

©Алешин С. В., Глызин С. Д., Кащенко С. А., 2015

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-609-628

УДК 517.9

## Особенности динамики уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова с отклонением по пространственной переменной

Алешин С. В., Глызин С. Д., Кащенко С. А.

получена 10 августа 2015

Рассматривается задача распространения волны плотности в логистическом уравнении с диффузией и отклонением по пространственной переменной (уравнение Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова с отклонением). Для исследования качественного поведения решений этого уравнения было рассмотрено уравнение профиля волны и найдены условия возникновения у него колебательных режимов. Затем проанализирована соответствующая логистическому уравнению с отклонением краевая задача с периодическими условиями, для которой изучена проблема потери устойчивости пространственно однородного состояния равновесия и найдены ответвляющиеся от него пространственно неоднородные колебательные режимы. Численный анализ процесса распространения волны показал, что при достаточно малых значениях запаздывания данное уравнение имеет решения, близкие к решениям стандартного уравнения КПП. Увеличение параметра запаздывания приводит сначала к появлению затухающей колебательной составляющей в пространственном распределении решения. Дальнейший рост данного параметра приводит к разрушению бегущей волны. Это выражается в том, что на участке распространения волны, противоположном направлению отклонения, сохраняются незатухающие по времени и медленно распространяющиеся по пространству колебания, близкие к решениям соответствующей краевой задачи с периодическими граничными условиями. Наконец, если значение отклонения достаточно велико, то во всей области распространения волны наблюдаются интенсивные пространственно-временные колебания.

**Ключевые слова:** аттрактор, бифуркация, уравнение Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова, уравнение Гинзбурга–Ландау, отклонение по пространству

**Для цитирования:** Алешин С. В., Глызин С. Д., Кащенко С. А., "Особенности динамики уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова с отклонением по пространственной переменной", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22:5** (2015), 609–628.

### Об авторах:

Алешин Сергей Владимирович, старший лаборант-исследователь ОПСи НЦЧ РАН, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, НЦЧ РАН, ул. Лесная, д. 9, г. Черноголовка, Московская область, 142432 Россия, e-mail: fktiby@yandex.ru

Глызин Сергей Дмитриевич, orcid.org/0000-0002-6403-4061, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей, ведущий научный сотрудник ОПСи НЦЧ РАН, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, НЦЧ РАН, ул. Лесная, д. 9, г. Черноголовка, Московская область, 142432 Россия, e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Кащенко Сергей Александрович, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Каширское шоссе, 31, г. Москва, 115409 Россия, e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

### Благодарности:

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00158).

## Введение

Одним из наиболее простых нелинейных уравнений в частных производных, моделирующих распространение волн плотности распределения изучаемой величины, является рассмотренное А. Н. Колмогоровым, И. Г. Петровским и Н. С. Пискуновым в статье [2] логистическое уравнение с диффузией

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u[1 - u], \quad (1)$$

которое ниже будем называть уравнением КПП. Это уравнение было привлечено авторами для описания процесса распространения генной волны. Здесь  $u(t, x)$  — плотность распределения числа особей, обладающих доминантным геном,  $t \geq 0$  — временная переменная, а  $x \in (-\infty, \infty)$  — пространственная. Рассматривается задача распространения волны плотности численности от некоторого ненулевого начального условия. Почти одновременно с работой [2] появилась статья Р. А. Фишера [1], также посвященная анализу волн плотности численности в уравнении (1), в связи с чем уравнение (1) часто называют уравнением Фишера или Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова.

Уравнение (1) находит применение в широкой области приложений, связанных с распространением в пространстве волн различной природы, от концентрации некоторого реагирующего вещества до волн плотности популяции. Среди большого количества публикаций, посвященных данной теме, выделим книги [3–5], в которых содержатся суммирующие результаты по проблеме, отметим также обширный библиографический список, содержащийся в [5].

В работах [1, 2] рассмотрен вопрос о таких неотрицательных решениях  $u(t, x)$ , для которых при каждом  $t > 0$  выполнены условия:  $u(t, x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow +\infty$  и  $u(t, x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ . Показано, что при достаточно больших  $t$  функция  $u(t, x)$  принимает некоторую фиксированную форму.

Обобщения уравнения (1) могут быть связаны с учетом зависимостей нелинейных слагаемых этого уравнения от сдвигов по пространству и по времени. В работах [6, 7] логистическое уравнение (1) с различными краевыми условиями и запаздывающим аргументом было применено к моделированию динамики плотности популяции. Несколько более общий подход продемонстрирован в статье [8], где дана развернутая постановка задачи, в которой изучается пространственное распределение плотности популяции. В частности, предлагается использовать следующее уравнение (см. также работы Н. Бритона [9, 10]):

$$\frac{\partial N(t, x)}{\partial t} = \Delta N(t, x) + N(t, x)[1 + \alpha N(t, x) - (1 + \alpha)(g * N)(t, x)], \quad (2)$$

где  $N(t, x)$  — плотность популяции в момент времени  $t$  в точке  $x$  ареала обитания, выражение  $1 + \alpha N(t, x) - (1 + \alpha)(g * N)(t, x)$  определяет изменения плотности численности,  $\Delta$  — оператор Лапласа, а функция  $g$  характеризует пространственно-временные неоднородности. В статье [10] предлагается следующий вид свертки  $(g * N)$ :

$$(g * N)(t, x) = \int_{-\infty}^t \int_{\Omega} g(t - \tau, x - y)N(\tau, y)dyd\tau, \quad (3)$$

где  $\Omega$  — область распределения популяции. Функция  $g$  должна удовлетворять условию нормировки  $(g * 1)(t, x) = 1$ . В предельном случае, когда  $g$  представляет собой дельта-функцию, сосредоточенную в начале координат, получаем уравнение Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова (1). Если точку сосредоточения сдвинуть по оси времени, то получится уравнение с запаздыванием, подробно рассмотренное в статье авторов [11], если же точку сосредоточения сдвинуть по пространственной переменной, то получится уравнение с отклонением по пространству.

Рассмотрим обобщение уравнения КПП (1), содержащее отклонение по пространству

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u[1 - u(t, x - h)]. \quad (4)$$

Величину  $h$  пространственного отклонения будем считать положительным числом, поскольку в противном случае можно заменить переменную  $x$  на  $-x$ , что приводит к смене знака параметра отклонения.

Исследование качественного поведения решений уравнения (4) открывается в первом разделе статьи анализом уравнения профиля волны, для которого найдены условия возникновения колебательных режимов. Затем, во втором разделе, проанализирована соответствующая уравнению (4) краевая задача с периодическими условиями, для которой изучена проблема потери устойчивости пространственно однородного состояния равновесия и найдены ответвляющиеся от него пространственно неоднородные колебательные режимы.

Учитывая, что для многих приложений представляет интерес задача о распространении волн концентрации в задаче (4), в последней части работы приведены результаты численного моделирования для уравнения (4) в случае неограниченной по  $x$  области.

## 1. Некоторые свойства волновых решений задачи

В работе [2] было показано, что в уравнении (1) волны распространяются вдоль направлений  $2t \pm x = \text{const}$ , и был определен профиль волны, приводящей к переходу от нулевых значений переменной к единичным. Как и в работе [11], выполним в уравнении (4) замену в виде бегущей волны вида  $u(t, x) = w(2t \pm x)$  и перейдем к новой временной переменной  $s = 2t \pm x$ , тогда для переменной  $w(s)$  имеем следующее уравнение второго порядка с запаздыванием:

$$w'' - 2w' + w[1 - w(s - h)] = 0, \quad (5)$$

где штрихом обозначена производная по переменной  $s$ . Свойства устойчивости нулевого решения уравнения (5) не зависят от  $h$ , это решение представляет собой неустойчивый узел с кратным корнем равным единице. Свойства устойчивости единичного состояния равновесия определяются расположением корней характеристического квазиполинома

$$P(\lambda) \equiv \lambda^2 - 2\lambda - \exp(-h\lambda). \quad (6)$$

Свойства квазиполинома (6) аналогичны свойствам квазимногочлена, полученного в предыдущей части работы. Приведем без доказательства утверждения, касающиеся расположения корней квазиполинома (6). Рассмотрим сначала расположение и количество вещественных корней квазиполинома  $P(\lambda)$ . Простейший анализ

свойств трансцендентного уравнения  $P(\lambda) = 0$  показывает, что при всех положительных  $h$  оно имеет либо один, либо три корня. Один из этих корней положительный, а два других отрицательны и появляются при критическом значении  $h_1^*$ , для нахождения которого имеем следующую систему:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2\lambda - \exp(-h\lambda) &= 0, \\ 2\lambda - 2 + h \exp(-h\lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Решая систему (7), имеем  $\lambda \approx -1.23141$ ,  $h = h_1^* \approx 1.12154$ . Приведенные выше рассуждения позволяют сформулировать следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Квазиполином  $P(\lambda)$  имеет при  $0 < h < h_1^*$  ровно три вещественных корня: один положительный и два отрицательных, а при  $h > h_1^*$  — единственный положительный вещественный корень.*

Таким образом, в спектре устойчивости единичного состояния равновесия уравнения (5) всегда есть положительный вещественный корень. Рассмотрим теперь расположение остальных корней квазимногочлена  $P(\lambda)$ . Выполнено утверждение.

