравенством $|\lambda| \leqslant q(\lambda)$. С другой стороны, как известно, оператор T имеет единичное собственное значение. Таким образом, поведение всего спектра изучено. Завершение доказательства экспоненциальной орбитальной устойчивости $x_0(t,\lambda)$ вытекает теперь из общих утверждений теории уравнений с периодическими коэффициентами.

Доказательство леммы 10. Уравнение (45) рассмотрим на отрезке $[-T(\lambda)+h_1+h_2+\delta, -h_1]$ длины $T_0(\lambda) = T(\lambda) - 2h_1 - h_2 - \delta$. Для функции $T(\lambda)$ параметра λ при каждом $\varepsilon_0 > 0$ верны неравенства

$$\frac{1}{\lambda} c_{\varepsilon_0} e^{\lambda(h_1+\varepsilon_0)} \geqslant T(\lambda) \geqslant \frac{1}{\lambda} c e^{\lambda h_1},$$

поэтому для $T_0(\lambda)$ верны аналогичные неравенства

$$\frac{1}{\lambda} c_{\varepsilon_0} e^{\lambda(h_1+\varepsilon_0)} \geqslant T_0(\lambda) \geqslant \frac{1}{\lambda} c e^{\lambda h_1}, \tag{48}$$

в которых положительные постоянные c_{ε_0} и c, вообще говоря, другие. Отметим, что они не зависят от λ. Продолжим затем коэффициенты уравнения (45) на всю числовую ось по периодичности с периодом $T_0(\lambda)$. Тогда оператор T_1 является оператором сдвига за период нового уравнения. Рассмотрим решения Флоке этого уравнения:

$$y_0(t) = g(t)e^{\delta t}, \quad \delta = \delta_1 + i\delta_2,$$

где $g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$ периодична по t. Без потери общности можно считать, что $(t_0 \leqslant -h_1$

$$\max_t |g_1(t)| = g_1(t_0) = 1 > \max_t |g_2(t)|, \quad g_2(t_0) = 0.$$

Подставим $y_0(t)$ в соответствующее уравнение и положим там $t = t_0$. Выделяя вещественную часть равенства, находим, что

$$\delta_1 = -\lambda \int_{-h_2}^{-h_1} dr(s)[1 + x_0(t_0+s,\lambda)]e^{\delta_1 s} \cdot [g_1(t_0+s)\cos\delta_2 s + g_2(t_0+s)\sin\delta_2 s]. \tag{49}$$

Для функции $x_0(t,\lambda)$ на отрезке $[-T_0(\lambda) - h_1, -2h_1]$ выполняется соотношение

$$1 + x_0(t,\lambda) = O(e^{-2\lambda h_1}).$$

Из равенства (49) тогда получаем оценку для δ_1:

$$|\delta_1| = c\lambda e^{-2\lambda h} \left\{ \begin{array}{lll} e^{-\delta_1 h_1}, & \text{если} & \delta_1 \geqslant 0, \\ e^{-\delta_1 h_2}, & \text{если} & \delta_1 < 0, \end{array} \right. \tag{50}$$

где $c > 0$ — некоторая универсальная постоянная. Множество всех δ_1, удовлетворяющих (50), можно разбить на два подмножества так, что для элементов одного из них выполнено условие

$$\delta_1 = O(\lambda e^{-2\lambda h_1}), \tag{51}$$

а для всех остальных δ_1, удовлетворяющих (50), верно неравенство

$$\delta_1 \leqslant -\frac{2h_1}{h_2}\lambda. \tag{52}$$

На следующем этапе установим, что соотношению (51) удовлетворяет лишь одно значение δ_1. Для этого в рассматриваемом для функции $y_0(t)$ уравнении произведём замены

$$t = T_0(\lambda)\tau, \quad y(t) = z(\tau).$$

В результате придем к уравнению

$$\dot{z} = -\lambda T_0(\lambda)\int_{-h_2}^{-h_1} dr(s)[1 + x_0(T_0(\lambda)\tau + s, \lambda)]z(\tau + \frac{s}{T_0(\lambda)}). \tag{53}$$

Из свойств функции $x_0(t,\lambda)$ и из неравенств (48) вытекает, что правая часть последнего уравнения допускает оценку

$$|\lambda T_0(\lambda)\int_{-h_2}^{-h_1} dr(s)[1 + x_0(T_0(\lambda)\tau + s, \lambda)]z(\tau + \frac{s}{T_0(\lambda)})| \leqslant$$
$$\leqslant c_{\varepsilon_0} e^{-\lambda(h_1-\varepsilon_0)}\|z(\tau + \frac{s}{T_0(\lambda)})\|, \tag{54}$$

где построенная c_{ε_0} не зависит от λ. Наряду с (53) на том же промежутке рассмотрим ещё одно уравнение с малым параметром $\mu > 0$:

$$\dot{u} = \mu u(t-1) - \lambda T_0(\lambda)\int_{-h_2}^{-h_1} dr(s)[1 + x_0(T_0(\lambda)\tau + s, \lambda)]u(\tau + \frac{s}{T_0(\lambda)}). \tag{55}$$

