Модел. и анализ информ. систем. Т. **19**, № **3** (2012) 63–72

УДК 517.946

Об одном классе операторных включений

Демьянков Н. А., Климов В. С.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: praetoriax@gmail.com, klimov@uniyar.ac.ru

получена 15 января 2012

Ключевые слова: операторное включение, вариационное неравенство, многозначное отображение, векторное поле, выпуклое множество

Изучается операторное включение $0 \in A(x) + N(x)$. Основные результаты относятся к случаю, когда A – ограниченный оператор монотонного типа из рефлексивного пространства в сопряжённое к нему, N – конуснозначный оператор. Устанавливается критерий отсутствия решений рассматриваемого включения. Вводятся целочисленные характеристики многозначных отображений, обладающие свойствами гомотопической инвариантности и аддитивности. Намечены приложения к теории вариационных неравенств с многозначными операторами.

1. Приведём некоторые определения и обозначения. Всюду далее $P(Y)$ – совокупность непустых подмножеств множества Y, $\Gamma(L)$ – множество конечномерных подпространств линейного пространства L. Однозначное отображение $\mathscr{F}$ множества X в множество $P(Y)$ называют [1 – 5] многозначным отображением из X в Y; множество $\mathscr{F}(X) = \cup\mathscr{F}(x) \quad (x \in X)$ – областью значений отображения $\mathscr{F}$ на множестве X; множества

$$\mathscr{F}_+^{-1}(V) = \{x \in X, \mathscr{F}(x) \subset V\}, \quad \mathscr{F}_-^{-1}(V) = \{x \in X, \mathscr{F}(x) \cap V \neq \varnothing\}$$

– малым (полным) прообразом множества $V \subset Y$; множество $\mathscr{G}(\mathscr{F}) = \{(x, y) \in X \times Y, x \in X, y \in \mathscr{F}(x)\}$ – графиком отображения $\mathscr{F}$. Многозначное отображение $\mathscr{F}$ топологического пространства X в топологическое пространство Y полунепрерывно сверху (снизу), если для любого открытого множества $V \subset Y$ его малый прообраз $\mathscr{F}_+^{-1}(V)$ (соответственно, полный прообраз $\mathscr{F}_-^{-1}(V)$) есть открытое множество в X; отображение $\mathscr{F}\colon X \to P(Y)$ замкнуто, если его график есть замкнутое подмножество прямого произведения пространств X, Y; отображение $\mathscr{F}\colon X \to P(Y)$ квазиоткрыто, если $int(\mathscr{F}(x)) \neq \varnothing \quad (x \in X)$ и график многозначного отображения $int(\mathscr{F})\colon X \to P(Y)$ есть открытое подмножество $X \times Y$ (здесь и далее $int(\mathscr{K})$ и $cl(\mathscr{K})$ – внутренность и замыкание множества $\mathscr{K}$). Через $Cv(Z)(Kv(Z))$ обозначается совокупность непустых замкнутых (компактных) подмножеств локально выпуклого топологического пространства Z. Если $\mathscr{F}_0\colon X \to Cv(Y)$ – полунепрерывное снизу отображение топологического пространства X в банахово пространство $Y, \mathscr{F}_1\colon X \to Cv(Y)$ – квазиоткрытое отображение, и $\mathscr{F}_0(x) \cap int(\mathscr{F}_1(x)) \neq \varnothing \quad (x \in X)$, то пересечение $\mathscr{F}_0 \cap \mathscr{F}_1$ – полунепрерывное снизу отображение.

Пусть $Z = Y^*$ – сопряженное к действительному B – пространству Y; $\langle y, z\rangle$ – значение функционала $z \in Z$ на элементе $y \in Y$. Билинейная форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $Y \times Z$ стандартным образом порождает слабые топологии $\sigma(Y, Z)$ и $\sigma(Z, Y)$ на пространствах Y и Z соответственно. Далее Z_w – пространство Z с топологией $\sigma(Z, Y), Kv(Z_w)$ – класс непустых выпуклых компактных в $\sigma(Z, Y)$ топологии подмножеств пространства Z. Каждое множество $\mathscr{K}$ из $Kv(Z_w)$ однозначно восстанавливается по своей опорной функции $s(\mathscr{K}, \cdot)\colon Y \to \mathbb{R}$, определяемой равенством $s(\mathscr{K}, y) = \max\{\langle y, z\rangle\,,\ z \in \mathscr{K}\}$. Отображение $A\colon X \to Kv(Z_w)$ порождает функцию $(x, y) \to s(A(x), y)$ на $X \times Y$. Если X – топологическое пространство, и при каждом y из Y функция $s(A(\cdot), y)$ полунепрерывна сверху на X, то отображение A именуют [5] хеминепрерывным сверху; если же функция $s(A(x), y)$ полунепрерывна сверху по совокупности переменных, то назовём отображение A квазинепрерывным сверху. Замкнутость отображения $X\colon X \to \mathscr{K}, \mathscr{K} \in Kv(Z_w)$ влечёт его хеминепрерывность сверху.

