

©Смирнов А. В., 2015

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-4-533-545

УДК 519.179.2, 519.854.3

Задача о наибольшем кратном потоке в делимой сети и ее частные случаи

Смирнов А. В.

получена 10 июля 2015

В статье рассматривается задача о наибольшем кратном потоке в сети произвольной натуральной кратности k . Определяется три типа дуг в сети: обычная дуга, кратная дуга, мультидуга. Каждая кратная и мультидуга представляет собой объединение k связанных дуг, согласованных между собой. Задаются правила построения сети.

Вводится понятие делимой сети и ряд связанных определений. Отмечается важная особенность делимых сетей – возможность разделить их на k частей, согласованных на связанных дугах кратных и мультидуг, таким образом, что каждая часть является обычной транспортной сетью.

Основным результатом статьи является выделение следующих подклассов задачи о наибольшем кратном потоке в делимой сети.

1. Делимая сеть с ограничениями на мультидуги. Если в $k-1$ части делимой сети имеется только одна вершина, являющаяся концом мультидуги, то задача о наибольшем потоке полиномиально разрешима.

2. Делимая сеть со слабыми ограничениями на мультидуги. Если в s частях делимой сети ($1 \leq s < k-1$) имеется только одна вершина, являющаяся концом мультидуги, а в остальных частях таких вершин несколько, то размерность задачи о наибольшем кратном потоке может быть понижена до $k-s$.

3. Делимая сеть параллельной структуры. Пусть компонента делимой сети, состоящая из всех кратных дуг, может быть разделена на субкомпоненты, содержащие ровно по одной вершине-началу мультидуги. Пусть при этом каждая пара субкомпонент пересекается только в источнике сети x_0 . Если $k=2$, то задача о максимальном кратном потоке разрешима за полиномиальное время. Если $k \geq 3$, то задача NP -полна.

Для каждого из полиномиальных подклассов получены алгоритмы. Также сформулирован алгоритм понижения размерности задачи для делимой сети со слабыми ограничениями на мультидуги.

Ключевые слова: кратные сети, кратные потоки, делимые сети, NP -полнота, полиномиальный алгоритм

Для цитирования: Смирнов А. В., "Задача о наибольшем кратном потоке в делимой сети и ее частные случаи", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:4 (2015), 533–545.

Об авторах:

Смирнов Александр Валерьевич, orcid.org/0000-0002-0980-2507, канд. физ.-мат. наук., доцент кафедры теоретической информатики,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, e-mail: alexander_sm@mail.ru

Благодарности:

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-07-03038 А).

Введение

Задача о наибольшем кратном потоке в сети $G(X, U)$ натуральной кратности k (см. [1]) является обобщением классической задачи о наибольшем потоке в транспортной сети (см. [2]). Она имеет связь со многими задачами целочисленного линейного программирования (см. [3]).

В частности, поиск наибольшего кратного потока используется при решении задачи целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы с ограничениями первого и второго рода (см. [4] – [6]). В трехмерной вещественной матрице A размерности $(n+1) \times (m+1) \times (p+1)$ элементы внутренней части (все индексы положительны) просуммированы по каждому сечению матрицы и по каждому направлению, а также найдена общая сумма. Указанные суммы размещаются в элементах с одним или несколькими нулевыми индексами (условия баланса). Требуется так округлить элементы внутренней части матрицы до целого сверху или снизу, чтобы общая сумма итоговой матрицы была округлена по стандартным правилам, а все остальные суммы в итоговой матрице отличались от исходных менее чем на 1 (ограничения первого рода) или менее чем на 2 (ограничения второго рода).

Очевидно, что задача целочисленного сбалансирования k -мерной матрицы является частным случаем многоиндексных задач линейного программирования (см. [7] – [8]). Часто такие задачи являются NP -полными (например, рассмотренные в работе [9] аксиальная и планарная трехиндексная задачи), однако существуют и полиномиально разрешимые многоиндексные задачи (например, трехиндексные задачи линейного программирования с вложенной структурой, см. [10]).

Относительно задачи целочисленного сбалансирования известно, что в случае двух индексов она может быть решена за полиномиальное время с помощью сведения к задаче о максимальном потоке в транспортной сети (см. [11] – [12]). В случае же трех и более индексов такое сведение невозможно, соответствующая теорема доказывается в статье [13] на основе результатов из работ [14] – [16]. Более того, задача целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы является NP -полной (см. [17]). В работах [4] – [6] рассматривались кратные сети целочисленного сбалансирования кратности 2, которые использовались для поиска решения задачи целочисленного сбалансирования с ограничениями первого и второго рода. Кратные сети произвольной натуральной кратности k рассматривались в работе [1].

В данной статье будет рассмотрен класс кратных сетей специального вида – *делимых сетей*. Необходимые определения приведены в разделе 1.

Поскольку задача о максимальном потоке в делимой сети является NP -полной, важным является вопрос о полиномиальных подклассах этой задачи. Два таких подкласса будут рассмотрены в разделах 2 и 4.

В разделе 3 будет показано, каким образом можно понизить размерность задачи о наибольшем кратном потоке для одного частного случая делимой сети.