При каждом фиксированном μ к этому уравнению применимы выводы асимптотической теории уравнений с близкими к постоянным коэффициентами [24]. Отметим, что близость коэффициентов (55) к постоянным обеспечивается неравенством (54). Из результатов этой теории вытекает, что уравнение (55) при каждом фиксированном и достаточно малом μ имеет ровно один неотрицательный показатель Флоке, а все остальные удовлетворяют неравенству

$$\mathrm{Re}\,\gamma \leqslant -\frac{1}{2}\ln\mu. \tag{56}$$

Фиксируем затем λ и устремляем μ к нулю. Примерно так же, как и при выводе оценок (51) и (52), убеждаемся в том, что ни один из показателей Флоке, удовлетворяющий при каком-то (малом) μ неравенству (56), не может при уменьшении μ попасть в окрестность мнимой оси на комплексной плоскости. Таким образом, при $\mu = 0$ уравнение (55) имеет лишь один показатель Флоке, лежащий при больших λ в окрестности мнимой оси. Остаётся теперь заметить, что уравнение (55) при $\mu = 0$ совпадает с (53).

Теперь доказательство леммы завершается просто. Действительно, так как все (кроме одного) показатели Флоке удовлетворяют условию (52), существует такое коразмерности I подпространство E пространства $C_{[-h_2,0]}$, что решения с начальными условиями при $t = -T_0(\lambda) - h_1$ из E удовлетворяют неравенству

$$\|x(t+s)\| \leqslant c_\varepsilon(\lambda)\exp[(\lambda\delta_1 + \varepsilon)(t + T_0(\lambda) + h_1)] \cdot \|x(-T_0(\lambda) - h_1 + s)\|. \tag{57}$$

В этом неравенстве $\varepsilon > 0$ — произвольно. Из результатов работы [24] легко получить важный вывод о том, что зависимостью $c_\varepsilon(\lambda)$ от параметра λ можно пренебречь. Чтобы теперь получить соотношение (46), осталось в (57) положить $t = -h_1$ и воспользоваться неравенствами (48). Лемма доказана.

Лемма 11 доказывается проще. Действительно, интегрируя левую и правую части (45) от $-h_1$ до t, получим выражение

$$y(t) = y(-h_1) - \lambda \int_{-h_1}^{t} \int_{-h_2}^{-h_1} dr(s)[1 + x_0(\tau + s, \lambda)]y(\tau + s)d\tau.$$

На промежутке $[-h_1 - h_2, h_1 + h_2 + \delta]$ функция $1 + x_0(s, \lambda)$ оценивается сверху (при больших λ постоянной $c_\varepsilon e^{\lambda(h_1+\varepsilon)}$, где $\varepsilon > 0$ — произвольно, а c_ε не зависит от λ). Поэтому

$$|y(t)| \leqslant |y(-h_1)| + c_\varepsilon \lambda e^{\lambda(h_1+\varepsilon)} \int_{-h_1}^{t} \int_{-h_2}^{-h_1} dr(s)y(\tau + s)d\tau.$$

Отсюда приходим к оценке

$$\|y(t + s)\| \leqslant \|y(-h_1 + s)\| \exp[\delta_0 t], \tag{58}$$

где δ_0 — наибольший положительный корень уравнения

$$\delta = \lambda c_\varepsilon e^{\lambda(h_1+\varepsilon)} \int_{-h_2}^{-h_1} dr(s)e^{\delta s}.$$

Ясно, что найдется такая $c > 0$, что

$$\delta_0 \leqslant c\lambda.$$

Учитывая это неравенство в (58), приходим к обоснованию леммы.

Последнее, что осталось сделать, — это доказать единственность периодического решения, удовлетворяющего условию (22). От решений $N(t)$ уравнения (20) перейдём к решению $x = N - 1$ уравнения (25). Из формулы типа (28) вытекает, что любое решение с начальным условием, удовлетворяющим неравенству (эквивалентному (22))

$$1 < x(s) \leqslant \delta_0 - 1,$$

при увеличении t и достаточно больших λ попадает (при некотором значении t) в множество S. Единственность периодического решения $N(t, \lambda)$ вытекает теперь из его экспоненциальной устойчивости и того, что все решения (25) с начальными условиями из S являются асимптотически устойчивыми. Последнее легко обосновать в рамках идей, используемых при обосновании лемм 4, 10, 11. Подробнее на этом останавливаться не будем. Теорема 1 доказана.