Лемма 1. *Пусть* $A\colon X \to Kv(Z_w)$ *– квазинепрерывное сверху отображение,* $h\colon X \to \mathbb{R}$ *– полунепрерывная снизу функция,* $C(x) = \{y \in Y, s(A(x), y) \leqslant h(x)\}$, *причем* $\inf\{s(A(x), y),\, y \in Y\} < h(x) \quad (x \in X)$. *Тогда* $C\colon X \to Cv(Y)$ *– квазиоткрытое отображение.*

Доказательство. Включение $C(x) \in Cv(Y)$ очевидно. Если $s(A(x), y) < h(x)$, то $y \in int(C(x))$, поэтому $int(C(x)) \neq \varnothing$ $(x \in X)$. Поскольку выпуклая функция $s(A(x), \cdot)$ не может достигать своего максимума на $C(x)$ во внутренней точке, то $int(C(x)) = \{y \in Y, s(A(x), y) < h(x)\}$. Если $y \in int(C(x))$, то существуют окрестности $U(x), V(y)$ точек x, y такие, что $s(A(x'), y') < h(x') \quad (x' \in U(x), y' \in V(y))$, а это влечет за собой включение $V(y') \subset C(x') \quad (x' \in U(x))$ и квазиоткрытость отображения C. Лемма доказана.

Множествам $Q \subset Y, \mathscr{K} \subset Z$ сопоставим отрицательные полярные конусы $Q^- \subset Z, \mathscr{K}^- \subset Y$, определяемые равенствами

$$Q^- = \{z \in Z,\ \langle y, z\rangle \leqslant 0\ \forall y \in Q\}, \qquad \mathscr{K}^- = \{y \in Y,\ \langle y, z\rangle \leqslant 0\ \ \forall z \in \mathscr{K}\}\,.$$

Как известно, $(Q^-)^-$ есть замкнутая коническая оболочка $\overline{con}\ Q$ множества Q, если $\mathscr{K} \in Kv(Z_w)$ и $0 \notin \mathscr{K}$, то $(\mathscr{K}^-)^- = \cup_{\lambda \geqslant 0}(\lambda\mathscr{K})$.

Лемма 2. *Пусть* X *– паракомпактное пространство,* Y *– действительное* B*-пространство,* $A\colon X \to Kv(Z_w)$ *– квазинепрерывное сверху отображение,* $\mathscr{D}\colon X \to Cv(Y)$ *– полунепрерывное снизу отображение,* $N(x) = \mathscr{D}(x)^-\,(x \in X)$. *Для того, чтобы включение*

$$0 \in A(x) + N(x) \tag{1}$$

не имело решений, необходимо и достаточно, чтобы существовало непрерывное сечение w *отображения* $\mathscr{D}$*, удовлетворяющее условию*

$$s(A(x), w(x)) < 0 \quad \forall x \in X\,. \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость. При каждом x_0 из X множество $A(x_0)+N(x_0)$ принадлежит классу $Cv(Z_w)$ и не содержит 0. Поэтому существует элемент $y_1 \in Y$, для которого $\sup\{\langle y_1, z\rangle\,,\ z \in A(x_0) + N(x_0)\} < 0$. Это равносильно следующему: $s(A(x_0), y_1) < \inf\{\langle y_1, z\rangle\,,\ z \in -N(x_0)\}$. Поскольку множество $N(x_0)$ есть конус, то $\inf\{\cdot\}$ равен 0, в частности, $\langle y_1, v\rangle \leqslant 0\,(v \in N(x_0))$. Следовательно, $y_1 \in N(x_0)^- = \overline{con}\,\mathscr{D}(x_0)$ и существует y_0 , для которого $s(A(x), y) < q < 0$.

Положим $C_0(x) = \{y \in Y,\, s(A(x), y) \leqslant q\}$. Существуют такие окрестности $U_1(x_0), V(y_0)$ точек x_0, y_0 , что $s(A(x), y) < q \quad (x \in U_1(x_0),\ y \in V(y_0))$. Это влечёт за собой включение $V(y_0) \subset int(C_0(x))\,(x \in U(x_0))$. Отображение $\mathscr{D}\colon X \to Cv(Y)$ полунепрерывно снизу, поэтому найдется такая окрестность $U_2(x_0)$ точки x_0, что $V(y_0) \cap \mathscr{D}(x) \neq \varnothing$ $(x \in U_2(x_0))$. Следовательно, сужение $\mathscr{D} \cap C_0$ полунепрерывно снизу ([2], с. 32). Согласно теореме Майкла [2 — 4] существует непрерывное сечение $g(x, x_0) \quad (x \in U(x_0))$ этого отображения.

Система окрестностей $U(x_0)$ $(x_0 \in X)$ образует покрытие X. В это покрытие можно вписать локально конечное покрытие $V_i\,(i \in I)$. Фиксируем разбиение единицы φ_i, подчиненное покрытию V_i $(i \in I)$. Определим непрерывное отображение $w\colon X \to Y$ равенством

$$w(x) = \sum_{i\in I} \varphi_i(x) g(x, x_i)\,. \tag{3}$$

В силу (3) вектор $w(x)$ есть выпуклая комбинация векторов $g(x, x_i)$, поэтому из условия $g \in \mathscr{D} \cap C_0$ следует включение $w(x) \in \mathscr{D}(x)$ и неравенство (2). В части необходимости лемма доказана.

Достаточность. Пусть $w(x) \in \mathscr{D}(x)$ и выполнено неравенство (2). Тогда справедливы соотношения $\langle w(x), z\rangle \leqslant s(A(x), w(x)) < 0 \quad \forall z \in A(x)$. Следовательно, $A(x) \cap (-N(x)) = \varnothing \quad \forall x \in X$, а это равносильно отсутствию решений у включения (1). Лемма доказана.

2. Пусть X – замкнутое подмножество B-пространства Y. В множестве X стандартным образом вводится метрика $\rho(x, y) = \|x - y\|$ и относительная топология. Далее $\omega(X)$ – совокупность ограниченных открытых (в относительной топологии) подмножеств X; $int_X(\mathscr{K})$ и $\partial_X(\mathscr{K})$ – относительная внутренность и граница множества $\mathscr{K} \subset X, d(u, Q) = \inf\{\|u - v\|, v \in Q\}$ – расстояние от u до множества $Q \subset Y$. Если $X = Y$, то $int_X(\mathscr{K}) = int(\mathscr{K}),\ \partial_X(\mathscr{K}) = \partial(\mathscr{K})$.

Лемма 3. *Пусть $U \in \omega(X), \Omega$ – окрестность множества X. Тогда существует такое множество V класса $\omega(Y)$, что*

$$cl(V) \subset \Omega, \quad V \cap X = U, \quad \partial(V) \cap X = \partial_X(U). \tag{4}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 33.1 ([6], с. 261), поэтому опускается.

Пусть $Y_0 \in \Gamma(Y), \mathscr{F} : \Omega \to Cv(Y_0)$ – полунепрерывное снизу отображение, причем $y \notin \mathscr{F}(y) \forall y \in \Omega \setminus X$. Каждому замкнутому множеству $\mathscr{M} \subset \Omega$ сопоставим множество $C(\mathscr{M}, \mathscr{F})$ непрерывных сечений отображения $\mathscr{F} : M \to Y_0$. Если $f \in C(\mathscr{M}, \mathscr{F})$, то отображение $\mathscr{F}_0\colon \Omega \to Cv(Y_0)$, совпадающее с $\mathscr{F}$ на $\Omega \setminus \mathscr{M}$ и равное f на $\mathscr{M}$, полунепрерывно снизу, поэтому существует непрерывное продолжение f до непрерывного сечения $\mathscr{F} : \Omega \to Cv(Y_0)$ ([3]).

Отображению f класса $C(\mathscr{M}, \mathscr{F})$ сопоставим векторное поле $\Phi = I - f$ (I – оператор тождественного преобразования). Элемент $u \in \mathscr{M}$ – особая точка поля Φ, если $\Phi(u) = 0$. Векторное поле Φ невырождено на $\mathscr{M}$, если $\mathscr{M}$ не содержит особых точек.

Через $\mathscr{E}(\mathscr{M}, \mathscr{F})$ обозначим совокупность невырожденных на $\mathscr{M}$ векторных полей. Два векторных поля Φ_0, Φ_1 класса $\mathscr{E}(\mathscr{M}, \mathscr{F})$ назовем $\mathscr{F}$ – гомотопными, если существует непрерывное отображение $f\colon \mathscr{M} \times [0,1] \to Y$ такое, что $I - f(\cdot, \lambda) \in \mathscr{E}(\mathscr{M}, \mathscr{F}) \forall \lambda \in [0,1]$ и $\Phi_0 = I - f(\cdot, 0), \Phi_1 = I - f(\cdot, 1)$.

Предшествующие определения применимы, в частности, к случаю $\mathscr{M} = \partial_X U$, где $U \in \omega(X)$. Обозначим через V множество класса $\omega(Y)$, для которого имеют место соотношения (4). Как отмечалось выше, для любого поля $\Phi = I - f$ класса $\mathscr{E}(\partial_X U, \mathscr{F})$ существуют такие непрерывные продолжения f и Φ на Ω, что $f(x) \in \mathscr{F}(x), \Phi(x) = x - f(x) \forall x \in \Omega$. Если $Y_0 \subset Y_1 \in \Gamma(Y), V_i = Y_i \cap V$, то $\partial_{Y_i} V_i \subset Y_i \cap \partial V$, поэтому поле Φ невырождено на $\partial_{Y_i} V_i \, (i = 0, 1)$. Так как $f(x) \in \mathscr{F}(x) \subset Y_0$, то вращения $\gamma(\Phi, V_0)$ и $\gamma(\Phi, V_1)$ поля Φ на $\partial_{Y_0} V_0$ и $\partial_{Y_1} V_1$ совпадают ([2], с. 66, [6], с. 33). Рассуждения, аналогичные проведённым в ([6], с. 33), показывают, что $\gamma(\Phi, V)$ не зависит от выбора области V, подчинённой требованию (4), а также от способа продолжения f и Φ на Ω при условиях $f(x) \in \mathscr{F}(x), \Phi(x) = x - f(x) \quad (x \in \Omega)$. Число $\gamma(\Phi, V)$ назовем $\mathscr{F}$ - вращением поля Φ на $\partial_X U$ и обозначим через $\gamma(\Phi, U, \mathscr{F})$.

Теорема 1. *Пусть $U_i \in \omega(X)$, $i = 0, 1, \cdots$. Тогда*

1) если Φ_0, Φ_1 $\mathscr{F}$ – гомотопные поля класса $\mathscr{E}(\partial_X U_0, \mathscr{F})$, то $\gamma(\Phi_0, U_0, \mathscr{F}) = \gamma(\Phi_1, U_0, \mathscr{F})$ – гомотопическая инвариантность $\mathscr{F}$ - вращения;

2)если $U_i \subset U_0$, $U_i \cap U_j = \varnothing$ $(i, j = 1, 2, \cdots, i \neq j)$,

$$\mathscr{M} = cl(U_0) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \quad \text{и} \quad \Phi \in \mathscr{F}(\mathscr{M}, \mathscr{F}), \quad \text{то} \quad \gamma(\Phi, U_0, \mathscr{F}) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma(\Phi, U_i, \mathscr{F})$$

– аддитивность вращения;

3) если $\mathscr{F} \equiv Q \in Cv(Y_0)(\forall y \in \Omega)$, $\quad Q \subset X$, $\quad y_0 \in U_0$, $\quad \Psi(y) = y - y_0$, то $\gamma(\Psi, U_0, \mathscr{F}) = 1$ – нормировка вращения.

Доказательство. Пусть $f\colon \partial_X U_0 \times [0,1] \to Y$ – непрерывное отображение, $I - f(\cdot, \lambda) \in \mathscr{E}(\mathscr{M}, \mathscr{F}) \forall \lambda \in [0,1]$ и $\Phi_0 = I - f(\cdot, 0), \Phi_1 = I - f(\cdot, 1)$. Продолжим отображение f на $\Omega \times [0,1]$ с сохранением непрерывности и включения $f(x, \lambda) \in \mathscr{F}(x) \quad (x \in \Omega, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. Если $V \in \omega(Y)$ и имеют место соотношения (4) с $U = U_0$, то поля $\Phi(\cdot, \lambda)$ гомотопны на $\partial_{Y_0}(Y_0 \cap V)$, следовательно, $\gamma(\Phi_0, U_0, \mathscr{F}) = \gamma(\Phi_0, Y_0 \cap V) = \gamma(\Phi_1, Y_0 \cap V) = \gamma(\Phi_1, U, \mathscr{F})$, что и доказывает первое свойство вращения. Аналогичным образом устанавливаются свойства 2, 3.

В условиях теоремы 1 свойство нормировки относится к отображению $\mathscr{F}$ специального вида. Примеры показывают, что в общем случае свойство нормировки может не иметь места.

Если X – ограниченное замкнутое множество, то $X \in \omega(X)$. В этой ситуации $\partial_X X = \varnothing$. Пусть область V из $\omega(Y)$ удовлетворяет требованиям (4) с $U = X$, $\Phi = I - f \in \mathscr{E}(\partial V, \mathscr{F})$. Число $\gamma(\Phi, V)$ не зависит от выбора области V и непрерывного сечения f отображения $\mathscr{F}\colon \partial V \to Cv(Y)$. Оно характеризует пару $(X, \mathscr{F})$ и далее обозначается символом $\chi(X, \mathscr{F})$.

Пусть $\mathscr{F}\colon \Omega \times [0,1] \to Cv(Y_0)$ – полунепрерывное снизу отображение, причем $y \notin \mathscr{F}_\lambda(y) = \mathscr{F}(y, \lambda) \quad (y \in \Omega \setminus X, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. Если $f\colon \Omega \times [0,1] \to Y$ – непрерывное сечение отображения $\mathscr{F}$, то векторные поля $\Phi = I - f(\cdot, \lambda) \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$, гомотопны на $\Omega \setminus X$, поэтому $\gamma(\Phi_0, V) = \gamma(\Phi_1, V)$ для любой области V класса $\omega(Y)$, удовлетворяющей требованию (4) с $U = X$. Отсюда вытекает равенство $\chi(X, \mathscr{F}_0) = \chi(X, \mathscr{F}_1)$, означающее гомотопическую инвариантность функции $\chi(X, \mathscr{F})$ по второму аргументу. В частности, данное равенство имеет место, если отображения $\mathscr{F}_i$ определяются соотношениями $\mathscr{F}_i(y) = Y_i \cap \Pi(y)$ $(i = 0, 1)$, в которых $Y_i \in \Gamma(Y), \Pi\colon \Omega \to Cv(Y)$ – такое отображение, что $y \notin \Pi(y) \quad (y \in \Omega \setminus X)$.

3. Ниже Y – сепарабельное рефлексивное действительное B – пространство, $Z = Y^*$ – сопряжённое к нему, символы $\rightharpoonup$ и $\to$ означают слабую и сильную сходимость в пространствах Y, Z. Пусть $y_i \in Y, z_i \in Z \quad (i = 1, 2, \cdots)$. Будем записывать $(y_i, z_i) \xrightarrow{\tau} (y, z)$, если

$$y_i \rightharpoonup y, \quad z_i \rightharpoonup z \quad \text{и} \quad \overline{\lim_{i\to\infty}} \langle y_i, z_i \rangle \leqslant \langle y, z \rangle \,.$$

Отображение $A\colon \mathscr{M} \subset Y \to P(Z)$ назовём ограниченным, если для каждого ограниченного множества $\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}$ соответствующая область значений $A(\mathscr{M}_1)$ есть ограниченное подмножество пространства Z. Обозначим через $S_0(\mathscr{M})$ совокупность ограниченных отображений $A\colon \mathscr{M} \to Cv(Z)$, удовлетворяющих условию

$\alpha_0)$: для произвольных последовательностей $y_i \in \mathscr{M}$, $z_i \in A(y_i)$ таких, что $(y_i, z_i) \xrightarrow{\tau} (y, z)$, имеют место соотношения $y \in \mathscr{M}$, $z \in A(y)$, $\langle y_i, z_i \rangle \to \langle y, z \rangle$. Следуя [7], отображения класса $S_0(\mathscr{M})$ будем называть псевдомонотонными. Многочисленные примеры псевдомонотонных отображений можно найти в [7] — [14]. Несложно показать квазинепрерывность сверху псевдомонотонного отображения. Класс $S_0(\mathscr{M})$ замкнут относительно операций сложения и умножения на положительные числа [7].

Пусть $\mathscr{M} = cl(\mathscr{M}) \subset Y$. Обозначим через $S(\mathscr{M})$ совокупность ограниченных отображений $A\colon \mathscr{M} \to Cv(Z)$, удовлетворяющих условию

$\alpha)$: для произвольных последовательностей $y_i \in \mathscr{M}$, $z_i \in A(y_i)$ таких, что $(y_i, z_i) \xrightarrow{\tau} (y, z)$, имеют место соотношения $y_i \to y$, $z \in A(y)$.

Однозначные операторы близкого вида исследовались многими авторами (см., например, [9] — [11] и приведенную там литературу); примеры, относящиеся к многозначным отображениям, можно найти в [12] — [15]. Условие $\alpha)$ влечёт за собой условие $\alpha_0)$, поэтому $S(\mathscr{M}) \subset S_0(\mathscr{M})$. Класс $S(\mathscr{M})$ замкнут относительно операции умножения на положительные числа; если $A_0 \in S_0(\mathscr{M}), A \in S(\mathscr{M})$, то $A_0 + A \in S(\mathscr{M})$.

Класс $S(\mathscr{M})$ полезен при исследовании аппроксимаций включения (1). Пусть $\Pi_i\colon \mathscr{M} \to Y$ – последовательность полунепрерывных снизу отображений, $\Pi_i(y) \subset \Pi_{i+1}(y) \quad (i = 1, 2, \cdots; y \in \mathscr{M})$, и, наконец, $d(y, \Pi_i(y_i)) \to 0$, если $y_i \rightharpoonup y$. Положим

$$\Pi(y) = cl\left(\bigcup_i \Pi_i(y)\right), \quad N(y) = (\Pi(y) - y)^{-1}, \quad N_i(y) = (\Pi_i(y) - y)^{-1}.$$

Из определения отображения Π вытекает его полунепрерывность снизу и включение $y \in \Pi(y)$.

Лемма 4. *Пусть* $A \in S(\mathscr{M})$, $y_i \in \mathscr{M}$, $0 \in A(y_i) + N_i(y_i)\,(i = 1, 2, \cdots)$ *и* $y_i \rightharpoonup y$. *Тогда* $y_i \to y$ *и* $0 \in A(y) + N(y)$.

Доказательство. Так как $0 \in A(y_i) + N_i(y_i)$, то пересечение множеств $A(y_i)$ и $-N_i(y_i)$ непусто. Фиксируем элемент z_i из этого пересечения. Последовательность

$z_i\,(i = 1, 2, \cdots)$ ограничена, поэтому можно считать, что $z_i \rightharpoonup z$. Поскольку $-z_i \in N_i(y_i)$, то

$$\langle v - y_i, z_i \rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in \Pi_i(y_i). \tag{5}$$

В силу условий леммы $y_i \rightharpoonup y$, следовательно, $d(y, \Pi_i(y_i)) \to 0$. Поэтому существует последовательность $v_i \in \Pi_i(y_i)$, $v_i \to y$. Подставляя в (5) v_i вместо v и переходя к пределу при $i \to \infty$, получаем, что $(y_i, z_i) \xrightarrow{\tau} (y, z)$. Так как $A \in S(\mathscr{M})$, то $z \in A(y)$ и $y_i \to y$.

Для завершения доказательства достаточно установить включение $-z \in N(y)$. При любом k отображение $\Pi_k \colon \mathscr{M} \to Y$ полунепрерывно снизу. Отсюда вытекает, что $d(u, \Pi_k(y_i)) \to 0$, если $u \in \Pi_k(y)$. Вместе с (5) это приводит к неравенству

$$\langle u - y, z \rangle \geqslant 0 \quad \forall u \in \Pi_k(y),$$

из которого в силу определения отображения Π следует соотношение $\langle w - y, z \rangle$, равносильное включению $-z \in N(y)$. Лемма доказана.

Включения вида $0 \in A(y) + N_i(y)$ играют роль приближений типа Галёркина к включению (1). Один из способов построения соответствующих приближений заключается в том, что последовательность отображений Π_i, связанная с N_i равенством $N_i(y) = (\Pi_i(y) - y)^-$, определяется соотношением $\Pi_i(y) = E_i \cap \Pi(y)$, в котором E_i – последовательность класса $\Gamma(Y)$. Обсудим подробнее возникающие здесь вопросы.

Пусть $X = cl(X) \subset Y, \Omega$ – некоторая окрестность множества X, $\Pi \colon \Omega \to Cv(Y)$ – многозначное отображение, причем $y \notin \Pi(y) \quad \forall y \in \Omega \setminus X$. Скажем, что неубывающая последовательность $E_i \in \Gamma(Y)$ согласована с отображением Π, если выполнены условия: $\beta_1) E_i \cap \Pi(y) \neq \varnothing \quad (i \geqslant \|y\|, y \in \Omega)$ и отображения $\Pi_i(y) = E_i \cap \Pi(y)$ полунепрерывны снизу; $\beta_2) d(u, \Pi_i(y)) \to 0 \forall y \in X, u \in \Pi(y)$; $\beta_3)$ если $y_i \in X, y_i \rightharpoonup y$, то $d(y, \Pi_i(y_i)) \to 0$. Как нетрудно понять, если последовательность $\{E_i\}$ согласована с отображением Π и $\Pi_i(y) = E_i \cap \Pi(y), N_i(y) = (\Pi_i(y) - y)^{-1}$, то для соответствующей последовательности приближений $0 \in A(y) + N_i(y)$ к включению (1) справедлива лемма 4.

В качестве примера рассмотрим постоянное отображение Π, когда $\Pi(y) = X \forall y \in \Omega, X \in Cv(Y)$. Если $\{x_1, x_2, \cdots\}$ – счетное всюду плотное в X множество, то последовательность $E_i = span\{x_1, \cdots, x_i\}$ обладает свойствами $\beta_1) - \beta_3)$. В рассматриваемом случае множество $N(y) = \{z \in Z, \langle v - y, z \rangle \leqslant 0 \forall v \in X\}$ совпадает с нормальным конусом к множеству X в точке y. Более сложный пример отображения Π анализируется в работе [15].

Пусть $E_i\,(i = 1, 2, \cdots)$ неубывающая последовательность класса $\Gamma(Y)$, согласованная с многозначным отображением $\Pi \colon \Omega \to Cv(Y)$, $\mathscr{M}$ – замкнутое подмножество Ω, $A \in S(\mathscr{M}), N(y) = (\Pi(y) - y)^{-1} \quad (y \in \Omega)$. Элемент $u \in \mathscr{M}$ назовём Π – особой точкой оператора A, если $0 \in A(u) + N(u)$. Оператор A назовём Π – невырожденным на множестве $\mathscr{M}$, если $\mathscr{M}$ не содержит Π – особых точек.

Через $S(\mathscr{M}, \Pi)$ обозначим совокупность Π – невырожденных на $\mathscr{M}$ операторов класса $S(\mathscr{M})$. Два оператора A_0, A_1 класса $S(\mathscr{M}, \Pi)$ назовём Π – гомотопными, если существует такое отображение $A \colon \mathscr{M} \times [0, 1] \to Kv(Z_w)$, что $A(\cdot, 0) = A_0, A(\cdot, 1) = A_1$, для любого ограниченного множества $\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}$ соответствующее множество

$A\colon \mathscr{M}_1 \times [0,1]$ ограничено, выполнено условие α'): для любых последовательностей $y_i \in \mathscr{M}, \lambda_i \in [0,1], z_i \in A(y_i,\lambda_i)$, обладающих свойствами

$$(y_i, z_i) \xrightarrow{\tau} (y,z), \quad \lambda_i \to \lambda\,,$$

имеют место соотношения $y_i \to y$, $z \in A(y,\lambda)$. Как нетрудно видеть, при любом λ из [0,1] оператор $A_\lambda = A(\cdot,\lambda)$ принадлежит классу $S(\mathscr{M},\Pi)$; будем говорить, что семейство операторов $A_\lambda \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1) \qquad \Pi$ – соединяет операторы A_0, A_1 на множестве $\mathscr{M}$.

Лемма 5. *Пусть семейство операторов* $A_\lambda \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1) \quad \Pi$ *– соединяет операторы* A_0, A_1 *на ограниченном замкнутом множестве* $\mathscr{M} \subset \Omega$. *Тогда существует такое непрерывное отображение* $f\colon \mathscr{M} \times [0,1] \to Y$, *что при некотором* k *и любых* y *из* $\mathscr{M}$ *и* λ *из* $[0,1]$ *справедливы соотношения*

$$f(y,\lambda) \in E_k \cap \Pi(y), \quad s(A_\lambda(y), f(y,\lambda) - y) < 0. \tag{6}$$

Доказательство. Положим $\Pi_i(y) = E_i \cap \Pi(y)$, $N_i(y) = (\Pi_i(y) - y)^{-1} \quad (i = 1,2,\cdots,n,;\ y \in \mathscr{M})$. По условиям леммы включение $0 \in A_\lambda(y) + N(y)$ не имеет принадлежащих множеству $\mathscr{M}$ решений. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 4, можно убедиться, что при некотором k не имеют решений включения $0 \in A_\lambda(y) + N_k(y) \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. Теперь можно применить лемму 2, полагая $\mathscr{D}(y,\lambda) = \Pi_k(y) - y, A(y,\lambda) = A_\lambda(y)$. Все условия этой леммы выполнены. Сечение w отображения $\mathscr{D}$, удовлетворяющее (2), имеет представление $w(y,\lambda) = f(y,\lambda) - y$, где f – искомое непрерывное отображение. Лемма доказана.

Применим предшествующие конструкции к случаю $\mathscr{M} = \partial_X U$, где $U \in \omega(X)$. Если $A \in S(\mathscr{M},\Pi)$, то согласно (6) существует непрерывное отображение $f\colon \mathscr{M} \to Y$, удовлетворяющее условиям

$$f(y) \in E_k \cap \Pi(y), \quad s(A(y), f(y) - y) < 0 \quad (y \in \mathscr{M})\,. \tag{7}$$

Из (7) вытекает, что поле $\Phi(y) = y - f(y)$ принадлежит классу $\mathscr{E}(\mathscr{M},\mathscr{F})$ с $\mathscr{F} = E_k \cap \Pi$. Построенное таким образом отображение класса $S(\mathscr{M},\Pi)$ в класс $\mathscr{E}(\mathscr{M},\mathscr{F})$ не является однозначным, однако если поля Φ_0, Φ_1 порождаются одним и тем же оператором A класса $S(\mathscr{M},\Pi)$, то они линейно гомотопны, поэтому их $\mathscr{F}$ – вращения $\gamma(\Phi_i, U, \Pi)$ одинаковы. Из результатов пункта 2 вытекает и независимость от выбора k (при условии (7)). Число $ind(A,U;\Pi) = \gamma(\Phi,U;\mathscr{F})$ назовём индексом оператора A. Приведенное определение сохраняет силу в случае, когда X – ограниченное замкнутое множество и $U = X$. Тогда

$$ind(A,X;\Pi) = \chi(X, E_k \cap \Pi) \quad (k \gg 1).$$

Теорема 2. *Пусть* $U_i \in \omega(X), i = 0,1,2,\cdots$. *Тогда*
1) если $A_0, A_1 \quad \Pi$ *– гомотопные операторы класса* $S(\partial_X U_0, \Pi)$, *то*

$$ind(A_0, U_0; \Pi) = ind(A_1, U_0; \Pi);$$

2) если $U_i \subset U_0, U_i \cap U_j = \varnothing \quad (i,j = 1,2,\cdots, i \neq j), \mathscr{M} = cl(U_0) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$

$$\text{и} \quad A \in S(\mathscr{M},\Pi), \quad \text{то} \quad ind(A,U_0,\Pi) = \sum_{i=1}^{\infty} ind(A,U_i;\Pi)\,;$$

3) если $\Pi(y) \equiv X \in Cv(Y)$, $\quad y_0 \in U_0$, $\quad A \in S(\partial_X U_0; \Pi)$ *и*

$$\langle y - y_0, z \rangle \geqslant 0 \qquad (y \in \partial_X U_0,\ z \in A(y)),$$

то $ind(A, U; \Pi) = 1$.

Доказательство. Установим свойство 1), выражающее гомотопическую инвариантность индекса. Если семейство операторов $A_\lambda \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1) \quad \Pi$ – соединяет операторы A_0, A_1 на множестве $\partial_X U_0$, то в силу леммы 5 существует непрерывное отображение $f\colon \partial_X U_0 \times [0,1] \to Y$, удовлетворяющее соотношениям (6). Векторные поля $\Phi_\lambda(y) = y - f(y, \lambda) \quad \mathscr{F}$ – гомотопны на $\partial_X U_0$ с $\mathscr{F} = E_k \cap \Pi$, поэтому $\gamma(\Phi_0, U_0; \mathscr{F}) = \gamma(\Phi_1, U_0; \mathscr{F})$. Но с другой стороны $ind(A_i, U_0; \Pi) = \gamma(\Phi_i, U_0; \mathscr{F}) \quad (i = 0, 1)$, что и доказывает гомотопическую инвариантность индекса.

Для доказательства аддитивности индекса фиксируем непрерывное отображение $f\colon \mathscr{M} \to Y$, удовлетворяющее условиям (7). Тогда $ind(A, U_i; \Pi) = \gamma(I - f, U_i; \mathscr{F}) \quad (i = 0, 1, 2, \cdots)$ и требуемый результат вытекает из теоремы 1. Свойство 3) нормировки индекса относится к случаю постоянного отображения Π. В этой ситуации оно установлено в [14]. Теорема доказана.

Теорема 3. *(принцип нулевого индекса). Пусть* $U \in \omega(X)$, $\quad A \in S(cl(U)) \cap S(\partial_X U, \Pi)$ *и* $ind(A, U; \Pi) \neq 0$. *Тогда задача (1) имеет принадлежащее* U *решение.*

Доказательство. Если $A \in S(\mathscr{M}, \Pi)$ с $\mathscr{M} = cl(U)$, то существует непрерывное отображение $f\colon \mathscr{M} \to Y$, удовлетворяющее условиям (7). В этом случае $0 = \gamma(I - f, U; \mathscr{F}) = ind(A, U; \Pi)$, что противоречит предположению $ind(A, U; \Pi) \neq 0$. Теорема доказана.

Пусть $\mathfrak{N}$ – ограниченное изолированное Π – особое множество оператора A класса $S(X)$, $\quad \mathfrak{N}_t = \{y \in X,\ d(y, \mathfrak{N}) < t\}$. При малых $t > 0$ число $ind(A, \mathfrak{N}_t; \Pi)$ постоянно; это число мы обозначим символом $ind(\mathfrak{N}; \Pi)$ и назовём индексом особого множества $\mathfrak{N}$ оператора A. Справедлив вариант теоремы об алгебраическом числе особых точек (см., например, [6], с. 139).

Теорема 4. *Пусть* $U \in \omega(X)$, $A \in S(X) \cap S(\partial_X U, \Pi)$ *и оператор* A *имеет в* U *только изолированные* Π *- особые множества. Тогда* Π *- особых множеств конечное число и* $ind(A, U; \Pi) = \sum_i ind(\mathfrak{N}_i, A; \Pi)$, *где суммирование ведётся по всем* Π *- особым множествам* $\mathfrak{N}_i$ *оператора* A, *лежащим внутри* U.

Теорема 4 вытекает из свойства аддитивности индекса.

По известным схемам свойства индекса могут быть использованы для исследования включения (1). В частности, всякий признак отличия от нуля индекса $ind(A, U; \Pi)$ влечёт разрешимость включения (1). Это позволяет избавиться от предположений типа коэрцитивности оператора A. Соответствующие примеры, относящиеся к случаю постоянного отображения Π, можно найти в [9] — [14]. Если индекс $ind(\mathfrak{N}, A, \Pi)$ особого множества $\mathfrak{N} \subset U$ оператора A отличен от индекса $ind(A, U; \Pi)$, то можно гарантировать существование решений включения (1), не принадлежащих множеству $\mathfrak{N}$.

Как отмечалось выше, для ограниченного множества X числа $\chi(X, E_k \cap \Pi)$ при больших k одинаковы. Положим $ind(X, \Pi) = \chi(X, E_k \cap \Pi) \quad (k \gg 1)$. Число $ind(X, \Pi)$ не зависит от выбора последовательности E_i класса $\Gamma(Y)$, удовлетворяющей предположениям $\beta_1) - \beta_3)$, и является целочисленной характеристикой пары (X, Π). В силу предшествующих результатов $ind(X, \Pi) = ind(A, X; \Pi)$ для любого оператора A класса $S(X)$.

Теорема 5. *Пусть X – ограниченное замкнутое множество, $N(x) = (\Pi(x) - x)^{-1}$ и $ind(X, \Pi) \neq 0$. Если $A \in S(X)$, то существует решение включения (1).*

Доказательство. Теорема 5 есть следствие принципа ненулевого индекса и равенства $ind(X, \Pi) = ind(A, X; \Pi)$.

Комбинируя принцип ненулевого индекса и подходящие аппроксимации, можно предположение $A \in S(X)$ заменить менее ограничительным условием $A \in S_0(X)$. Отметим, что в работе [15] рассматривался частный случай включения (1), когда $N(x)$ совпадает с нормальным конусом $N_Q(x)$ к замкнутому и, вообще говоря, невыпуклому множеству Q. При достаточно естественных относительно множества Q предположениях показывается совпадение эйлеровой характеристики $\chi(Q)$ с $ind(Q, \Pi)$. Включения данного типа возникают в аналитической статике (принцип виртуальных перемещений), в экстремальных задачах (необходимые условия экстремума). Предложенная выше схема позволяет полнее исследовать множество точек покоя механических систем с освобождающимися связями, находить топологические характеристики экстремалей, полезные, в частности, для оценок числа решений вариационных и краевых задач.

Подражая терминологии, принятой в аналитической механике, операторное включение (1), соответствующее случаю $N(x) = N_Q(x)$, назовём голономным. Новизна предложенного выше подхода, в первую очередь, связана с отказом от условия голономности. Авторы считают, что изложенные выше результаты могут найти приложения к аналитической статике с неголономными связями.

Список литературы

1. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений // Успехи мат. наук. 1980. 35:1. С. 59 — 126.

2. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений. Воронеж: Изд-во Воронежского университета, 1986.

3. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. М.: Изд-во Московского университета, 1988.

4. Michael E. Continous selections // Ann. Math. 1956. 63:2. C. 361 — 381.

5. Обен Ж.П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.

6. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.

7. Gossez J.P. Nonlinear elliptic boundary value problems for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficient // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. 190. P. 163—206.

8. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

9. Скрыпник И.В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М., Наука, 1990.

10. Похожаев С.И. О разрешимости нелинейных уравнений с нечетными операторами // Функцион. анализ и его прил. 1967. Т. 1, № 3. С. 66 — 73.

11. Browder F.E. Pseudo-monotone operators and the direct method of the calculus of variations // Bull. Arch. Ration. Mech. Anal. 1970. 38:4. P. 268 — 277.

12. Бобылёв Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К. Геометрические методы в вариационных задачах. М.: Магистр, 1998.

13. Рязанцева И.П. Избранные главы теории операторов монотонного типа. Нижний Новгород, 2008.

14. Климов В.С. К задаче о периодических решениях операторных дифференциальных включений // Изв. АН СССР. Сер. математика. 1989. 53:2. С. 1393 — 1407.

15. В.С. Климов. Топологические характеристики многозначных отображений и липшицевых функционалов // Изв. РАН. Сер. математика. 2008. 72: 4. С. 97 — 120.

About One Class of Operators Inclusions

Demyankov N. A., Klimov V. S.

Keywords: operator inclusion, variational inequality, multivalued mapping, vector field, convex set

The operator inclusion $0 \in A(x)+N(x)$ is studied. The main results refer to the case, when A – a bounded operator of monotone type from a reflexive space into conjugate to it, N – a conevalued operator. No solution criterion of the viewed inclusion is set up. Integer characteristics of multivalued mappings with homotopy invariance and additivity are introduced. Application to the theory of variational inequalities with multivalued operators is identified.

Сведения об авторах:
Демьянков Николай Андреевич,
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, аспирант;
Климов Владимир Степанович,
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, д-р физ.-мат. наук, проф., заведующий кафедрой математического анализа