1. Делимая кратная сеть

Понятие делимой сети вводилось в работах [1], [18]. Напомним несколько определений, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Сначала введем натуральное $k > 1$, которое назовем *кратностью потока*. В качестве сети рассматривается ориентированный мультиграф $G(X, U)$, между вершинами которого могут быть дуги одного из 3 видов:

1) *обычная дуга* u^o с пропускной способностью $c(u^o)$, поток по которой не связан с потоком по другим дугам; множество обычных дуг обозначим через U^o ;

2) *кратная дуга* u^k между двумя вершинами, которая состоит из k дуг одной ориентации с одинаковой пропускной способностью $c(u^k)$ и одинаковым потоком по каждой из них; множество кратных дуг обозначим через U^k ;

3) *связанная дуга* u между двумя вершинами, которая связана с еще $k - 1$ дугой, имеющей одинаковый один из концов; множество связанных дуг, выходящих из одной вершины или входящих в одну вершину, будем называть *мультидугой* u^m ; пропускная способность всех связанных дуг одной мультидуги одинакова; поток по каждой связанной дуге одной мультидуги одинаков; множество мультидуг обозначим через U^m .

Множество выходящих из вершины дуг может быть либо только кратными дугами, либо только одной мультидугой (k связанных дуг), либо только обычными дугами. Из источника x_0 сети выходят только кратные дуги, а в сток z сети входит только одна мультидуга. Если из вершины выходят связанные дуги мультидуги, то в нее обязательно входит кратная дуга. Если в вершину входит мультидуга, то из нее может выходить только кратная дуга. Определенный таким образом мультиграф $G(X, U)$ с целочисленными пропускными способностями дуг назовем *кратной (транспортной) сетью*.

Кратным потоком по сети называется целочисленная функция, определенная на множестве дуг $U = U^o \cup U^k \cup U^m$, для которой выполнены условия неотрицательности, ограниченности (пропускными способностями дуг) и неразрывности потока (в каждой вершине).

Величиной кратного потока называется сумма φ_z входящего потока для стока z , равная сумме выходящего из источника потока. В силу того, что поток по каждой обычной дуге и по каждой связанной дуге каждой кратной и мультидуги должен быть целочислен, величина φ_z должна быть кратна k . Как и обычно, обозначим через $c(u)$ *пропускную способность* дуги u , а через $f(u)$ – *поток* на ней.

Отметим, что при $k = 1$ кратная сеть превращается в обычную транспортную сеть, а кратный поток превращается в обычный поток по этой сети. *Задача о наибольшем кратном потоке* для кратной сети является обобщением задачи о наибольшем потоке для обычной транспортной сети.

Пусть имеется кратная сеть произвольной кратности k . Пусть при удалении всех мультидуг сеть распадается на $k + 2$ слабо связанных компоненты, при этом одна компонента состоит только из вершины z , компонента, содержащая вершину x_0 , содержит только кратные дуги, а остальные k компонент содержат только обычные дуги. Если при этом каждая мультидуга имеет ровно один конец в каждой из k компонент, содержащих обычные дуги, то такую сеть мы будем называть *делимой*. Примером делимой сети может служить кратная сеть целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы, подробно рассмотренная в [4] – [6].

Обозначим через P_0 компоненту делимой сети, содержащую кратные дуги, через $P_1, \dots, P_k$ обозначим компоненты, содержащие обычные дуги. Тогда *частью* G_i делимой сети ($i \in \overline{1, k}$) назовем объединение соответствующей компоненты P_i с

инцидентными ей связанными дугами всех мультидуг, кроме мультидуги с концом в z , а также с i -ой связанной дугой каждой кратной дуги компоненты P_0 . Заметим, что возможность выделения частей G_i является особенностью делимых сетей, в общем случае это не всегда возможно.

Обозначим начальные вершины мультидуги с концом в z через $z_1, \dots, z_k$. Вершины, являющиеся началом остальных мультидуг, будем обозначать через y_j .

Объединение мультидуги u_z^m , идущей из вершин $z_1, \dots, z_k$ в z и k путей μ_r ($r \in \overline{1, k}$), каждый из которых является ориентированным путем в соответствующей части G_r из вершины x_0 в вершину z_r , назовем *обобщенным путем*, если каждый из путей μ_r проходит через одну и ту же вершину y_j .

Кратный поток назовем *полным*, если любой обобщенный путь из x_0 в z имеет дугу u (обычную, кратную или мультидугу), поток по которой равен ее пропускной способности $f(u) = c(u)$.

Проекция C_i ($i \in \overline{1, k}$) подграфа C на часть сети G_i – это часть подграфа C , образованная его вершинами и дугами, принадлежащими G_i .

Так как части G_i ($i \in \overline{1, k}$) сети G представляют собой обычные транспортные сети с источником x_0 и стоком z_i , то будем называть некоторый путь из x_0 в z_i *путем прорыва* в части G_i , если $f(u) < c(u)$ на прямых дугах и $f(u) > 0$ на обратных дугах этого пути.