5. О некоторых обобщениях полученных результатов

Условие $\lambda \to \infty$ на биологическом языке означает, что мальтузианский коэффициент линейного роста популяции достаточно велик. Естественно рассмотреть и несколько иную задачу. Пусть $h_1 \to \infty$, т.е. большим параметром является минимальный возраст производителей вида. Для изучения этого случая произведём в уравнении (20) замены

$$t = h_1\tau, \quad N(h_1\tau) = M(\tau).$$

В результате получим уравнение

$$\dot{M} = \overline{\lambda}\Big[1 - \int_{-h_2/h_1}^{-1} dr(h_1 s)M(\tau + s)\Big]M, \tag{59}$$

где $\overline{\lambda} = \lambda h_1$. Оказывается, что к уравнению (59) применима схема исследования, использованная в случае $\lambda \to \infty$. Не выписывая явно формулы для периодического решения (59), сделаем один вывод. Если ранее (при условии $\lambda \to \infty$) в асимптотических формулах для периодического решения основной вклад зависел лишь от поведения $r(s)$ в точке $s = -h_1$, то при $\overline{\lambda} \to \infty$ существенный вклад могут давать значения $r(s)$ при всех $s \in [-h_2, -h_1]$.

Отметим, что все рассмотренные выше задачи с биологической точки зрения не слишком осмысленны. Однако решение этих задач может быть весьма полезно при выяснении характера стационарных режимов, возникающих в соответствующих дифференциальных уравнениях при небольших значениях параметров.

И ещё одно естественное обобщение. Теорема 1 и методика получения асимптотически при $\lambda \to \infty$ периодического решения полностью применима для более общего уравнения

$$\dot{N} = \lambda\Big[1 - \int_{-h_2}^{-h_1} dr(s)N^{\alpha}(\tau + s)\Big]^{2n+1}N,$$

где $\alpha > 0$, а целое $n \geqslant 0$. Анализ различных характеристик периодического решения уравнения (20) позволяет понять механизм формирования логистического закона, т. е. более глубоко выявить причины, объясняющие преимущества уравнения (20).

3. Уравнение Хатчинсона с малой миграцией

Как уже отмечалось выше, уравнение

$$\dot{N} = \lambda N[1 - N(t - 1)] \tag{60}$$

при достаточно больших значениях мальтузианского коэффициента λ имеет устойчивое, медленно осциллирующее периодическое с периодом $T(\lambda)$ решение $N_0(t)$, которое совершает ровно один всплеск на некотором отрезке длины периода и для него выполнены асимптотические при $\lambda \to \infty$ равенства:

$$\begin{aligned} &T(\lambda) = \exp\lambda(1 + o(1));\\ &\max_t N_0(t) = \exp\lambda(1 + o(1)); \quad \min_t N_0(t)) = \exp[-\exp\lambda(1 + o(1))]. \end{aligned} \tag{61}$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим вопрос о поведении решений уравнения Хатчинсона с малой миграцией

$$\dot{N} = \lambda N[1 - N(t - 1)] + \varepsilon \tag{62}$$

при достаточно больших значениях λ. Сформулируем основной вывод. Уравнение (62) (при $\lambda \geqslant \lambda_0$) имеет устойчивое, медленно осциллирующее $T_\varepsilon(\lambda)$ — периодическое решение $N_\varepsilon(t)$ с одним всплеском на периоде, причём

$$T_\varepsilon(\lambda) = 2 + o(1); \quad \max_t N_\varepsilon(t) = \exp\lambda(1 + o(1)); \quad \min_t N_\varepsilon(t) = \exp(-\lambda(1 + o(1))).$$

Таким образом, при $\varepsilon > 0$ существенно уменьшился период колебаний и увеличился минимум численности, что позволяет сделать вывод о стабилизации решений.

Приведём асимптотические формулы для $N_\varepsilon(t)$. Здесь и ниже $\delta > 0$ будем обозначать произвольную, достаточно малую, но не зависящую от λ, постоянную. При $t \in [1, 0-\delta]$ имеем $N_\varepsilon(t) = \exp \lambda t(1 + o(1))$, а при $t \in [1+\delta, 2]$ имеем $N_\varepsilon(t) = \varepsilon\lambda^{-1} \exp[-\lambda(t - 1 + o(1))]$. Формулы для малых промежутков $[1-\delta, 1+\delta]$ и $[2, T_\varepsilon(\lambda)$ из-за громоздкости приводить не будем. Примерный вид периодического решения $N_\varepsilon(t)$ приведён на рис. 2.

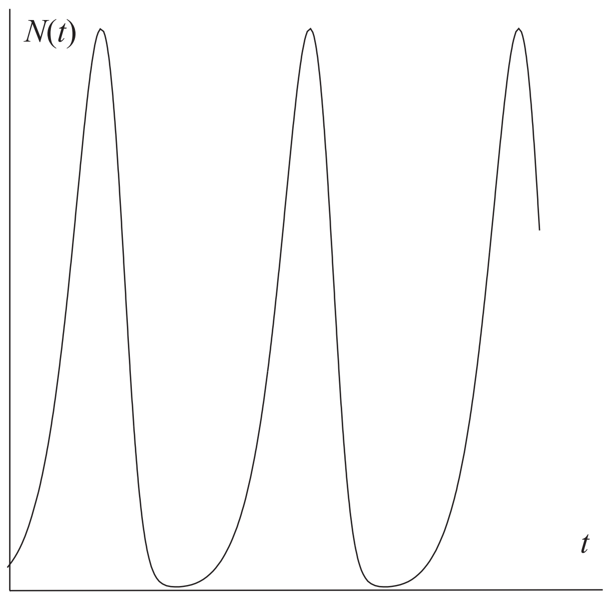

Рис. 2.