**Лемма 2.** *Все корни квазиполинома  $P(\lambda)$ , кроме одного вещественного положительного, лежат при  $0 < h < h_2^*$  в левой комплексной полуплоскости. Здесь*

$$h_2^* = \frac{\arccos(-\sqrt{5} + 2)}{\sqrt{\sqrt{5} - 2}} \approx 3.72346, \quad (8)$$

При  $h = h_2^*$  на мнимую ось выходит пара чисто мнимых корней  $\lambda = \pm i\omega_0$ , причем

$$\omega_0 = \sqrt{\sqrt{5} - 2} \approx 0.48587. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь окрестность решения  $w(s) \equiv 1$  и найдем асимптотику режима, ответвляющегося от этого решения при  $h = h_2^* + \mu$ , где  $0 < \mu \ll 1$ . Для этого применим стандартную замену метода нормальных форм

$$w(s, \mu) = 1 + \sqrt{\mu}(z(\tau) \exp(i\omega_0 s) + \bar{z}(\tau) \exp(-i\omega_0 s)) + \mu w_1(s, \tau) + \mu^{3/2} w_2(s, \tau) + \dots, \quad (10)$$

где  $\tau = \mu s$ ,  $w_j(s, \tau)$  ( $j = 1, 2$ ) — тригонометрические полиномы по переменной  $s$ ,  $z(\tau)$  — медленно меняющаяся амплитуда, подлежащая определению. Подстановка выражения (10) в уравнение (5) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях  $\sqrt{\mu}$  приводит на третьем шаге к уравнению относительно  $w_2(s, \tau)$ , из условий разрешимости которого в классе тригонометрических полиномов получаем следующее уравнение на медленную амплитуду  $z(\tau)$ :

$$\frac{dz}{d\tau} = \varphi_0 z + \varphi_1 |z|^2 z, \quad (11)$$

где  $\varphi_0 = \frac{2\omega_0^2(-1 + i\omega_0)}{P'(i\omega_0)}$ ,  $\varphi_1 = \frac{1}{P'(i\omega_0)} \left( 2\omega_0^2(1 - \omega_0^2 - 2i\omega_0) + \beta \left( (\omega_0^2 + 2i\omega_0)^2 - \frac{1}{\omega_0^2 + 2i\omega_0} \right) \right)$ ,  
 $\beta = \frac{\omega_0^2 + 2i\omega_0}{4\omega_0^2 + 4i\omega_0 + (\omega_0^2 + 2i\omega_0)^2}$ . Используя полученное представление и формулы

(8), (9), нетрудно найти приближенные значения коэффициентов уравнения (11)  $\varphi_0 \approx 0.136807 - 0.20660i$ ,  $\varphi_1 \approx -0.04429 - 0.03664i$ . Учитывая, что  $\text{Re}(\varphi_0) > 0$ , а  $\text{Re}(\varphi_1) < 0$ , можно сформулировать следующее утверждение.

**Лемма 3.** Пусть  $h = h_2^* + \mu$ , где  $0 < \mu \ll 1$ , тогда существует такое  $\mu_0 > 0$ , что для всех  $0 < \mu < \mu_0$  уравнение (5) имеет дихотомичный цикл, неустойчивое многообразие которого одномерно, а асимптотика задается формулой (10), в которой комплексная амплитуда  $z(\tau)$  заменена выражением

$$\sqrt{-\operatorname{Re}(\varphi_0)/\operatorname{Re}(\varphi_1)} \exp\left(i\epsilon s(\operatorname{Im}(\varphi_0)\operatorname{Re}(\varphi_1) - \operatorname{Re}(\varphi_0)\operatorname{Im}(\varphi_1))/\operatorname{Re}(\varphi_0) + i\gamma\right),$$

где  $\gamma$  — произвольная константа, определяющая фазовый сдвиг вдоль цикла.

## 2. Волновые решения в задаче с периодическими условиями

В этом разделе рассмотрим логистическое уравнение с диффузией и отклонением (4), дополненное периодическими краевыми условиями

$$u(t, x) = u(t, x + T), \quad (12)$$

где  $T > 0$  — период. В этой ситуации фазовым пространством задачи (4), (12) будем считать соболевское пространство  $T$ -периодических функций  $W_2^2(0, T)$ . Для исследования устойчивости состояния равновесия  $u(t, x) \equiv 1$  краевой задачи (4), (12) линеаризуем ее на этом решении, приходим к краевой задаче (аналогичные действия для задачи с запаздыванием выполнялись в работах [12–18])

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v(t, x - h), \quad v(t, x) = v(t, x + T). \quad (13)$$

Если в (13) выполнить разложение по пространственным модам, то на каждой из мод после замены  $v(t, x) = \exp \lambda \exp i\omega x$  приходим к уравнению

$$\lambda = -\omega^2 - \exp i\omega h. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что при достаточно малых  $h$  величина  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ . Найдем первое положительное значение параметра  $h$ , при котором  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ . Для этого необходимо решить алгебраическую систему

$$-\omega^2 - \cos \omega h = 0, \quad -2\omega + h \sin \omega h = 0. \quad (15)$$

Эта система сводится к трансцендентному уравнению

$$-\omega h = 2 \operatorname{ctg}(\omega h), \quad (16)$$

решая которое относительно  $\omega h$ , получаем решение системы (15):

$$h^* = 2.791544, \quad \omega^* = 0.88077. \quad (17)$$

Нетрудно видеть, что при  $h < h^*$  состояние равновесия  $u(t, x) \equiv 1$  краевой задачи (4), (12) асимптотически устойчиво. Предположим теперь, что  $T = 2\pi/\omega^*$ , а  $h = h^* + \epsilon$ , где  $\epsilon$  положительно и мало, и выясним характер потери устойчивости этого

состояния равновесия. Для этого выполним в (4), (12) стандартную замену метода нормальных форм

$$u(t, x, \varepsilon) = 1 + \sqrt{\varepsilon}u_0(t, \tau, x) + \varepsilon u_1(t, \tau, x) + \varepsilon^{3/2}u_2(t, \tau, x) + \dots, \quad (18)$$

где  $\tau = \varepsilon t$  — медленное время,

$$u_0(t, \tau, x) = z(\tau) \exp(i(\omega_0 t + \omega^* x)) + \bar{z}(\tau) \exp(-i(\omega_0 t + \omega^* x)), \quad \omega_0 = \sin \omega^* h^*.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\sqrt{\varepsilon}$  и отыскивая  $u_j(t, \tau, x)$ ,  $j = 1, 2$  в виде тригонометрических многочленов по  $t$ , получаем на втором шаге функцию

$$u_1(t, \tau, x) = -2|z|^2 \cos \omega^* h^* + \left( z^2 w_2 \exp(2i(\omega_0 t + \omega^* x)) + \text{к.с.} \right), \quad (19)$$

где под к.с. подразумевается выражение комплексно сопряженное с данным в той же скобке,  $w_2 = -(2\omega_0 i + 4\omega^* + \exp(-2i\omega^* h^*))^{-1} \exp(-i\omega^* h^*)$ .

На третьем шаге выполнения алгоритма в краевой задаче для  $u_2(t, \tau, x)$  из условий ее разрешимости в классе тригонометрических многочленов по  $t$  получаем следующее укороченное уравнение нормальной формы:

$$\frac{dz}{d\tau} = \varphi_0 z + \varphi_1 |z|^2 z, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= i\omega^* \exp(-i\omega^* h^*), \\ \varphi_1 &= 2 \cos \omega^* h^* (1 + \exp(-i\omega^* h^*)) - (\exp(-2i\omega^* h^*) + \exp(i\omega^* h^*)) w_2. \end{aligned}$$

Используя полученное представление и формулу (17), нетрудно найти приближенные значения коэффициентов нормальной формы

$$\varphi_0 \approx 0.5558 - 0.6833i, \quad \varphi_1 \approx -0.1701 + 0.59i.$$

Полученные результаты позволяют сформулировать следующее утверждение.

**Лемма 4.** Пусть  $h = h^* + \varepsilon$ , тогда существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что для всех  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  краевая задача (4), (12) имеет орбитально асимптотически устойчивый цикл, асимптотика которого задается формулой (18), где медленная переменная  $z$  заменена выражением

$$z = \sqrt{-\text{Re}(\varphi_0)/\text{Re}(\varphi_1)} \exp\left(i\varepsilon t (\text{Im}(\varphi_0)\text{Re}(\varphi_1) - \text{Re}(\varphi_0)\text{Im}(\varphi_1))/\text{Re}(\varphi_0) + i\gamma\right),$$

( $\gamma$  — произвольная константа, определяющая фазовый сдвиг вдоль цикла).