Пусть в делимой сети определен некоторый поток φ величины $\varphi_z \geq 0$. *Кратным циклом* в делимой сети $G(X, U)$, где X – множество вершин, U – множество дуг (обычных, кратных или мультидуг), назовем такой подграф $C(X', U')$, $X' \subseteq X$, $U' \subseteq U$, для которого:

- 1) проекции $C_1, \dots, C_k$ на части $G_1, \dots, G_k$ соответственно есть объединение некоторых циклов, причем дуги, поток по которым ненулевой, могут проходиться в обратном направлении;
- 2) проекции $C_1, \dots, C_k$ согласованы (одинаковы) на общей части подграфов $G_1, \dots, G_k$;
- 3) C_1 представим в виде $C_1 = \cup \{C_1^j\}$, где C_1^j – некоторые циклы и $C_1^j \not\subseteq C_1^k \forall j \neq k$; при этом для любой дуги u из G_1 выполняется неравенство

$$0 \leq f(u) + a^+(u) - a^-(u) \leq c(u),$$

где $a^+(u)$ – это число циклов C_1^j , в которых дуга u проходится в прямом направлении, а $a^-(u)$ – это число циклов C_1^j , в которых дуга u проходится в обратном направлении. Такое же условие должно выполняться и для $C_2, \dots, C_k$.

Обобщенным путем прорыва в делимой сети $G(X, U)$ для некоторого кратного потока φ назовем такой подграф $S(X', U')$, $X' \subseteq X$, $U' \subseteq U$, для которого:

- 1) каждая из проекций $S_1, \dots, S_k$ на части $G_1, \dots, G_k$ соответственно есть объединение ровно одного пути прорыва из x_0 в z_i и некоторых циклов, причем дуги, поток по которым ненулевой, могут проходиться в обратном направлении;
- 2) проекции $S_1, \dots, S_k$ согласованы (одинаковы) на общей части подграфов $G_1, \dots, G_k$;
- 3) S_1 представим в виде $S_1 = \mu_1 \cup \{C_1^j\}$, где μ_1 – путь прорыва, C_1^j – некоторые циклы и $C_1^j \not\subseteq C_1^k \forall j \neq k$; при этом для любой дуги u из G_1 выполняется неравенство

$$0 \leq f(u) + a^+(u) - a^-(u) \leq c(u),$$

где $a^+(u)$ – это число элементов множества $\mu_1 \cup \{C_1^j\}$, в которых дуга u проходится в прямом направлении, а $a^-(u)$ – это число элементов множества $\mu_1 \cup \{C_1^j\}$, в которых дуга u проходится в обратном направлении. Такое же условие должно выполняться и для $S_2, \dots, S_k$;

4) Дуга $(\{z_1, \dots, z_k\}, z) \in U'$ и $f(\{z_1, \dots, z_k\}, z) < c(\{z_1, \dots, z_k\}, z)$.

5) S не содержит кратного цикла.

Обозначим $G_\varphi = G(X, U_\varphi)$; $U_\varphi = \{u \mid f(u) \geq 0\}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\varphi^1(U)$, $\varphi^2(U)$ – два полных потока в делимой сети $G(X, U)$, причем $\varphi_z^1 \leq \varphi_z^2$. Пусть $\varphi^0(U) = \varphi^2(U) - \varphi^1(U)$. Тогда граф $G_{\varphi^0} = \{S_i\} \cup \{C_j\}$, где $\{S_i\}$ – множество всех обобщенных путей прорыва из x_0 в z , а $\{C_j\}$ – множество всех кратных циклов. В случае, когда $\varphi_z^1 = \varphi_z^2 = \varphi_z^{\max}$, $\{S_i\} = \emptyset$.

Теорема 1 была доказана в статье [1] на базе результатов из работы [4].

Отметим также, что если в делимой сети существует поток величины kT (T – натуральное число), то в ней всегда существует поток любой другой величины kS ($1 \leq S < T$, S – натуральное число). Для произвольной кратной сети это условие выполнено не всегда.

На данном свойстве основан алгоритм нахождения максимального потока в делимой сети, который был подробно рассмотрен в работе [1]. Здесь мы ограничимся только идеей алгоритма.

Работа алгоритма происходит в два этапа:

1) этап построения полного потока;

2) этап увеличения потока. Если полученный полный поток не является максимальным, то увеличиваем его при помощи обобщенного алгоритма пометок до тех пор, пока поток не станет максимальным.

Алгоритм нахождения полного потока прост. На данном этапе увеличения потока можно добиваться, находя все возможные обобщенные пути прорыва из x_0 в z через вершины y_j без обратных дуг и увеличивая поток по ним. В итоге будет получен полный поток.

Рассмотрим обобщенный алгоритм пометок. Идея алгоритма состоит в следующем: в частях $G_1, \dots, G_k$ поочередно строятся пути прорыва $\mu_1, \dots, \mu_k$ (возможно, в объединении с некоторыми циклами) до тех пор, пока пути во всех частях не станут согласованными, либо же не останется вариантов для продолжения построения пути. В первом случае объединение $\mu_1, \dots, \mu_k$ с мультидугой с концом в z даст обобщенный путь прорыва, во втором случае производится откат до «точки ветвления», после чего выполнение алгоритма возобновляется.

Отметим, что указанный алгоритм является экспоненциальным, а задача нахождения максимального потока в кратной сети является NP -полной (обоснование см. в [1]). Поэтому важным является вопрос поиска подклассов полиномиально разрешимых задач о максимальном кратном потоке.