Быстро осциллирующие решения уравнения Хатчинсона с миграцией. Как уже отмечалось, уравнение (60) имеет и быстро осциллирующие периодические решения [7], которые неустойчивы и количество которых неограниченно растёт при $\lambda \to \infty$. Периоды этих решений меньше 1, а порядок (при $\lambda \to \infty$) наибольшего и наименьшего значений тот же, что и у $N_0(t)$. Главной их отличительной особенностью является то, что на промежутке длины периода они имеют один всплеск, причем длительность его имеет порядок $\exp[-\lambda(1 + o(1))]$, т.е. она чрезвычайно мала. Для уравнения (62) ситуация принципиально иная. Сначала опишем режимы с одним всплеском на промежутке запаздывания $[-1, 0]$. Для этого фиксируем произвольно два таких числа ξ_1 и ξ_2, что $-1 < \xi_1 < \xi_2 < 0$ и $S(\xi)$ $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, обозначим множество таких непрерывных на $[-1, 0]$ функций $\varphi(s)$, которые удовлетворяют следующим свойствам:

1. $\varphi(s) > 0$; $\varphi(\xi_1) = \varphi(\xi_2) = \varphi(0) = 1$; $\varphi(s) < 1$ при $s \in [-1, \xi_1) \bigcup (\xi_2, 0)$ и $\varphi(s) > 1$ при $s \in (\xi_1, \xi_2)$;
2. $\varphi(s) \geqslant \frac{1}{2} \exp \lambda(s - \xi_1)$ при $s \in [\xi_1, \xi_2 - \delta]$;
3. $\int_{-1}^{\xi_1} \varphi(s) ds + \int_{\xi_2}^{0} \varphi(s) ds \leqslant \lambda^{-1/2}$.

Обозначим $N(t, \varphi)$ решение (62) с начальным условием $\varphi(s) \in S(\xi)$. Изучим асимптотику этой функции при $\lambda \to \infty$. Пусть сначала $t \in [0, 1+\xi_1]$. Тогда $N(t, \varphi) =$

$\exp\lambda t[1+o(1)]$. Обозначим $t_1(\varphi)$, $t_2(\varphi),\ldots$ последовательные положительные нули функции $N(t,\varphi)-1$. Рассмотрим затем $N(t,\varphi)$ при $t\in[1+\xi_1,1+\xi_2]$. В результате приходим к выводу, что $t_1(\varphi)=1+\xi_1+o(1)$ и $N(t,\varphi)=o(1)$ при $t\in[1+\xi_1+\delta,1+\xi_2]$. На следующем шаге получаем, что $t_2(\varphi)=1+\xi_2+o(1)$. Введём в рассмотрение оператор Π, который ставит функции $\varphi(s)\in S(\xi)$ в соответствие с функцией $N(s+t_2(\varphi),\varphi)$: $\Pi(\varphi(s))=N(s+t_2(\varphi),\varphi)$, $s\in[-1,0]$. Из асимптотических формул для $N(t,\varphi)$ вытекает, что $N(s+t_2(\varphi),\varphi)\in S(\overline{\xi})$, где $\overline{\xi}=(\overline{\xi}_1,\overline{\xi}_2)$ и $\overline{\xi}_1=-1-\xi_2+o(1)$, $\overline{\xi}_2=\xi_1-\xi_2+o(1)$. Таким образом, поведение $N(t,\varphi)$ определяется в основном динамикой изменения параметров $\xi_{1,n}$ и $\xi_{2,n}$ $(n=0,1,2,\ldots)$, а динамика последних в главном описывается отображением $\xi_{1,n+1}=-1-\xi_{2,n}$; $\xi_{2,n+1}=\xi_{1,n}-\xi_{2,n}$. Для $z_n=-1-\xi_{1,n}$ приходим к уравнению

$$z_{n+2}+z_{n+1}+z_n=1. \tag{63}$$

Отсюда

$$z_n=(1+\xi_{1,n})=-\xi_{2,n-1}=1/3+\alpha\exp[2\pi in/3]+\overline{\alpha}\exp[-2\pi in/3],$$

а произвольная комплексная α определяется начальными данными. Таким образом, уравнение (62) имеет семейство (быстро осциллирующих) решений, динамика которых описывается отображением (64). Можно утверждать, что такая структура решений (с начальными условиями из $S(\xi)$) сохраняется в течение асимптотически большого — порядка λ — отрезка времени. Вывод о том, что и при $t\to\infty$ структура таких решений не изменится, сделать нельзя: в силу негрубости отображения (63) «малые» добавки с течением времени могут накапливаться.