Проиллюстрируем полученный результат численно. В краевой задаче (4), (12) зафиксируем величину отклонения  $h$  больше критического значения  $h^*$  и будем ее решать численно с начальными условиями вида

$$u(0, x) = 1 + 0.35 \sin(0.88x + 0.1). \quad (21)$$

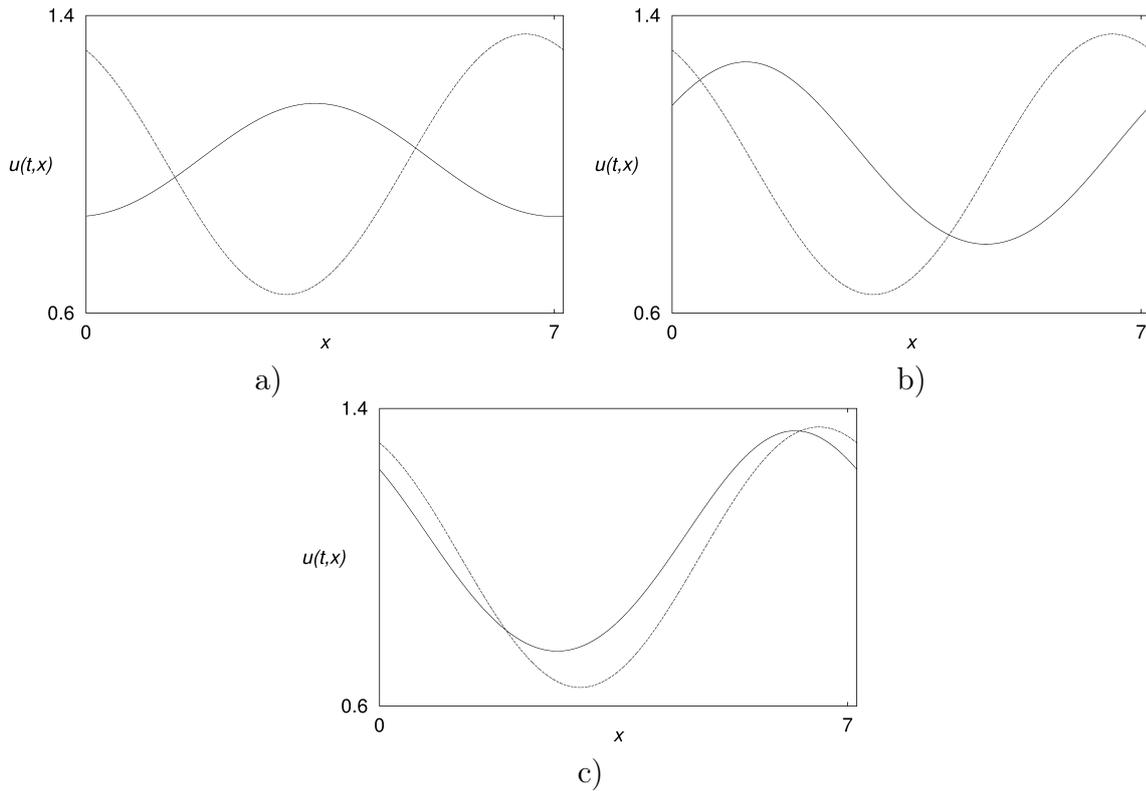


Рис. 1. Пространственное распределение решения краевой задачи (4), (12) с начальными условиями (21) при  $t = 1000$  и значениях отклонения равных: а)  $h = 2.793$ ; б)  $h = 2.796$ ; в)  $h = 2.798$

Начальные условия (21) выбраны близкими к единичному состоянию равновесия, с частотой по  $x$  близкой к  $\omega^*$  (см. формулу (17)).

Для вычислений были взяты три значения величины отклонения  $h$  равные 2.793; 2.796; 2.798. В каждом из этих случаев решение асимптотически приближалось к пространственно неоднородному циклу, распределение которого по переменной  $x$  при  $t = 1000$  приведено на рис. 1. Для полученных циклов были вычислены максимальные отклонения от единичного значения, которые оказались равными 0.160; 0.275 и 0.340 соответственно. Следует отметить, что амплитуды колебаний относительно единичного значения, полученные в вычислительном эксперименте, близки к найденным по асимптотической формуле (относительная ошибка менее 0.02), вытекающей из (18)

$$\sqrt{-(h - h^*)\text{Re}(\varphi_0)/\text{Re}(\varphi_1)}.$$

Представленные в первых двух разделах работы аналитические результаты позволяют получить некоторую информацию о решениях уравнения (4), однако для анализа зависимости решений от отклонения по пространству и начальных условий требуется численный эксперимент, описанию которого и посвящен следующий раздел статьи.

### 3. Численный анализ уравнения КПП с пространственным отклонением

Численное исследование распространения волн концентрации в уравнении (4) от локализованного по пространству начального возмущения выполнялось на некотором отрезке  $[a, b]$ . При этом разница  $|a - b|$  выбиралась достаточно большой для того, чтобы можно было проследить за распространением волны от начального момента до момента встречи фронта волны с границами  $a$  или  $b$ . Учитывая, что рассматривается задача о распространении локального возмущения, зададим на границах отрезка нулевые краевые условия  $u(t, a) = u(t, b) = 0$ .

Перейдем к описанию вычислительной процедуры. Вторую производную по пространственной переменной в правой части уравнения (4) заменим конечной разностью второго порядка. Для этого отрезок  $[a, b]$  разобьем на  $N$  равных частей и построим сетку узлов с шагом  $\Delta x = (b - a) / N$  так, что  $x_j = a + j\Delta x$ , где  $j = 0, \dots, N - 1$ . Обозначим через  $u_j(t)$  значение функции  $u(t, x)$  в соответствующих узлах сетки. В итоге получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{u}_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{(\Delta x)^2} + [1 - u_{j-k}]u_j, \quad j = 0, \dots, N - 1, \quad (22)$$

где  $k = \lfloor h / \Delta x \rfloor$  отвечает за пространственное отклонение (здесь  $\lfloor \cdot \rfloor$  обозначена целая часть числа). Для учета краевых условий полагаем  $u_{-1}(t) = u_N(t) = 0$ .

Численный эксперимент выполнялся на вычислительном кластере ЯрГУ (МНИЛ «Дискретная и вычислительная геометрия» им. Б.Н. Делоне). Одновременно решалось от  $N = 1.8 \cdot 10^5$  до  $N = 1.8 \cdot 10^6$  обыкновенных дифференциальных уравнений. Для вычислений использовался метод Дормана–Принца пятого порядка с переменной длиной шага интегрирования. Абсолютная и относительная погрешности алгоритма были приняты равными  $10^{-12}$ . Начальный шаг интегрирования взят равным  $10^{-3}$ .

Начальные условия выбирались в виде прямоугольного импульса высоты 0.1 и единичной ширины, расположенного в центре отрезка  $[a, b]$ . В частности, для случая  $x \in [0, 1800]$ :

$$u_j(0) = \begin{cases} 0.1, & \text{если } j \in [89950, 90050], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (23)$$

Для последующего анализа и графического отображения полученные данные прореживались.

Перейдем к результатам численного моделирования. Описание поведения решений уравнения (4) с отклонением пространственной переменной будем проводить в сравнении с классическим уравнением КПП без отклонения. На рис. 2 представлено распространение волны постоянной высоты от начального всплеска единичной ширины и высоты 0.1 при  $h = 1.2$ . Скорость распространения волны согласно [2] равнялась двум. (На соответствующих рисунках скорость распространения равна углу наклона профиля волны.) Нетрудно видеть, что при этих значениях отклонения график процесса распространения волны для задачи с отклонением и без отклонения практически не отличается.

При увеличении параметра  $h$  можно выделить несколько этапов качественно различного поведения решений системы (22).

1. При относительно малом значении  $h$  на промежутке от нуля до  $h_1^*$  поведение системы (22) практически не отличимо от поведения системы КПП без отклонения. Величина  $h_1^*$  ограничивает данный промежуток, по-видимому, в связи с тем, что решения уравнения (5) на устойчивом инвариантном многообразии единичного состояния равновесия монотонно стремятся к этому состоянию (см. рис. 2 при  $h = 1.2$ ).