2. Делимая кратная сеть с дополнительным условием для мультидуг

Следующее утверждение устанавливает полиномиальную разрешимость задачи о максимальном кратном потоке для одного подкласса делимых сетей.

Теорема 2. Пусть $G(X, U)$ – делимая сеть кратности k . Пусть в каждой компоненте P_i ($i \in \overline{1, k-1}$) существует только одна вершина y_0^i , являющаяся концом мультидуги, а в компоненте P_k таких вершин может быть несколько. Тогда задача нахождения максимального кратного потока разрешима за полиномиальное время.

Доказательство. Очевидно, что любой обобщенный путь прорыва из x_0 в z в сети $G(X, U)$ указанного вида будет проходить через вершины $y_0^1, \dots, y_0^{k-1}$ (то же справедливо и для обобщенных путей из x_0 в z). Каждая из компонент P_i ($i \in \overline{1, k-1}$) представляет собой обычную транспортную сеть с источником y_0^i и стоком z_i . С помощью алгоритма Форда–Фалкерсона (см. [2]) найдем максимальный поток в каждой из таких сетей. Величины соответствующих потоков обозначим через φ_i .

В части G_k сети $G(X, U)$, являющейся обычной транспортной сетью с источником x_0 и стоком z_k , также найдем максимальный поток величины φ_k .

Пусть

$$F = \min \left\{ \varphi_1, \dots, \varphi_k, \frac{c(\{z_1, \dots, z_k\}, z)}{k} \right\}. \quad (1)$$

Очевидно, что в силу построения сети $G(X, U)$ величина максимального потока в ней

$$\varphi_z^{\max} \leq kF. \quad (2)$$

Покажем, что в сети $G(X, U)$ можно получить поток величины kF . Последовательно применим следующие действия.

1. В каждой из компонент P_i ($i \in \overline{1, k-1}$) и в части G_k уменьшим потоки на соответствующие величины $d_i = \varphi_i - F$. Для этого последовательно будем находить в этих транспортных сетях пути из источника в сток с ненулевым потоком на всех дугах и уменьшать этот поток.

2. В частях G_i ($i \in \overline{1, k-1}$) сети $G(X, U)$ установим поток на всех связанных дугах всех кратных и мультидуг равным соответствующим величинам из части G_k .

3. Установим $f(\{z_1, \dots, z_k\}, z) = kF$.

Очевидно, что полученный кратный поток φ величины $\varphi_z = kF$ будет удовлетворять условиям неотрицательности, ограниченности пропускными способностями дуг и неразрывности в каждой вершине. При этом величина потока на каждой кратной и мультидуге будет кратна k , а потоки во всех частях G_i ($i \in \overline{1, k}$) сети $G(X, U)$ будут согласованы. В силу (2) поток максимален.

Все проводимые нами операции были полиномиальны, а для поиска максимальных потоков в обычных транспортных сетях мы использовали полиномиальный алгоритм Форда–Фалкерсона.

Теорема 2 доказана.

В доказательстве теоремы фактически содержится следующий простой полиномиальный алгоритм поиска наибольшего кратного потока в делимой сети указанного вида.

Алгоритм 1.

1. С помощью алгоритма Форда–Фалкерсона найдем максимальные потоки в компонентах P_i ($i \in \overline{1, k-1}$) и в части G_k сети $G(X, U)$, обозначим их через φ_i .

2. Найдем F по формуле (1). Уменьшим потоки в компонентах P_i ($i \in \overline{1, k-1}$) и в части G_k сети $G(X, U)$ до величины F и согласуем их. Для этого произведем действия 1–3 из доказательства теоремы. В результате получим максимальный кратный поток φ величины kF .

3. Понижение размерности в задаче о наибольшем кратном потоке для некоторых делимых сетей

Пусть теперь $G(X, U)$ – делимая сеть кратности k , в которой в каждой компоненте P_i ($i \in \overline{1, s}$, $1 \leq s < k-1$) существует только одна вершина y_0^i , являющаяся концом мультидуги, а в компонентах P_i ($i \in \overline{s+1, k}$) таких вершин несколько. Для такой сети можно предложить следующий алгоритм нахождения максимального потока (получаемый как следствие из теоремы 2, доказанной в предыдущем разделе).

Алгоритм 2.

1. С помощью алгоритма Форда–Фалкерсона находим максимальный поток величины φ_i в компонентах P_i ($i \in \overline{1, s}$), каждая из которых является обычной транспортной сетью с источником y_0^i и стоком z_i . Обозначим

$$F = \min_{i \in \overline{1, s}} \varphi_i.$$

2. Объединение

$$G' = \cup_{i=s+1}^k G_s \cup (\{z_{s+1}, \dots, z_k\}, z)$$

частей G_s сети $G(X, U)$ и $k-s$ связанных дуг мультидуги с концом в z является кратной сетью кратности $k-s$ с источником x_0 и стоком z .

С помощью общего алгоритма поиска наибольшего потока в кратной делимой сети будем искать максимальный поток в сети G' . Поскольку максимальный поток φ в сети $G(X, U)$ не превышает величины kF , то при достижении величины потока в сети G' равной $(k-s)F$ процедуру поиска можно остановить. Таким образом, мы заведомо получим, что величина найденного в сети G' потока $\varphi_0 \leq (k-s)F$.