Рассмотренная здесь ситуация обобщается на решения, число всплесков которых на отрезке запаздывания $[-1,0]$ равно m, где m — произвольна. Аргумент ξ в выражении $S(\xi)$ состоит теперь из $2m$ компонент $\xi_1,\ldots,\xi_{2m}$. По аналогии с (63) для описания динамики изменения величин ξ_{jn} приходим к отображению $z_{n+2m}+z_{n+2m-1}+\cdots+z_n=1$, а значит,

$$z_n=(2m+1)^{-1}+\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\exp\frac{2\pi in}{2j+1}+\overline{\alpha}_j\exp\frac{-2\pi in}{2j+1}).$$

Особенности уравнения Хатчинсона с двумя запаздываниями и с малой миграцией. Рассмотрим уравнение

$$\dot{N}=\lambda N[1-\alpha N(t-1)-(1-\alpha)N(t-h)]+\varepsilon, \tag{64}$$

где $h>1$; $\alpha\in(0,1)$; $\lambda\gg1$.

Отметим (глава 1), что при $\varepsilon=0$ динамика (64) одна и та же для каждого $\alpha\in(0,1)$: имеется устойчивое медленно осциллирующее периодическое решение, для которого верны формулы (61). При $\varepsilon>0$ существует устойчивое периодическое решение $N(t,\varepsilon)$, период которого близок к $1+h$ (при $\lambda\to\infty$). Структура этого решения существенно зависит от величины h.

Пусть сначала $1<h<2$. В этом случае $N(t,\varepsilon)$ имеет на отрезке длины периода один всплеск, длительность которого близка к 1.

При условии $2 < h < 3$ на периоде имеется два всплеска функции $N(t, \varepsilon)$ длительностями, близкими к 1 и $h - 2$ (на каждом из этих всплесков достигаются экспоненциально большие по λ значения), а расстояния между всплесками близки к 1 (см. рис. 3).

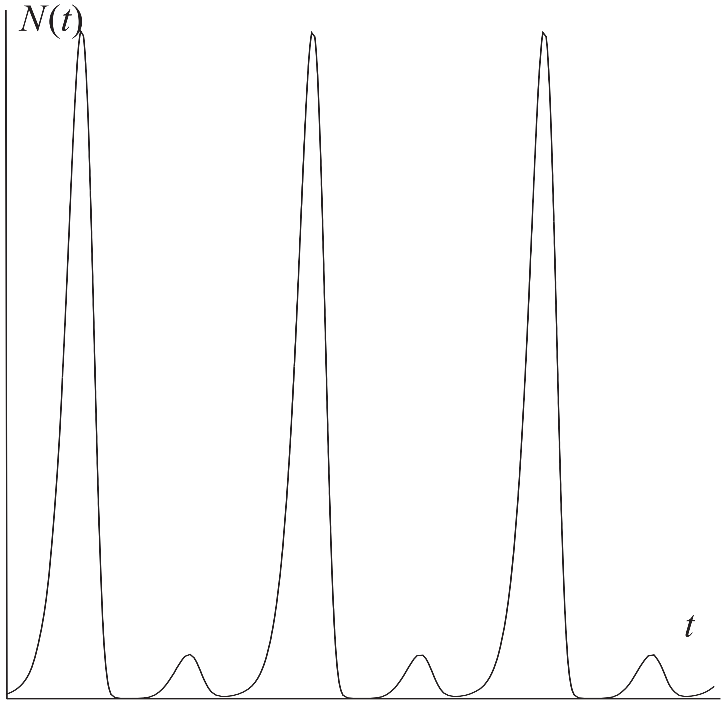

Рис. 3.

Если $3 < h < 4$, то на периоде имеется тоже два всплеска. Длительность каждого из них близка к 1, а расстояния между последовательными всплесками принимают поочерёдно два значения: ≈ 1 и $\approx h - 2$

В случае $4 < h < 5$ на периоде имеем три всплеска, длительности двух из них ≈ 1, а длительность третьего $\approx h - 4$. Расстояния между всплесками близки к 1. При $5 < h < 6$ — тоже три всплеска, длительности которых ≈ 1, но временные расстояния между всплесками последовательно принимают значения $1 + o(1)$; $1 + o(1)$; $h - 2 + o(1)$ и т.д.

Таким образом, замена в (62) выражения $N(t - 1)$ на $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j N(t - h_j)$ существенно изменяет динамические свойства решений.

4. Асимптотика релаксационных колебаний в математической модели реакции Белоусова

Для математического описания ставшей классической реакции Белоусова в работе [25] была предложена система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= r_1[1 + a(1 - N_3) - N_1]N_1; \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2[N_1 - N_2]N_2, \\ \frac{dN_3}{dt} &= r_3[N_2 - N_3]N_3, \end{aligned} \tag{65}$$

где $N_j(t)$ $(j = 1, 2, 3)$ — плотности трёх основных компонент реакции: бромата, церия и бромида.

Вывод системы (65) и её соответствие динамике реакций обсуждены в работе [25]. Там же изложены результаты локального и численного анализа, на основе которых сформулированы выводы качественного характера и получены некоторые количественные оценки параметров задачи (из этих оценок, в частности, вытекает, что параметр a достаточно велик).

Исследуем здесь задачу о построении релаксационных установившихся режимов при достаточно больших значениях параметра a.