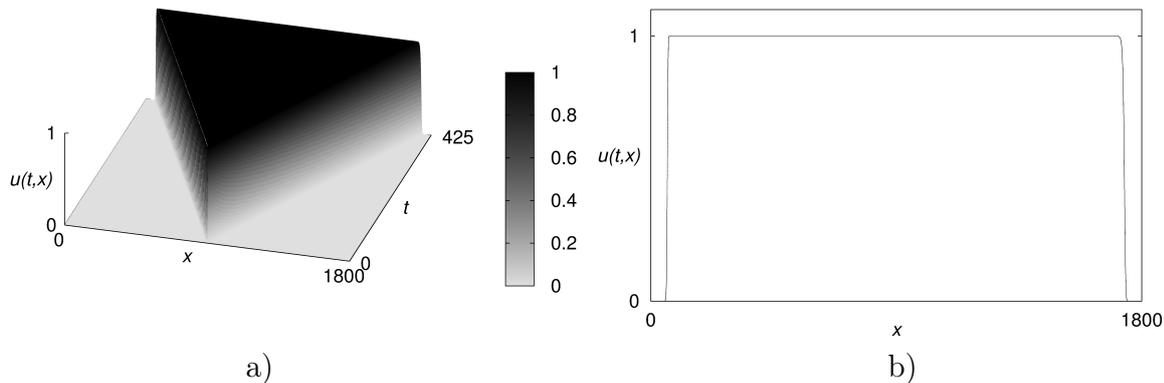


Рис. 2. Решение системы (22) с начальными условиями (23) при отклонении  $h = 1.2$  : а) распространение волны на плоскости  $(x, t)$ ; б) разрез при  $t = 425$

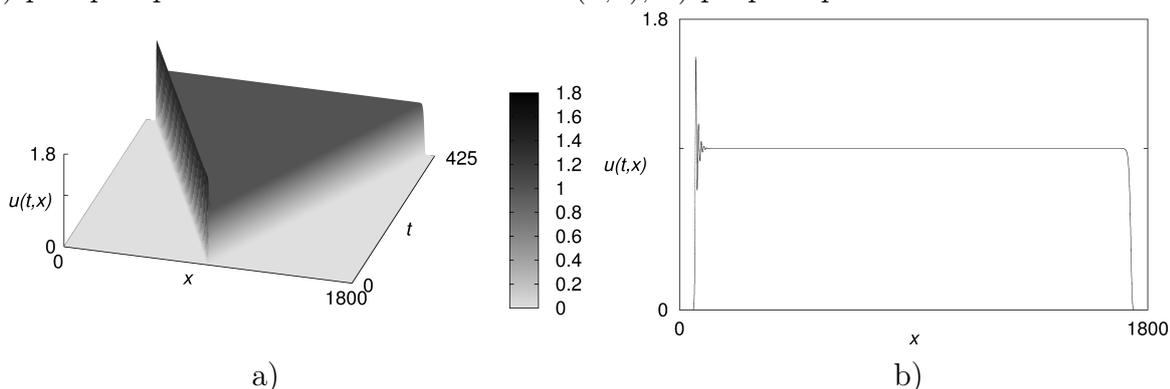
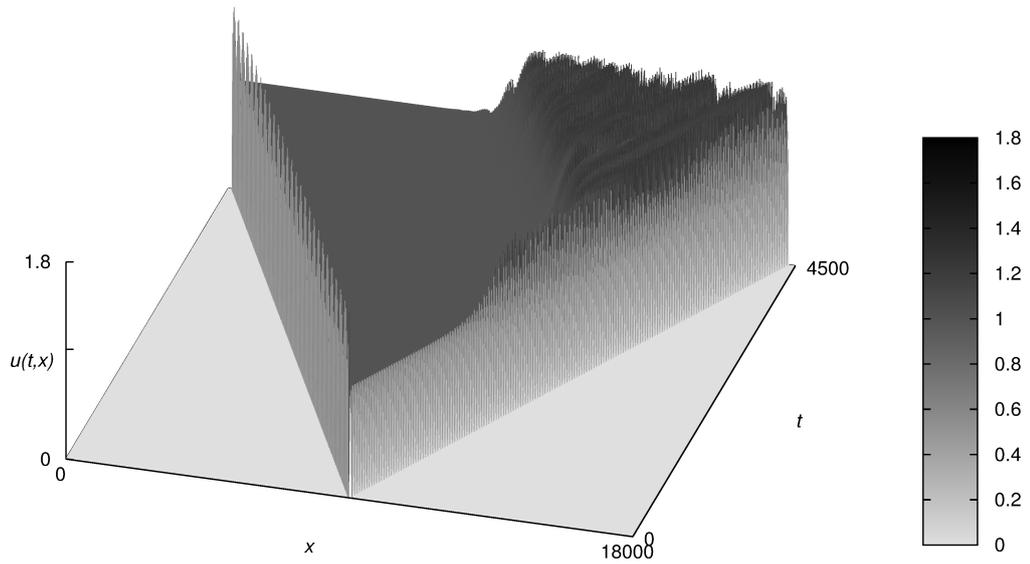
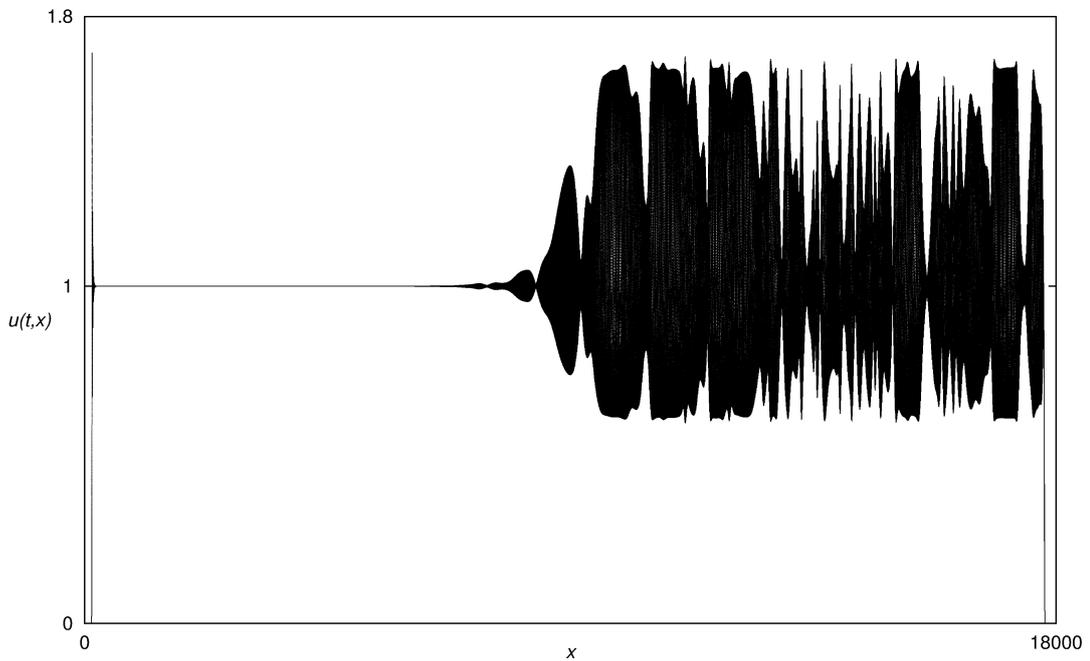


Рис. 3. Решение системы (22) с начальными условиями (23) при отклонении  $h = 2.7$  : а) распространение волны на плоскости  $(x, t)$ ; б) разрез при  $t = 425$

2. При  $h_1^* < h < h^*$  фронт распространения волны приближается к единичному значению колебательным образом. На рис. 3 показана такая волна при  $h = 2.7$ . В этом случае максимальная амплитуда всплеска равна примерно 1.5, а после прохождения фронта волны значение  $u(t, x)$  быстро приближается к единице.

3. Следующее существенное изменение в распространении фронта волны уравнения (4) наблюдается при  $h > h^*$ . Существенной особенностью решения в этом случае является то, что оно перестает удовлетворять уравнению (5). Это происходит в силу того, что решение  $u \equiv 1$  периодической краевой задачи (4), (12) колебательно теряет устойчивость и от него ответвляется орбитально асимптотически устойчивый пространственно неоднородный цикл. Указанное обстоятельство приводит к тому, что в правой части области распространения волны появляется расширяющийся с течением времени участок с интенсивными пространственными колебаниями. На рис. 4 показано распространение волны при  $h = 2.81$ , при этом на рис. 5 приведен

Рис. 4. Распространение волны в системе (22) при  $h = 2.81$ Рис. 5. Пространственное распределение решения системы (22) при  $t = 4500$  и отклонении  $h = 2.81$