3. В компонентах P_i ($i \in \overline{1, s}$) уменьшим потоки на соответствующие величины $d_i = \varphi_i - \frac{\varphi_0}{k-s}$. Для этого последовательно будем находить пути из y_0^i в z_i с ненулевым потоком на них и уменьшать этот поток.

4. Поток на всех связанных дугах всех кратных и мультидуг в частях G_i ($i \in \overline{1, s}$) сети $G(X, U)$ установим равным соответствующим величинам из частей G_i ($i \in \overline{s+1, k}$).

5. Поток на мультидуге с концом в z сделаем равным $\frac{k}{k-s}\varphi_0$.

Получившийся кратный поток φ в делимой сети $G(X, U)$ величины $\varphi_z = \frac{k}{k-s}\varphi_0$ является максимальным.

Таким образом, для делимой сети указанного вида с помощью алгоритма 2 удастся понизить размерность задачи о максимальном кратном потоке до $k-s$. При

этом кратный поток кратности $k-s$ по-прежнему ищется с помощью экспоненциального алгоритма, но количество вычислительных операций и общее время решения сокращается.

4. Делимая сеть параллельной структуры

Пусть делимая сеть $G(X, U)$ устроена таким образом, что для любой пары вершин y_j, y_t ($j \neq t$) произвольный путь из x_0 в y_j и произвольный путь из x_0 в y_t не имеют общих вершин, кроме x_0 . В этом случае будем говорить, что сеть $G(X, U)$ имеет *параллельную структуру*.

Пусть для определенности $j \in \overline{1, m}$. Компоненту P_0 сети $G(X, U)$ можно разделить на субкомпоненты P_0^j , каждая из которых состоит из всех возможных путей из x_0 в y_j . Очевидно, что

$$P_0^1 \cup P_0^2 \cup \dots \cup P_0^m = P_0; \quad P_0^j \cap P_0^t = \{x_0\}, \quad j \neq t.$$

При этом каждая субкомпонента P_0^j – это обычная транспортная сеть с источником x_0 и стоком y_j , содержащая только кратные дуги. Следовательно, в каждой такой субкомпоненте можно применить (с учетом кратности дуг) полиномиальный алгоритм Форда–Фалкерсона для нахождения максимального потока.

Рассмотрим следующий алгоритм нахождения наибольшего кратного потока в делимой сети $G(X, U)$ параллельной структуры кратности $k = 2$.

Алгоритм 3.

1. В каждой из субкомпонент P_0^j ($j \in \overline{1, m}$) с помощью алгоритма Форда–Фалкерсона найдем максимальный поток, его величину обозначим через φ_j .

2. Выполним сведение задачи о наибольшем кратном потоке в сети $G(X, U)$ к задаче о наибольшем потоке в обычной сети $G_1(X_1, U_1)$ по следующим правилам.

2.1. $X_1 = X \setminus \{x_0\}$.

2.2. Добавим в U_1 все дуги из компонент P_1 и P_2 сети $G(X, U)$, дугам из компоненты P_1 при этом поменяем ориентацию на противоположную.

2.3. Соединим вершину z_2 с вершиной z дугой пропускной способности

$$c(z_2, z) = \frac{c(\{z_1, z_2\}, z)}{2}.$$

2.4. Каждую мультидугу вида $(y_j, \{y_p^1, y_q^2\}) \in U$ преобразуем в пару дуг (y_p^1, y_j) , (y_j, y_q^2) пропускной способности

$$c(y_p^1, y_j) = c(y_j, y_q^2) = \frac{1}{2} \min \{ \varphi_j, c(y_j, \{y_p^1, y_q^2\}) \}.$$

Полученные таким образом дуги включим в U_1 .

3. На шаге 2 нами была получена сеть $G_1(X_1, U_1)$ с источником z_1 и стоком z . С помощью алгоритма Форда–Фалкерсона найдем максимальный поток в сети $G_1(X_1, U_1)$ величины φ_0 .

4. Перенесем поток из сети $G_1(X_1, U_1)$ в сеть $G(X, U)$ по следующим правилам.

4.1. Поток на каждой обычной дуге (a, b) установим равным величине потока на соответствующей дуге из U_1 (для компоненты P_1 это дуги (b, a) , для компоненты P_2 – (a, b)).

4.2. Поток на мультидуге с концом в z установим равным

$$f(\{z_1, z_2\}, z) = 2f_1(z_2, z) = 2\varphi_0.$$

Здесь $f_1(z_2, z)$ – поток на дуге (z_2, z) в сети $G_1(X_1, U_1)$.

4.3. Поток на каждой мультидуге, начинающейся в вершине y_j ($j \in \overline{1, m}$), установим равным $2f_1(y_j)$, где $f_1(y_j)$ – величина потока, проходящего через вершину y_j в сети $G_1(X_1, U_1)$.

4.4. Для нахождения потока на кратных дугах в каждой субкомпоненте P_0^j возьмем максимальный поток в этой субкомпоненте, найденный на шаге 1, и уменьшим его на величину $d_j = \varphi_j - 2f_1(y_j)$. Для этого будем последовательно находить пути из x_0 в y_j с ненулевым потоком на них и уменьшать этот поток.