По смыслу задачи следует рассмотреть поведение лишь тех решений, все три координаты которых положительны. Отметим сначала два факта из [26]. Во-первых, среднее на промежутке $(0, +\infty)$ значение каждой координаты каждого решения системы (65) равно 1. Во-вторых, при всех достаточно больших значениях a состояние равновесия $N_j(t) \equiv 1$ $(j = 1, 2, 3)$ неустойчиво колебательным образом: два из трёх собственных значений матрицы, получающейся в результате линеаризации на этом состоянии равновесия, имеют положительные вещественные части и ненулевые мнимые. Таким образом, необходимо изучить лишь такие решения (65), которые бесконечно долго колеблются около положительного состояния равновесия. Отсюда вытекает, что для исследования установившихся режимов достаточно рассмотреть решения с начальными условиями (которые удобно задавать при $t = 0$).

$$N_1|_{t=0} = 1; \quad N_2|_{t=0} = \alpha; \quad N_3|_{t=0} = \beta; \quad 0 < \alpha; \quad \beta < 1. \tag{66}$$

Это означает, что начальный момент совпадает с началом всплеска значений N_1, и значения N_2 и N_3 ниже своего среднего уровня.

Прежде чем сформулировать основной результат, введём несколько обозначений: $N_j(t, \alpha, \beta)$ $(j = 1, 2, 3)$ — решения (65) с начальными условиями (66), а $t_k(\alpha, \beta)$; $\tau_k(\alpha, \beta)$ и $\xi_k(\alpha, \beta)$ $(k = 1, 2)$ — последовательные неотрицательные корни уравнений $N_1(t, \alpha, \beta) = 1$; $N_2(t, \alpha, \beta) = 1$ и $N_3(t, \alpha, \beta) = 1$ соответственно $(t_1(\alpha, \beta) = 0)$. Оператор последования π введём по правилу

$$\pi(\alpha, \beta) = (N_2(t_3(\alpha, \beta), \alpha, \beta); N_3(t_3(\alpha, \beta), \alpha, \beta)).$$

Наконец, обозначим $S(A, B)$ внутренность прямоугольника $[0, A] \times [0, B]$, а S_a — прямоугольник:

$$S_a = \Big[\frac{1}{\ln a}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{\ln a}}\Big); \frac{1}{\ln a}\Big(1 + \frac{1}{\sqrt{\ln a}}\Big)\Big] \times \Big[\frac{r_2 + r_3}{r_3 \ln a}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{\ln a}}\Big); \frac{r_2 + r_3}{r_3 \ln a}\Big(1 + \frac{1}{\sqrt{\ln a}}\Big)\Big].$$

Основной результат: найдутся такие универсальные значения $a_0 > 0$; $\alpha_0 > 0$ и $\beta_0 > 0$, что при всех $a \geqslant a_0$ и $0 < \alpha \leqslant \alpha_0$, $0 < \beta \leqslant \beta_0$ выражение $t_3(\alpha, \beta)$ является простым корнем уравнения $N_1(t, \alpha, \beta) = 1$ и верно включение

$$\pi(\alpha, \beta) \subset S_a. \tag{67}$$

Таким образом, в фазовом пространстве системы (65) выделен достаточно «узкий» аттрактор с достаточно большой областью притяжения.

Из (67) следует, что $\pi(S(\alpha_0, \beta_0)) \subset S_a$, а учитывая, что (при больших a) $S_a \subset S(\alpha_0, \beta_0)$, приходим к выводу, что оператор π имеет в S_a неподвижную точку $(\alpha(a), \beta(a))$, которой соответствует периодическое решение $N_j(t, \alpha(a), \beta(a))$ $(j = 1, 2, 3)$. Исследовать вопрос об устойчивости этого решения и о количестве периодических решений с начальными условиями из S_a не удаётся. В работе [25] отмечалось, что при численном счёте процесс установления периодического решения происходит довольно долго. Возможно, это связано с тем, что периодических решений с начальными условиями из S_a достаточно много, либо реализуется случай, близкий к критическому в задаче об устойчивости $N(t, \alpha(a), \beta(a))$.

Приведём асимптотики основных характеристик решений с начальными условиями из S_a. Сразу отметим, что главные члены этих асимптотик одни и те же для каждого из таких решений. Все фигурирующие ниже выражения вида $o(1)$ выполняются при $\alpha \to \infty$ равномерно по всем $(\alpha, \beta) \in S_a$.

Во-первых, промежуток времени между началом некоторого всплеска и началом следующего за ним всплеска каждой из функций $N_j(t, \alpha, \beta)$ $((\alpha, \beta) \in S_a)$ равен $(1 + o(1)) \times r_2^{-1} \ln a$, т.е. для $k = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}
&t_{2k+1}(\alpha, \beta) - t_{2k-1}(\alpha, \beta) = r_2^{-1}(1 + o(1)) \ln a;\\
&\tau_{2k+1}(\alpha, \beta) - \tau_{2k-1}(\alpha, \beta) = r_2^{-1}(1 + o(1)) \ln a;\\
&\xi_{2k+1}(\alpha, \beta) - \xi_{2k-1}(\alpha, \beta) = r_2^{-1}(1 + o(1)) \ln a.
\end{aligned}$$

В частности, период функций $N_j(t, \alpha(a), \beta(a))$ равен $r_2^{-1}(1 + o(1)) \ln a$.