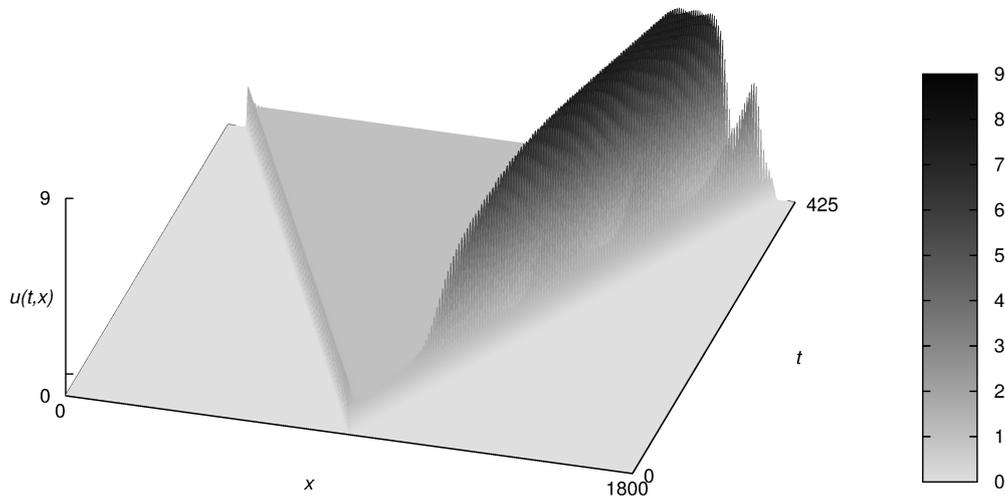


Рис. 6. Распространение волны в системе (22) при  $h = 3$

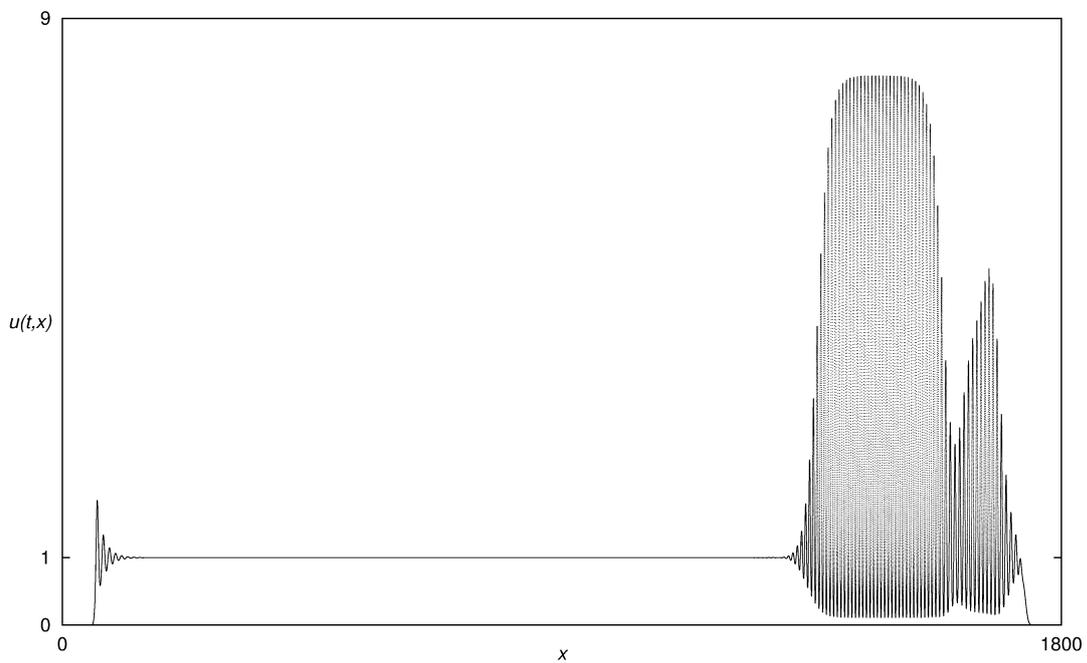


Рис. 7. Пространственное распределение решения системы (22) при  $t = 425$  и отклонении  $h = 3$

график зависимости  $u(t, x)$  при  $t = 4500$  и изменении пространственной переменной  $x$  в пределах от 0 до 18000. Структура колебательного процесса, представленного на данных графиках, видимо, является установившейся. Во всяком случае, к моменту времени  $t = 4500$  амплитуда колебаний не растет с ростом  $t$  и в целом сохраняется довольно сложная пространственная структура решения  $u(t, x)$ , о которой ниже будет сказано дополнительно.

4. Численный эксперимент не удалось продолжить для значений отклонения  $h$ , существенно отличающихся от  $h^*$ . Так, уже при  $h = 3$  в правой части графика распространения волны возникают весьма интенсивные колебания, достигающие при  $t = 400$  значения около 9. На рис. 6 показано распространение волны при  $h = 3$ , при этом на рис. 7 приведен график зависимости  $u(t, x)$  при  $t = 425$  и  $x \in [0, 1800]$ .

Дальнейшее изменение отклонения приводит к резкому увеличению амплитуды колебательного режима, что, с одной стороны, влечет необходимость дробления шага по времени для сохранения точности вычислений, а с другой, значительно замедляет вычислительный процесс. По указанным причинам вычислительный эксперимент не был распространен на большие значения отклонения.

Рассмотрим более подробно пространственное распределение решения при  $h = 2.81$ . График решения  $u(t, x)$  при  $t = 4500$  может быть разбит на три части с визуально различной структурой. Ниже вычисляются статистические инвариантные характеристики для массивов данных, которые позволяют судить о сложности выделенных частей. Область интенсивных колебаний на рис. 7 разбита на следующие подобласти:  $[9380, 12500]$ ;  $[12500, 14970]$ ;  $[14970, 17765]$ . На рис. 8 эти участки графика приведены в более крупном масштабе, что позволяет увидеть отличия в их структуре.

В качестве инвариантных статистических характеристик, при помощи которых будем различать эти три части графика, используется корреляционный интеграл и корреляционная размерность. По выборке  $u_j(4500)$ ,  $j = 1, \dots, M$  строится набор  $m$ -мерных векторов  $\xi_i$ , каждый из которых состоит из значений от  $u_{(i-1)*m+1}$  до  $u_{i*m}$ . Напомним, что корреляционный интеграл можно оценить при помощи корреляционной суммы (см., например, [19])

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{M^2} \sum_{i,j=1}^M \Theta(\varepsilon - \|\xi_i - \xi_j\|), \quad (24)$$

где  $M$  — объем выборки,  $\Theta$  — функция Хевисайда,  $\|\cdot\|$  — некоторая норма (нами использовалась евклидова норма  $\|x\|^2 = \sum x_l$ ),  $\varepsilon$  — некоторое пороговое значение,  $\xi_i$  — построенные  $m$ -мерные вектора,  $m$  — размерность пространства вложения.

Корреляционную размерность  $d_C$  можно определить как

$$d_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \varepsilon}. \quad (25)$$

В случае эмпирического вычисления корреляционная размерность  $d_C$  берется равной углу наклона прямой наилучшего приближения в смысле наименьших квадратов к наиболее линейной части графика, построенного по узлам  $\{\log C(\varepsilon), \log \varepsilon\}$ .

Были проведены вычисления корреляционного интеграла для размерностей пространства вложения  $m = 3$  и  $m = 5$ , а также с различным шагом по переменной  $x$ .

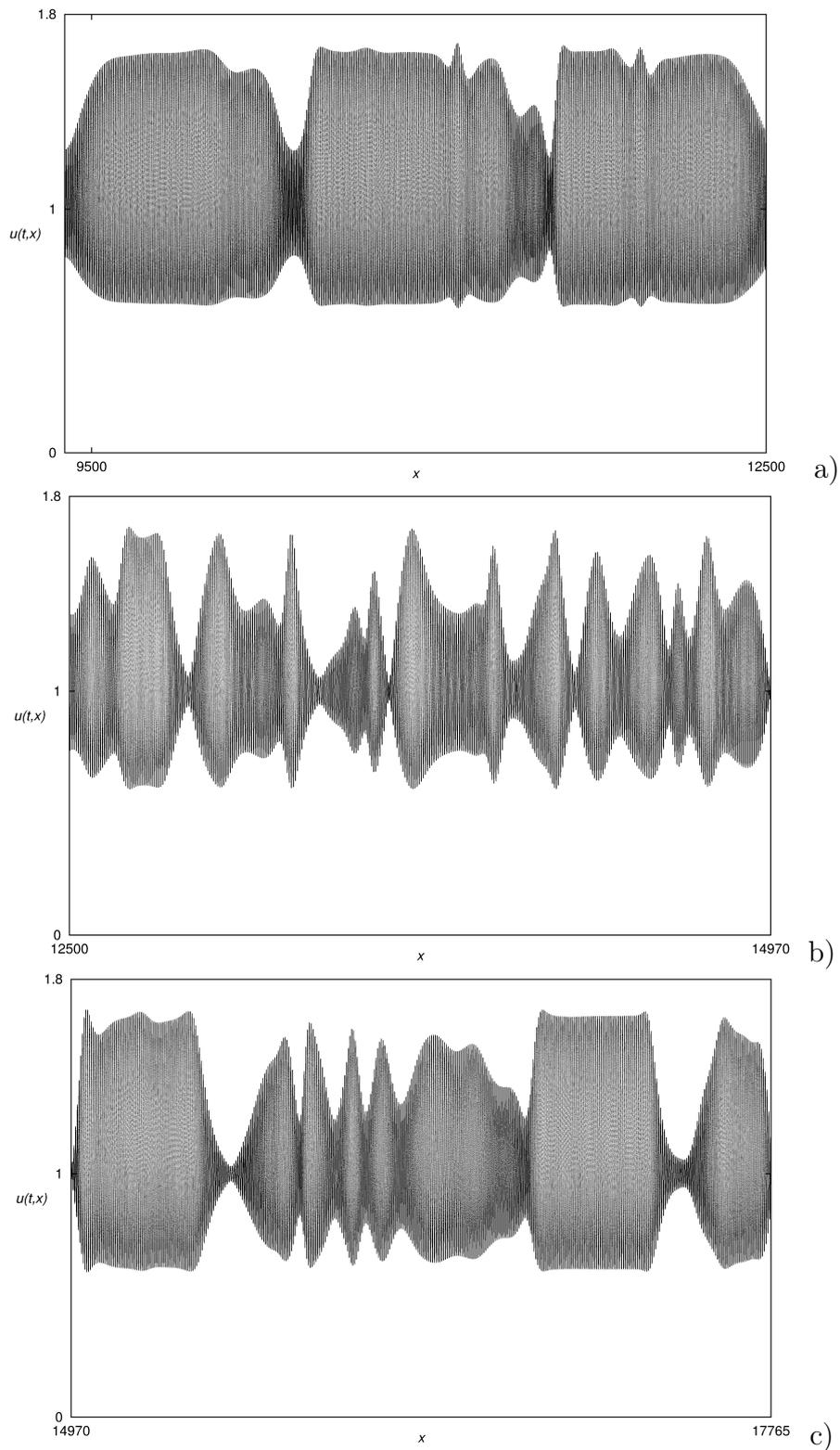
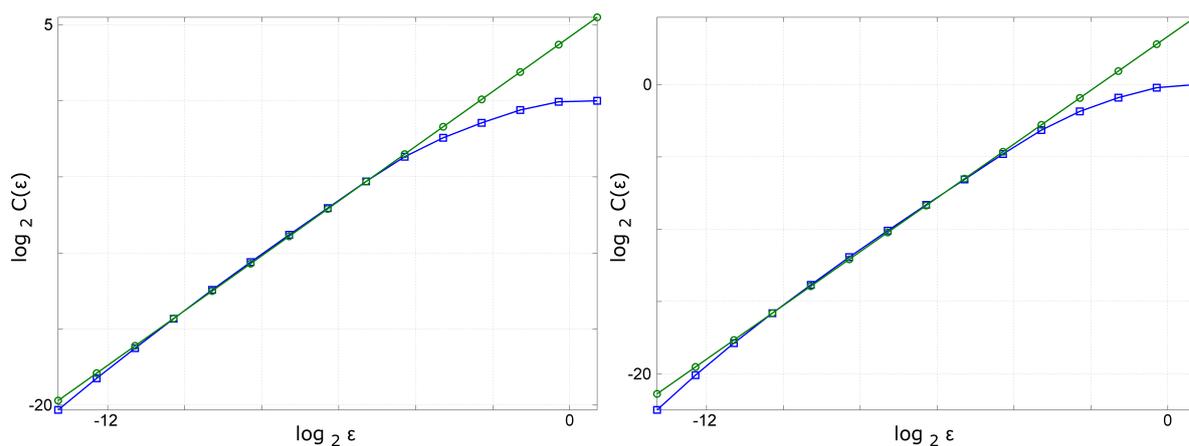
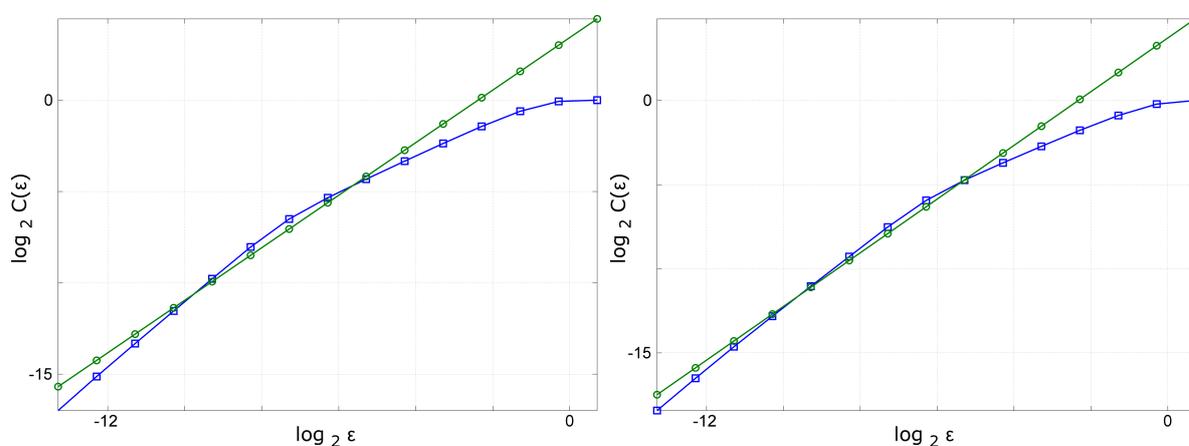


Рис. 8. Пространственное распределение решения системы (22) при  $t = 4500$  и отклонении  $h = 2.81$  : а)  $x \in [9380, 12500]$ ; б)  $x \in [12500, 14970]$ ; в)  $x \in [14970, 17765]$


 Рис. 9.  $x \in [9380, 17765]$ , шаг по  $x$  равен 0.1

 Рис. 10.  $x \in [9380, 12500]$ ,  $x$  равен 0.01

На рис. 9 и 10 приведены зависимости логарифма корреляционного интеграла от логарифма  $\epsilon$ , найденные для пространственного распределения решения системы (22) при  $t = 4500$  и отклонении  $h = 2.81$ . Размерность пространства вложения для графиков слева — три; справа — пять. При этом на рис. 9 шаг по пространству выбран равным 0.1, а на рис. 10 — 0.01. Нетрудно видеть, что в первом из этих случаев наиболее линейный участок выделяется лучше, чем во втором и, тем самым, шаг достаточно брать равным 0.1. Величина  $d_C$ , оцениваемая по углу наклона графика зависимости корреляционного интеграла, оказалась равной для шага 0.1 и  $m = 3$   $d_C \approx 1.799$  (среднеквадратичное отклонение  $\sigma \approx 0.289$ ), а для шага 0.01 —  $d_C \approx 1.437$  (среднеквадратичное отклонение  $\sigma \approx 1.13$ ). Последний случай, очевидно, показывает, что подходящего линейного участка нет. Аналогичные результаты выходят и для  $m = 5$ , где для шага 0.1 имеем  $d_C \approx 1.859$  (среднеквадратичное отклонение  $\sigma \approx 0.35$ ), а для шага 0.01 —  $d_C \approx 1.595$  (среднеквадратичное отклонение  $\sigma \approx 0.907$ ).

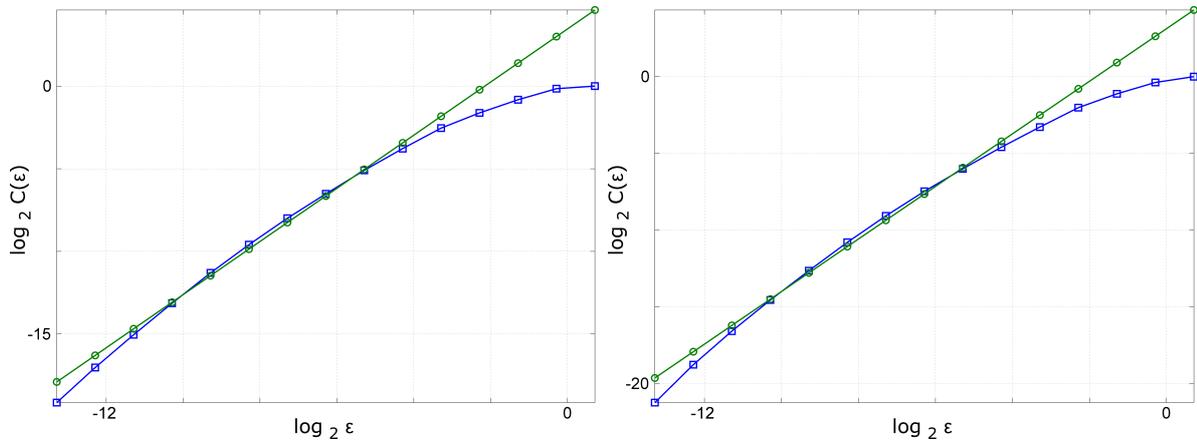


Рис. 11.  $x \in [9380, 12500]$

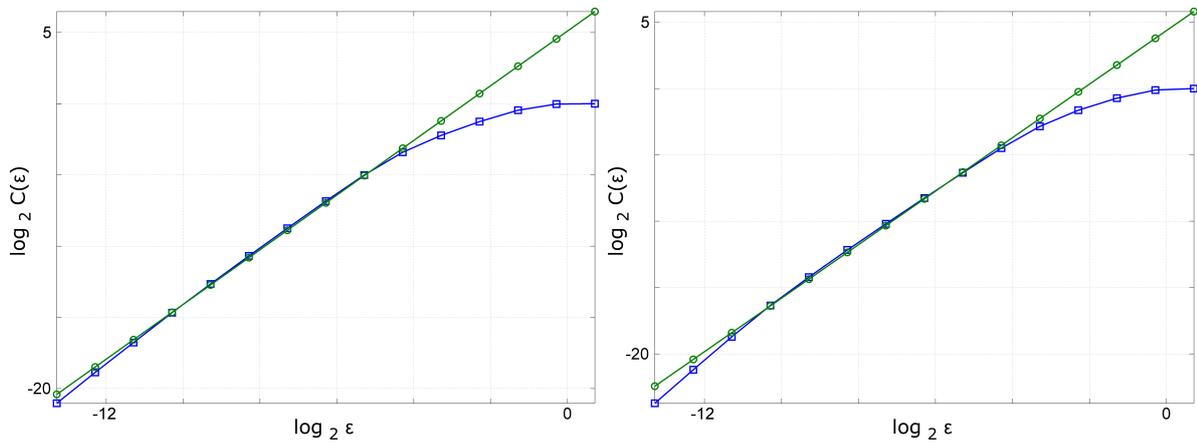


Рис. 12.  $x \in [12500, 14970]$

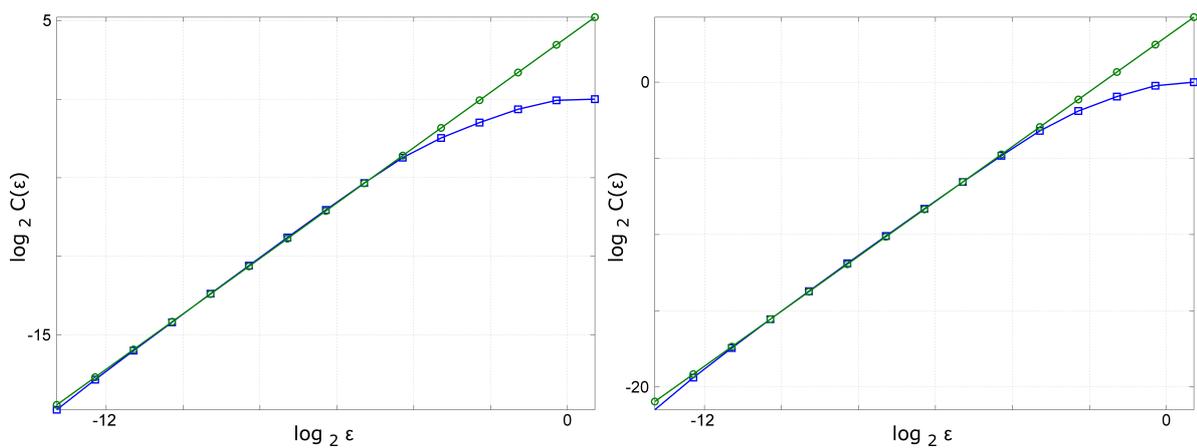


Рис. 13.  $x \in [14970, 17765]$

Ситуация меняется, если выполнить расчеты для перечисленных выше отдельных участков решения. На рисунках 11, 12, 13 приведены графики зависимостей корреляционного интеграла для значений пространственной переменной из промежутков  $x \in [9380, 12500]$ ;  $x \in [12500, 14970]$  и  $x \in [14970, 17765]$  соответственно. Размерность пространства вложения для графиков слева  $m = 3$ ; справа —  $m = 5$ . Приведем оценки корреляционного интеграла.

$x \in [9380, 12500]$  при  $m = 3$   $d_C \approx 1.6071$ ,  $\sigma \approx 0.6658$ ; при  $m = 5$   $d_C \approx 1.7129$ ,  $\sigma \approx 0.7051$ .

$x \in [12500, 14970]$  при  $m = 3$   $d_C \approx 1.9199$ ,  $\sigma \approx 0.4227$ ; при  $m = 5$   $d_C \approx 2.0172$ ,  $\sigma \approx 0.4732$ .

$x \in [14970, 17765]$  при  $m = 3$   $d_C \approx 1.7615$ ,  $\sigma \approx 0.1952$ ; при  $m = 5$   $d_C \approx 1.8009$ ,  $\sigma \approx 0.1566$ .

Полученные оценки позволяют утверждать, что участки пространственного распределения решения  $u(t, x)$  уравнения (4) существенно отличаются, в частности, оценка корреляционного интеграла для среднего участка дает большие значения, чем для крайних. Близость результатов для размерностей  $m = 3$  и  $m = 5$  пространства вложения показывает, что в рассмотрении больших значений размерности нет необходимости.

Отметим, что определенную информацию о решении уравнения (4) дает и отображение, построенное по идущим друг за другом экстремумам пространственного распределения решения системы (22) при  $t = 4500$  и отклонении  $h = 2.81$ . На рис. 14 построены точки, соответствующие подряд идущим экстремумам, а на рис. 15 точки построены через пять единиц.

## Заключение

Распространение возмущения в активной среде при учете отклонения по пространственной переменной представляет собой сложный процесс. Эта сложность обуславливает необходимость применения различных сочетаний аналитических и численных методов. На этом пути были получены следующие результаты.

1. Изучение уравнения распространения волны (5) позволило найти критические значения параметра запаздывания, при которых меняется вид пространственного распределения решения задачи.
2. Для выяснения некоторых особенностей качественного поведения решений уравнения КПП с отклонением было изучено уравнение (4) с периодическими краевыми условиями вблизи состояния равновесия  $u_0 \equiv 1$ . Это позволило выяснить характер потери устойчивости пространственно однородного решения этой задачи и найти асимптотику режимов, возникающих при этом.
3. Численный анализ, выполненный с учетом аналитических результатов, позволил выделить следующие промежутки значений отклонения:
  - промежуток, на котором поведение решений уравнения с отклонением близко к их поведению в задаче без отклонения;

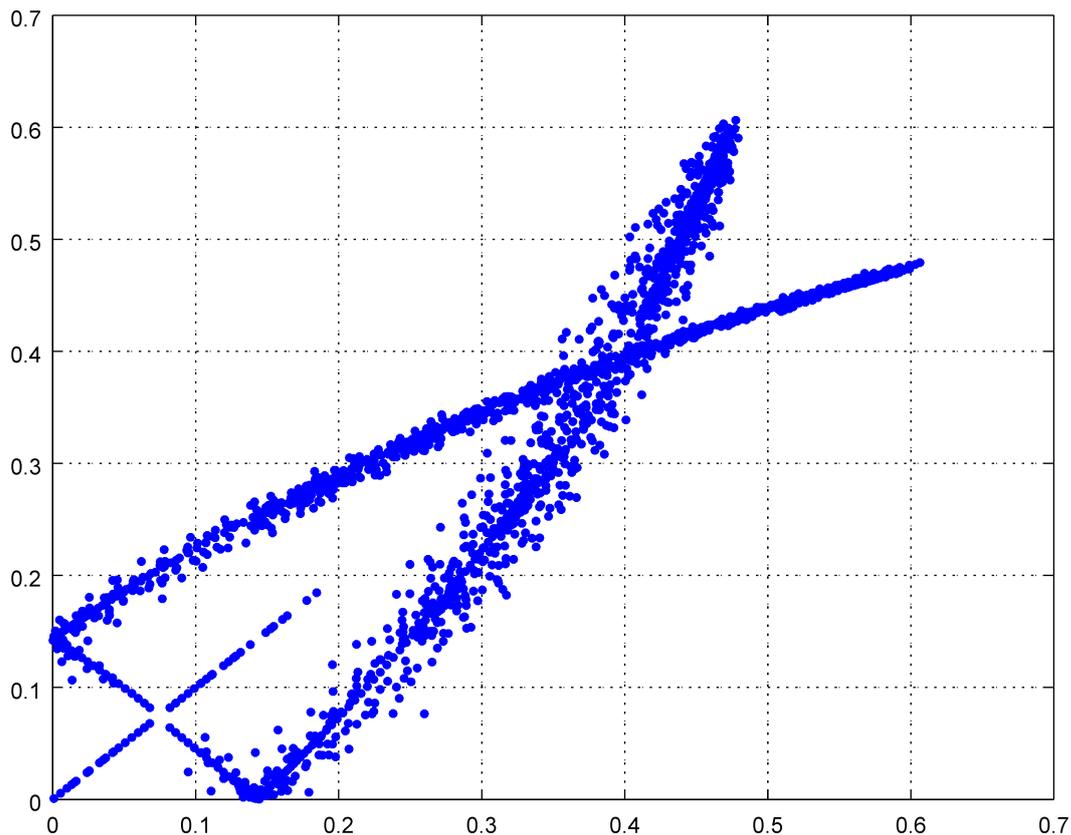


Рис. 14. Отображение, построенное по идущим друг за другом экстремумам пространственного распределения решения системы (22) при  $t = 4500$  и отклонении  $h = 2.81$

- промежуток значений отклонения, при которых на левом фронте области распространения волны появляются участки с колебаниями, затухающими к единице.
- промежуток значений отклонения, при которых вся область распространения волны заполняется интенсивными колебаниями решения со сложным пространственным распределением; найдены статистические характеристики (корреляционный интеграл) этих режимов.

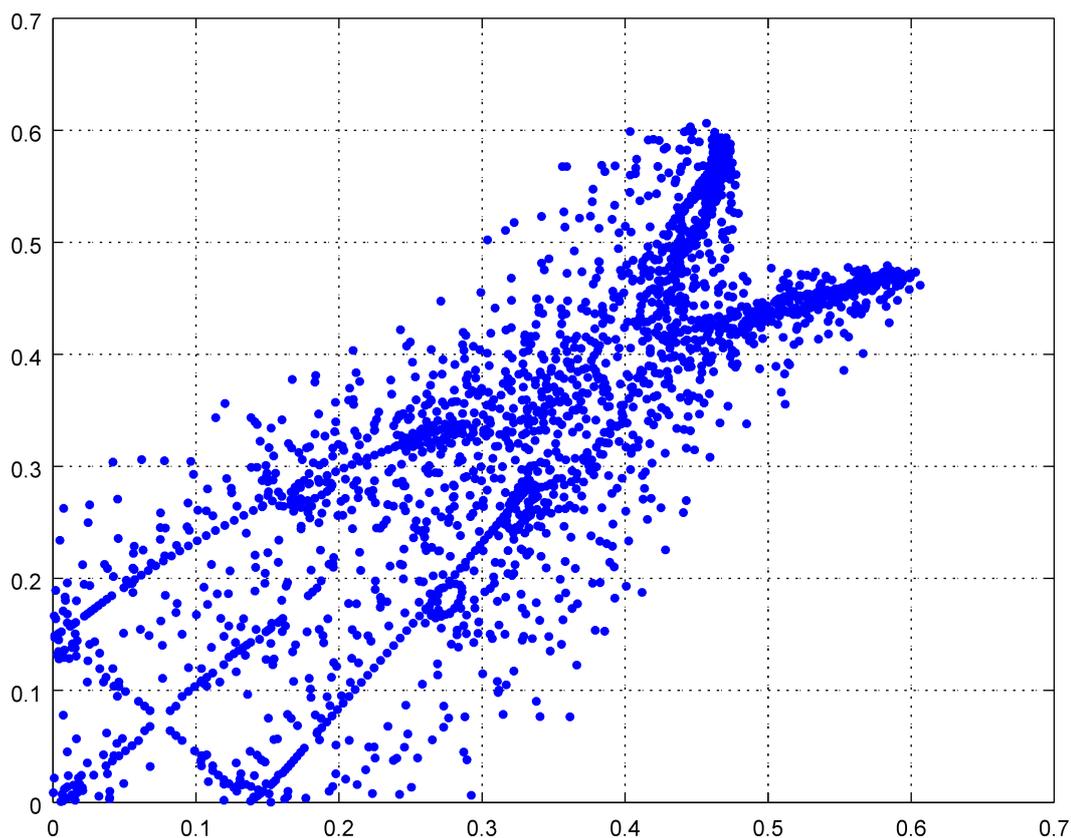


Рис. 15. Отображение, построенное по экстремумам пространственного распределения решения системы (22) при  $t = 4500$  и отклонении  $h = 2.81$ , идущим через 5 единиц друг за другом

## Список литературы / References

- [1] Fisher R. A., “The Wave of Advance of Advantageous Genes”, *Annals of Eugenics*, **7** (1937), 355–369.
- [2] Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С., “Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме”, *Сер. А. Математика и Механика*, **1**, 1937, 1–26; [French transl.: Kolmogorov A., Petrovsky I., Piscounov N., “Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique”, *Moscow Univ. Bull. Math.*, **1:6** (1937), 1–25. ]
- [3] Murray J. D., *Mathematical Biology. I. An Introduction*, Third Edition, Berlin, 2001.
- [4] Danilov V. G., Maslov V. P., Volosov K. A., *Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes*, Kluwer, Dordrecht, 1995.
- [5] Volpert A., Volpert V., Volpert V., *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems*, American Mathematical Society, 2000.
- [6] Колесов Ю. С., “Математические модели экологии”, *Исследования по устойчивости и теории колебаний*, 1979, 3–40; [Kolesov Yu. S., “Matematicheskiye modeli ekologii”, *Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy*, 1979, 3–40, (in Russian).]
- [7] Колесов А. Ю., Колесов Ю. С., *Релаксационные колебания в математических моделях экологии*, Тр. МИАН, **199**, Наука, М., 1993, 126 с.; [Kolesov A. Yu., Kolesov Yu. S., *Relaxational oscillations in mathematical models of ecology*, *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, **199**, ed. E. F. Mishchenko, Nauka, Moscow, 1993, 126 pp., (in Russian).]

- [8] Гурли С. А., Соу Дж. В.-Х., Ву Дж. Х., “Нелокальные уравнения реакции-диффузии с запаздыванием: биологические модели и нелинейная динамика”, *Современная математика. Фундаментальные направления*, **1** (2003), 84–120; [English transl.: Gourley S. A., So J. W.-H., Wu J. H., “Nonlocality of Reaction-Diffusion Equations Induced by Delay: Biological Modeling and Nonlinear Dynamics”, *Journal of Mathematical Sciences*, **124**:4 (2004), 5119–5153, (in Russian).]
- [9] Britton N. F., *Reaction-diffusion equations and their applications to biology*, Academic Press, New York, 1986.
- [10] Britton N. F., “Spatial structures and periodic travelling waves in an integro-differential reaction-diffusion population model”, *SIAM J. Appl. Math.*, **50** (1990), 1663–1688.
- [11] Алешин С. В., Глызин С. Д., Кащенко С. А., “Уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова с запаздыванием”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:2 (2015), 304–321; [Aleshin S. V., Glyzin S. D., Kaschenko S. A., “Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piscounov Equation with Delay”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:2 (2015), 304–321, (in Russian).]
- [12] Кащенко С. А., “Об установившихся режимах уравнения Хатчинсона с диффузией”, *ДАН СССР*, **292**:2 (1987), 327–330; [Kashchenko S. A., “Ob ustanovivshisja rezhimah uravnenija Hatchinsona s diffuziej”, *DAN SSSR*, **292**:2 (1987), 327–330, (in Russian).]
- [13] Кащенко С. А., “Пространственно-неоднородные структуры в простейших моделях с запаздыванием и диффузией”, *Математическое моделирование*, **2**:9 (1990), 49–69; [English transl.: Kashchenko S. A., “Spatial heterogeneous structures in the simplest models with delay and diffusion”, *Matem. mod.*, **2**:9 (1990), 49–69, (in Russian).]
- [14] Kashchenko S. A., “Asymptotics of the Solutions of the Generalized Hutchinson Equation”, *Automatic Control and Computer Science*, **47**:7 (2013), 470–494.
- [15] Глызин С. Д., “Разностные аппроксимации уравнения «реакция-диффузия» на отрезке”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **16**:3 (2009), 96–116; [Glyzin S. D., “Difference approximations of “reaction – diffusion” equation on a segment”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **16**:3 (2009), 96–116, (in Russian).]
- [16] Wu J., *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [17] Glyzin S. D., “Dimensional Characteristics of Diffusion Chaos”, *Automatic Control and Computer Sciences*, **47**:7 (2013), 452–469.
- [18] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Конечномерные модели диффузионного хаоса”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **50**:5 (2010), 860–875; [English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Finite-dimensional models of diffusion chaos”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50**:5 (2010), 816–830, (in Russian).]
- [19] Schuster H. G., *Deterministic Chaos: An Introduction*, 3 edition, Wiley-VCH, 1995, 320 pp.

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-609-628

## Dynamical Properties of the Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piscounov Equation with Deviation of the Spatial Variable

Aleshin S. V., Glyzin S. D., Kaschenko S. A.

*Received August 10, 2015*

We consider the problem of density wave propagation of a logistic equation with deviation of the spatial variable and diffusion (Fisher–Kolmogorov equation with deviation of the spatial variable). A Ginzburg–Landau equation was constructed in order to study the qualitative behavior of the solution near the equilibrium state. We analyzed the profile of the wave equation and found conditions for the appearance of oscillatory regimes. The numerical analysis of wave propagation shows that for a sufficiently small spatial deviation this equation has a solution similar to the solution of the classical Fisher–Kolmogorov equation. The spatial deviation increasing leads to the existence of the oscillatory component in the spatial distribution of solutions. A further increase of the spatial deviation leads to destruction of the traveling wave. That is expressed in the fact that undamped spatio-temporal fluctuations exist in a neighborhood of the initial perturbation. These fluctuations are close to the solution of the corresponding boundary value problem with periodic boundary conditions. Finally, when the spatial deviation is sufficiently large we observe intensive spatio-temporal fluctuations in the whole area of wave propagation.

**Keywords:** attractor, bifurcation, Fisher–Kolmogorov equation, Ginzburg–Landau equation

**For citation:** Aleshin S. V., Glyzin S. D., Kaschenko S. A., "Dynamical Properties of the Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piscounov Equation with Deviation of the Spatial Variable", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:5 (2015), 609–628.

**On the authors:**

Aleshin Sergei Vladimirovich, старший лаборант-исследователь,  
P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia,  
Scientific Center in Chernogolovka RAS, Lesnaya str., 9, Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia  
e-mail: fktiby@yandex.ru

Glyzin Sergei Dmitrievich, orcid.org/0000-0002-6403-4061, Doctor, Professor,  
P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia,  
Scientific Center in Chernogolovka RAS, Lesnaya str., 9, Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia  
e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Kaschenko S. A., Doctor, Professor,  
P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia,  
National Research Nuclear University MEPhI, Kashirskoye shosse 31, Moscow, 115409, Russia  
e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

**Acknowledgments:**

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research №14-21-00158.