Полученный в итоге кратный поток φ обладает свойствами неотрицательности, ограниченности пропускными способностями дуг и непрерывности в каждой вершине; поток на каждой кратной и мультидуге согласован и кратен 2. Этот поток является максимальным, его величина $\varphi_z = 2\varphi_0$.

Теорема 3. В делимой кратной сети $G(X, U)$ параллельной структуры можно найти максимальный кратный поток за полиномиальное время, если кратность сети $k = 2$.

Доказательство. Справедливость теоремы следует непосредственно из алгоритма 3. Действительно, переход от кратной сети $G(X, U)$ к обычной сети $G_1(X_1, U_1)$ осуществляется таким образом, что максимальный поток в сети $G_1(X_1, U_1)$ всегда индуцирует максимальный кратный поток в сети $G(X, U)$. При этом действия на каждом из шагов алгоритма полиномиальны.

Теорема 3 доказана.

Рассмотрим теперь задачу распознавания следующего вида: требуется определить, существует ли в делимой сети $G(X, U)$ параллельной структуры кратности k кратный поток величины не меньшей K . Эту задачу мы будем называть *задачей КПк_пар*.

В работе [1] была рассмотрена аналогичная задача распознавания КПк, поставленная для произвольной кратной сети, и обоснована ее NP -полнота. Задача КПк_пар является частным случаем задачи КПк. При этом задача КП2_пар полиномиальна (теорема 3) в отличие от задачи КП2. Покажем, что при $k \geq 3$ задача КПк_пар NP -полна. Для этого рассмотрим следующую классическую NP -полную задачу о трехмерном сочетании (см. [19] – [20]).

Задано 3 множества I, J, P с n элементами (можно считать, что $I = J = P = \{1, \dots, n\}$) и подмножество M прямого произведения $I \times J \times P$.

Требуется определить, можно ли из M выбрать подмножество M' , у элементов которого значение каждой координаты i, j или p присутствует ровно 1 раз.

Теорема 4. Задача КПк_пар NP -полна при $k \geq 3$.

Доказательство. В работе [1] показано, что задача КПк принадлежит классу NP для любых натуральных значений k , следовательно, задача КПк_пар также принадлежит классу NP .

Пусть сначала $k = 3$.

Построим полиномиальное сведение задачи о трехмерном сочетании к задаче КПЗ_пар.

1. Каждому элементу $(i, j, p) \in M$ поставим в соответствие вершину x_{ijp} кратной сети.

2. Соединим источник сети x_0 с каждой из вершин x_{ijp} кратной дугой пропускной способности 3.

3. Добавим в сеть вершины x_{i00} , x_{0j0} , x_{00p} , соответствующие всем ненулевым значениям i , j и p . Соединим каждую вершину x_{ijp} ($i > 0$, $j > 0$, $p > 0$) с вершинами x_{i00} , x_{0j0} , x_{00p} мультидугой $(x_{ijp}, \{x_{i00}, x_{0j0}, x_{00p}\})$ пропускной способности 3.

4. Добавим в сеть вершины z_1 , z_2 , z_3 . Каждую вершину x_{i00} ($i > 0$) соединим с вершиной z_1 обычной дугой пропускной способности 1. Каждую вершину x_{0j0} ($j > 0$) соединим с вершиной z_2 обычной дугой пропускной способности 1. Каждую вершину x_{00p} ($p > 0$) соединим с вершиной z_3 обычной дугой пропускной способности 1.

5. Соединим вершины z_1 , z_2 , z_3 , со стоком сети z мультидугой $(\{z_1, z_2, z_3\}, z)$ пропускной способности $3n$.

6. Установим $K = 3n$.

Полученная делимая сеть $G(X, U)$ кратности 3 имеет параллельную структуру, причем величина потока в этой сети не может превысить $3n$.

Если задача о трехмерном сочетании разрешима, то ее решение $M' \subseteq M$ индуцирует решение задачи КПЗ_пар для сети $G(X, U)$ указанного вида, если положить

$$f(x_0, x_{ijp}) = f(x_{ijp}, \{x_{i00}, x_{0j0}, x_{00p}\}) = 3, \quad (i, j, p) \in M';$$

$$f(x_0, x_{ijp}) = f(x_{ijp}, \{x_{i00}, x_{0j0}, x_{00p}\}) = 0, \quad (i, j, p) \notin M', \quad i > 0, j > 0, p > 0;$$

$$f(x_{i00}, z_1) = f(x_{0j0}, z_2) = f(x_{00p}, z_3) = 1, \quad i > 0, j > 0, p > 0;$$

$$f(\{z_1, z_2, z_3\}, z) = 3n.$$

В силу построения сети $G(X, U)$ и требования целочисленности потока на всех дугах, если $f(x_{i_1 j_1 p_1}) = f(x_{i_2 j_2 p_2}) = 3$ для ненулевых значений индексов, то обязательно $i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$ и $p_1 \neq p_2$ (иначе либо $f(x_{i_1 00}) > c(x_{i_1 00})$, либо $f(x_{0 j_1 0}) > c(x_{0 j_1 0})$, либо $f(x_{00 p_1}) > c(x_{00 p_1})$). Поэтому, если в задаче КПЗ_пар для сети $G(X, U)$ указанного вида есть решение при $K = 3n$, то это решение индуцирует решение задачи о трехмерном сочетании

$$M' = \{(i, j, p) \mid f(x_{ijp}) = 3, i > 0, j > 0, p > 0\}.$$

Таким образом, мы построили сведение известной NP -полной задачи о трехмерном сочетании к задаче КПЗ_пар. Поскольку шаги 1–6 полиномиальны, данное сведение является полиномиальным. Следовательно, задача КПЗ_пар NP -полна.

Пусть теперь $k > 3$. Процедура построения полиномиального сведения задачи о трехмерном сочетании к задаче КПк_пар будет аналогична изложенной выше со следующими дополнениями.

1. Добавим в сеть вершины $y_4, \dots, y_k$, $z_4, \dots, z_k$.

2. Все имеющиеся мультидуги $(x_{ijp}, \{x_{i00}, x_{0j0}, x_{00p}\})$ заменим на мультидуги $(x_{ijp}, \{x_{i00}, x_{0j0}, x_{00p}, y_4, \dots, y_k\})$ пропускной способности k .

3. Соединим все вершины y_s ($s \in \overline{4, k}$) с вершинами z_s обычными дугами пропускной способности n .

4. Заменяем мультидугу $(\{z_1, z_2, z_3\}, z)$ на мультидугу $(\{z_1, \dots, z_k\}, z)$ пропускной способности kn .

5. Установим пропускную способность всех кратных дуг равной k .

6. Установим $K = kn$.

Нетрудно убедиться, что при $k > 3$ задача КПк_пар NP -полна (рассуждения аналогичны изложенным выше).

Теорема 4 доказана.

Следствие 1. Задача о наибольшем кратном потоке в делимой сети $G(X, U)$ параллельной структуры NP -полна при кратности сети $k \geq 3$.

Доказательство. Задача КПк_пар может быть решена при помощи следующего алгоритма:

1. Поиск максимального кратного потока φ в сети $G(X, U)$ величины φ_z .

2. Проверка $\varphi_z \geq K$ (соответствует ответу «да» в задаче КПк_пар).

Проверка шага 2 выполняется за константное время, а задача КПк_пар NP -полна при $k \geq 3$. Следовательно, задача о наибольшем кратном потоке в делимой сети $G(X, U)$ параллельной структуры также является NP -полной при $k \geq 3$.

Следствие 1 доказано.

Список литературы / References

- [1] Рублев В. С., Смирнов А. В., “Потоки в кратных сетях”, *Ярославский педагогический вестник*, **3:2** (2011), 60–68; [Rublev V. S., Smirnov A. V., “Flows in Multiple Networks”, *Yaroslavyky Pedagogicheskyy Vestnik*, **3:2** (2011), 60–68, (in Russian).]
- [2] Ford L. R., Fulkerson D. R., *Flows in Networks*, Princeton University Press, 1962.
- [3] Papadimitriou Ch. H., Steiglitz K., *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*, Prentice Hall, 1982.
- [4] Рублев В. С., Смирнов А. В., “Задача целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы и алгоритмы ее решения”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **17:2** (2010), 72–98; [Roublev V. S., Smirnov A. V., “The Problem of Integer-Valued Balancing of a Three-Dimensional Matrix and Algorithms of Its Solution”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **17:2** (2010), 72–98, (in Russian).]
- [5] Смирнов А. В., “Некоторые классы разрешимости задачи целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы с ограничениями второго рода”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **20:2** (2013), 54–69; [Smirnov A. V., “Some Solvability Classes for The Problem of Integer Balancing of a Three-dimensional Matrix with Constraints of Second Type”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **20:2** (2013), 54–69, (in Russian).]
- [6] Smirnov A. V., “Some Solvability Classes for the Problem of Integer Balancing of a Three-Dimensional Matrix with Constraints of the Second Type”, *Automatic Control and Computer Sciences*, **48:7** (2014), 543–553.
- [7] Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю., *Дискретное программирование*, Наука, 1969; [Korbut A. A., Finkelstein J. J., *Diskretnoye programmirovaniye*, Nauka, 1969, (in Russian).]
- [8] Раскин Л. Г., Кириченко И. О., *Многоиндексные задачи линейного программирования*, Радио и связь, 1982; [Raskin L. G., Kirichenko I. O., *Mnogoindeksnyye zadachi lineynogo programmirovaniya*, Radio i svyaz, 1982, (in Russian).]
- [9] Spieksma F. C. R., “Multi index assignment problems: complexity, approximation, applications”, *Nonlinear Assignment Problems. Algorithms and Applications*, eds. P. M. Pardalos, L. S. Pitsoulis, Kluwer Academic Publishers, 2000, 1–11.

- [10] Афраймович Л. Г., “Трехиндексные задачи линейного программирования с вложенной структурой”, *Автоматика и телемеханика*, 2011, № 8, 109–120; English transl.: Afraimovich L. G., “Three-index linear programs with nested structure”, *Automation and Remote Control*, **72**:8 (2011), 1679–1689.
- [11] Кондаков А. С., Рублев В. С., “Задача сбалансирования матрицы плана”, *Доклады Одесского семинара по дискретной математике*, Астропринт, 2005, 24–26; [Kondakov A. S., Roublev V. S., “Zadacha sbalansirovaniya matritsy plana”, *Doklady Odesskogo seminar po diskretnoy matematike*, Astroprint, 2005, 24–26, (in Russian).]
- [12] Коршунова Н. М., Рублев В. С., “Задача целочисленного сбалансирования матрицы”, *Современные проблемы математики и информатики*, ЯрГУ, 2000, 145–150; [Korshunova N. M., Roublev V. S., “Zadacha tselochislennogo sbalansirovaniya matritsy”, *Sovremennye problemy matematiki i informatiki*, Yaroslavl State University, 2000, 145–150, (in Russian).]
- [13] Смирнов А. В., “Задача целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы и сетевая модель”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **16**:3 (2009), 70–76; [Smirnov A. V., “The Problem of Integer-valued Balancing of a Three-dimensional Matrix and Network Model”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **16**:3 (2009), 70–76, (in Russian).]
- [14] Афраймович Л. Г., Прилуцкий М. Х., “Многоиндексные задачи распределения ресурсов в иерархических системах”, *Автоматика и телемеханика*, 2006, № 6, 194–205; English transl.: Afraimovich L. G., Prilutskii M. Kh., “Multiindex resource distributions for hierarchical systems”, *Automation and Remote Control*, **67**:6 (2006), 1007–1016.
- [15] Афраймович Л. Г., Прилуцкий М. Х., “Многопродуктовые потоки в древовидных сетях”, *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2008, № 2, 57–63; English transl.: Afraimovich L. G., Prilutskii M. Kh., “Multicommodity flows in tree-like networks”, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, **47**:2 (2008), 214–220.
- [16] Hoffman A. J., Kruskal J. B., “Integral Boundary Points of Convex Polyhedra”, *Linear Inequalities and Related Systems*, eds. H. W. Kuhn, A. W. Tucker, Princeton University Press, 1972, 223–246.
- [17] Рублев В. С., Смирнов А. В., “NP-полнота задачи целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы”, *Доклады Академии Наук*, **435**:3 (2010), 314–316; English transl.: Roublev V. S., Smirnov A. V., “NP-Completeness of the Integer Balancing Problem for a Three-Dimensional Matrix”, *Doklady Mathematics*, **82**:3 (2010), 912–914.
- [18] Смирнов А. В., “Некоторые полиномиальные подклассы задачи о наибольшем кратном потоке в делимой сети”, *Дискретные модели в теории управляющих систем: IX Международная конференция: труды*, МАКС Пресс, 2015, 229–231; [Smirnov A. V., “Nekotorye polinomialnye podklassy zadachi o naibolshem kratnom potoke v delimoy seti”, *Discrete Models in Control Systems Theory: IX International Conference: Proceedings*, MAKS Press, 2015, 229–231, (in Russian).]
- [19] Garey M. R., Johnson D. S., *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman, 1979.
- [20] Karp R., “Reducibility among combinatorial problems”, *Complexity of Computer Computations*, eds. R. E. Miller, J. W. Thatcher, Plenum, 1972, 85–103.

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-4-533-545

The Problem of Finding the Maximal Multiple Flow in the Divisible Network and its Special Cases

Smirnov A. V.

Received July 10, 2015

In the article the problem of finding the maximal multiple flow in the network of any natural multiplicity k is studied. There are arcs of three types: ordinary arcs, multiple arcs and multi-arcs. Each multiple and multi-arc is a union of k linked arcs, which are adjusted with each other. The network constructing rules are described. The definitions of a divisible network and some associated subjects are stated. The important property of the divisible network is that every divisible network can be partitioned into k parts, which are adjusted on the linked arcs of each multiple and multi-arc. Each part is the ordinary transportation network. The main results of the article are the following subclasses of the problem of finding the maximal multiple flow in the divisible network. 1. The divisible networks with the multi-arc constraints. Assume that only one vertex is the ending vertex for a multi-arc in $k - 1$ network parts. In this case the problem can be solved in a polynomial time. 2. The divisible networks with the weak multi-arc constraints. Assume that only one vertex is the ending vertex for a multi-arc in s network parts ($1 \leq s < k - 1$) and other parts have at least two such vertices. In that case the multiplicity of the multiple flow problem can be decreased to $k - s$. 3. The divisible network of the parallel structure. Assume that the divisible network component, which consists of all multiple arcs, can be partitioned into subcomponents, each of them containing exactly one vertex-beginning of a multi-arc. Suppose that intersection of each pair of subcomponents is the only vertex-network source x_0 . If $k = 2$, the maximal flow problem can be solved in a polynomial time. If $k \geq 3$, the problem is NP -complete. The algorithms for each polynomial subclass are suggested. Also, the multiplicity decreasing algorithm for the divisible network with weak multi-arc constraints is formulated.

Keywords: multiple networks, multiple flows, divisible networks, NP -completeness, polynomial algorithm

For citation: Smirnov A. V., "The Problem of Finding the Maximal Multiple Flow in the Divisible Network and its Special Cases", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22:4** (2015), 533–545.

On the authors:

Smirnov Alexander Valeryevich, orcid.org/0000-0002-0980-2507, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: alexander_sm@mail.ru

Acknowledgments:

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research under the Grant No 15-07-03038 A.