Во-вторых, при $k = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}
&t_{2k}(\alpha, \beta) - t_{2k-1}(\alpha, \beta) = (r_1^{-1} + r_2^{-1})(1 + o(1)) a^{-1} \ln a;\\
&\tau_{2k-1}(\alpha, \beta) - t_{2k-1}(\alpha, \beta) = (r_2 a)^{-1}(1 + o(1)) \ln a;\\
&\xi_{2k-1}(\alpha, \beta) - t_{2k-1}(\alpha, \beta) = (r_1^{-1} + r_2^{-1}) a^{-1}(1 + o(1)) \ln a.
\end{aligned}$$

Приведённые соотношения означают, что продолжительность всплеска функции $N_1(t, \alpha, \beta)$, а также промежуток времени между началом всплеска этой функции и следующим за ним началом всплеска $N_3(t, \alpha, \beta)$ равны $(r_1^{-1} + r_2^{-1}) a^{-1}(1 + o(1)) \ln a$. Промежуток времени между началами всплесков N_1 и N_2 равен $(r_2 a)^{-1}(1 + o(1)) \ln a$.

В-третьих, продолжительность всплесков функций $N_2(t, \alpha, \beta)$ и $N_3(t, \alpha, \beta)$ равна $r_2^{-1}(1 + o(1))$ и $(r_2^{-1} + r_3^{-1})(1 + o(1))$ соответственно. В терминах $\tau_k(\alpha, \beta)$ и $\xi_k(\alpha, \beta)$ это означает, что

$$\begin{aligned}
&\tau_{2k}(\alpha, \beta) - \tau_{2k-1}(\alpha, \beta) = r_2^{-1}(1 + o(1));\\
&\xi_{2k}(\alpha, \beta) - \tau_{2k-1}(\alpha, \beta) = (r_2^{-1} + r_3^{-1})(1 + o(1)), \quad k = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Отметим, что в начале всплеска функция N_1 экспоненциально (с показателем порядка a) возрастает, а затем происходит сверхэкспоненциальное падение её значений. Для функций N_2 и N_3 ситуация обратная: в начале всплеска они совершают быстрый подъем, а длительность промежутка убывания их значений близка к r_2^{-1} и $(r_2^{-1}+r_3^{-1})$ соответственно. Тем не менее площади всплесков у функций примерно равны:

$$\int_{\Delta_{jk}} N_j(t,\alpha,\beta)dt = (1+o(1))r_2^{-1}\ln a \quad (j=1,2,3),$$

где $\Delta_{1k} = [t_{2k-1}(\alpha,\beta), t_{2k}(\alpha,\beta)]$; $\Delta_{2k} = [\tau_{2k-1}(\alpha,\beta), \tau_{2k}(\alpha,\beta)]$;
$\Delta_{3k} = [\xi_{2k-1}(\alpha,\beta), \xi_{2k}(\alpha,\beta)]$, а символом $\int_\Delta *dt$ обозначается интеграл по отрезку Δ.

В-четвёртых, для экстремальных значений функций $N_j(t,\alpha,\beta)$ верны равенства

$$\max_{t\in\Delta_{jk}} N_{jk}(t,\alpha,\beta) = a(1+o(1));$$

$$\min_{t_{2k}(\alpha,\beta)\leqslant t\leqslant t_{2k+1}(\alpha,\beta)} N_1(t,\alpha,\beta) = \exp[-r_1 a\ln a(1+o(1))];$$

$$\min_{\tau_{2k}(\alpha,\beta)\leqslant t\leqslant \tau_{2k+1}(\alpha,\beta)} N_2(t,\alpha,\beta) = (\ln a)^{-1}(1+o(1))];$$

$$\min_{\xi_{2k}(\alpha,\beta)\leqslant t\leqslant \xi_{2k+1}(\alpha,\beta)} N_3(t,\alpha,\beta) = \frac{r_2+r_3}{r_3\ln a}(1+o(1))].$$

Ещё раз подчеркнём, что приведённые выше асимптотические формулы одни и те же для всех решений с начальными условиями из S_a. Только из асимптотической «узкости» S_a этот вывод не следует.

В настоящей работе приведены только главные члены асимптотических разложений решений. Используя стандартные методики, можно находить соответствующие асимптотические разложения с произвольной степенью точности.

Полученные результаты тесно примыкают к работам [6, 9–20], посвящённым методу большого параметра в теории колебаний. Отметим, что роль «пичковых» колебаний в задачах химии, биологии и др. подробно обсуждалась в монографии [27] и иллюстрировалась исследованием системы двух дифференциальных уравнений, обобщающей систему Хиггинса.

Список литературы

1. Yang Kuang. Delay Differential Equations. With Applications in Population Dynamics. Academic Press, 1993.

2. Wright E. M. A non-linear differential equation // J. Reine Angew. Math. 1955. Vol. 194, № 1—4. P. 66—87.

3. Kakutani S., Markus L. On the non-linear difference-differential equation $y'(t) = (a - by(t-\tau))\,y(t)$. contributions to the theory of non-linear oscillations // Ann. Math. Stud. Princeton University Press. Princeton. 1958. Vol. IV. P. 1—18.

4. Кащенко С. А. К вопросу об оценке в пространстве параметров области глобальной устойчивости уравнения Хатчинсона // Нелинейные колебания в задачах экологии. Ярославль: ЯрГУ, 1985. С. 9.

5. Jones G .S. The existence of periodic solutions of $f'(x) = -\alpha f(x-1)[1+f(x)]$ // T. Math. Anal. and Appl. 1962. Vol. 5. P. 435—450.

6. Кащенко С. А. Асимптотика периодического решения обобщённого уравнения Хатчинсона // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ, 1981. С. 22.

7. Кащенко С. А. О периодических решениях уравнения $x'(t) = -lx(t-1)[1+x(t)]$ // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ, 1978. С. 110—117.

8. Эдварс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969. 1071 с.

9. Кащенко С. А. Стационарные режимы в задаче хищник-жертва // Препринт института математики АН УССР. 1984. № 84.54. С. 59.

10. Кащенко С. А. Исследование системы дифференциально-разностных уравнений, описывающих работу ядерного реактора // Вопросы атомной науки и техники. Серия физика и техника ядерных реакторов. 1987. № 2. С. 66—69.

11. Кащенко С. А. Исследование методами большого параметра системы нелинейных дифференциально разностных уравнений, моделирующих задачу хищник—жертва // ДАН СССР. 1982. Т. 266. С. 792—795.

12. Кащенко С. А. Стационарные режимы уравнения, описывающего численности насекомых // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 2. С. 328—330.

13. Дмитриев А. С., Дмитриев А. С. Динамика генератора с запаздывающей обратной связью и низкодобротным фильтром второго порядка // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 12. С. 16.

14. Grigorieva E. V., Kashchenko S. A. Regular and chaotic pulsations in laser diode with delayed feedback // Int.J. Bifur. & Chaos. 1993. Vol. 3, № 3. P. 1515—1528.

15. Grigorieva E. V., Kashchenko S. A. Complex temporal structures in models of a laser with optoelectronic delayed feedback // Optics Communications. 1993. Vol. 02, № 1—2. P. 83—92.

16. Кащенко С. А., Майоров В. В. Модели волновой памяти. М.: ЛИБРОКОМ, 2009.

17. Кузьмичев А. В. Асимптотика периодического решения системы дифференциально-разностных уравнений, моделирующей иммунный отклик организма // Нелинейные колебания в задачах экологии. Ярославль, 1985. С. 63—70.

18. Кащенко С. А. Сложные стационарные режимы одного дифференциально-разностного уравнения, обобщающего уравнение Хатчинсона // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ, 1983. С. 8.

19. Кащенко С .А. Об установившихся режимах уравнения Хатчинсона с диффузией // ДАН СССР. 1987. Т. 292, № 2. С. 327—330.

20. Кащенко С. А. Пространственно-неоднородные структуры в простейших моделях с запаздыванием и диффузией // Математическое моделирование. 1990. Т. 2, № 9. С. 49—69.

21. Кащенко С. А. Оптимизация процесса охоты // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21, № 10. С 1706—1709.

22. Nussbaum R. D. Differential-delay equations with two time lage. Memoirs of the Amer. Math. Soc., 1977.

23. Kaplan T. L., Yorke T. A. Ordinary Differential Equations which Yield Periodic Solutions of Differential Delay Equations. T. Math. Anal. and Appl., 1974, 48, C. 317—424.

24. Колесов Ю. С., Майоров В. В. Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти-периодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 10, № 10. С. 1778—1788.

25. Колесов А. Ю., Колесов Ю. С., Майоров В. В. Реакция Белоусова: математическая модель и экспериментальные факты // Динамика биологических популяций. Горький: ГГУ, 1987. С. 43—51.

26. Кащенко С. А. Асимптотика релаксационных колебаний в математической модели реакции Белоусова // Динамика биологических популяций. Горький: ГГУ, 1987.

27. Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическое моделирование в биофизике. М.: Наука, 1975.

Asymptotics of Solutions of the Generalized Hutchinson's Equation

Kaschenko S. A.

Keywords: delay differential equation, Hutchinson's equation, large parameter, asymptotic, periodic solution

We discuss the dynamics of the Hutchinson's equation and its generalizations. An estimate of the global stability region of a positive steady state is obtained. The main results refer to existence, stability and asymptotics of a slow oscillating solution. New asymptotic methods are applied to a problem of dynamical properties of ODE system describing Belousov — Zhabotinsky reaction.

Сведения об авторе:
Кащенко Сергей Александрович,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математического моделирования
Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова