Моделирование и анализ информационных систем. Т. 22, № 5 (2015), с. 629–647
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 22, No 5 (2015), pp. 629–647

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-629-647

УДК 512.722+512.723

Изоморфизм компактификаций модулей векторных расслоений: неприведенные схемы модулей

Тимофеева Н. В.

получена 15 мая 2015

В работе продолжено изучение компактификации схемы модулей полустабильных по Гизекеру векторных расслоений на неособой неприводимой проективной алгебраической поверхности S с поляризацией L, локально свободными пучками. Исследуется связь основных компонент функтора модулей допустимых полустабильных пар и основных компонент функтора модулей Гизекера – Маруямы (полустабильных когерентных пучков без кручения) с тем же полиномом Гильберта на поверхности S.

Рассматриваемая компактификация получается, если семейства полустабильных по Гизекеру векторных расслоений E на поляризованной неособой проективной поверхности (S, L) пополняются векторными расслоениями $\widetilde{E}$ на проективных поляризованных схемах $(\widetilde{S}, \widetilde{L})$ специального вида. Вид схемы $\widetilde{S}$, поляризации $\widetilde{L}$ и расслоения $\widetilde{E}$ описан в тексте работы. Набор $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ назван полустабильной допустимой парой. Векторные расслоения E на поверхности (S, L) и $\widetilde{E}$ на схемах $(\widetilde{S}, \widetilde{L})$ предполагаются имеющими равные ранги и полиномы Гильберта, вычисляемые относительно поляризаций L и $\widetilde{L}$ соответственно. Пары вида $((S, L), E)$, называемые S-парами, также входят в рассматриваемый класс. Поскольку целью исследования является изучение компактификации пространства модулей векторных расслоений, рассматриваются только семейства, содержащие S-пары.

Построено естественное преобразование функтора модулей допустимых полустабильных пар в функтор модулей Гизекера – Маруямы полустабильных когерентных пучков без кручения на поверхности (S, L), имеющих те же ранг и полином Гильберта. Показано, что это естественное преобразование является двусторонним обратным к естественному преобразованию, построенному в предшествующей работе и определяемому стандартным разрешением семейства когерентных пучков без кручения, имеющего возможно неприведенную базисную схему. Построенный изоморфизм функторов модулей определяет изоморфизм компактификаций пространства модулей полустабильных векторных расслоений на поверхности (S, L) как алгебраических схем.

Ключевые слова: пространство модулей, полустабильные когерентные пучки, полустабильные допустимые пары, функтор модулей, векторные расслоения, алгебраическая поверхность.

Для цитирования: Тимофеева Н. В., "Изоморфизм компактификаций модулей векторных расслоений: неприведенные схемы модулей", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:5 (2015), 629–647.

Об авторах:
Тимофеева Надежда Владимировна, orcid.org/0000-0003-4363-1331, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, e-mail: nadezdavtimofeeva@gmail.com

Светлой памяти мамы

Введение

В настоящей работе продолжено изучение компактификации модулей стабильных векторных расслоений на поверхности локально свободными пучками. Различные аспекты построения и основные свойства ее были даны в предыдущих работах автора [1] – [9].

В настоящей статье S — гладкая неприводимая проективная алгебраическая поверхность над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0, $\mathcal{O}_S$ — ее структурный пучок, E — когерентный $\mathcal{O}_S$-модуль без кручения, $E^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(E, \mathcal{O}_S)$ — двойственный $\mathcal{O}_S$-модуль. При этом $E^\vee$ рефлексивен и, следовательно, локально свободен. Всюду в этой работе локально свободный когерентный пучок и соответствующее ему векторное расслоение не будут различаться, и оба термина употребляются как синонимы. Пусть L — обильный обратимый пучок на S; он считается фиксированным и будет использоваться в качестве поляризации. Символ $\chi(\cdot)$ означает эйлерову характеристику, $c_i(\cdot)$ — i-й класс Чженя.

Зафиксируем натуральное число r и полином $p(n)$ с рациональными коэффициентами. Будем считать, что рассматриваемые когерентные пучки E имеют ранг r и полином Гильберта $\chi(E \otimes L^n)$, равный $rp(n)$. Его коэффициенты зависят от ранга r и классов Чженя $c_i = c_i(E)$, $i = 1, 2$, когерентного пучка E.

Определение 0.1. [4, 5] Назовем поляризованную алгебраическую схему $(\widetilde{S}, \widetilde{L})$ *допустимой*, если схема $(\widetilde{S}, \widetilde{L})$ удовлетворяет одному из условий

i) $(\widetilde{S}, \widetilde{L}) \cong (S, L)$,

ii) $\widetilde{S} \cong \operatorname{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s/(t^{s+1})$, где $I = \mathcal{F}itt^0 \mathcal{E}xt^2(\varkappa, \mathcal{O}_S)$ для артинова факторпучка $q_0 : \bigoplus^r \mathcal{O}_S \twoheadrightarrow \varkappa$ длины $l(\varkappa) \leq c_2$, причем $\widetilde{L} = L \otimes (\sigma^{-1} I \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{S}})$ — обильный обратимый пучок на схеме $\widetilde{S}$; эту поляризацию $\widetilde{L}$ будем называть *выделенной*.

Напомним известное из коммутативной алгебры определение пучка нулевых идеалов Фиттинга, использованное в приведенном определении. Пусть X – связная схема, F – $\mathcal{O}_X$-модуль с конечным представлением $F_1 \xrightarrow{\varphi} F_0 \to F$. Без потери общности будем считать, что $\operatorname{rank} F_1 \geq \operatorname{rank} F_0$.

Определение 0.2. *Пучок нулевых идеалов Фиттинга* $\mathcal{O}_X$-модуля F определяется как $\mathcal{F}itt^0 F = \operatorname{im} (\bigwedge^{\operatorname{rank} F_0} F_1 \otimes \bigwedge^{\operatorname{rank} F_0} F_0^\vee \xrightarrow{\varphi'} \mathcal{O}_X)$, где φ' – морфизм $\mathcal{O}_X$-модулей, индуцированный морфизмом φ.

Замечание 0.1. При необходимости L заменяется его достаточно большой тензорной степенью так, чтобы все $\widetilde{L}$ оказались обильными. Эта степень, как показано в работе [5], может быть выбрана постоянной, конечной и фиксированной. Все полиномы Гильберта вычисляются относительно новых L и $\widetilde{L}$ соответственно.

Как показано в [4], если схема $\widetilde{S}$ удовлетворяет условию (ii) в определении 0.1, она представима в виде объединения нескольких компонент $\widetilde{S} = \bigcup_{i \geq 0} \widetilde{S}_i$ и обладает морфизмом $\sigma : \widetilde{S} \to S$. Этот морфизм индуцирован структурой $\mathcal{O}_S$-алгебры на градуированном объекте $\bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s/(t^{s+1})$.

Определение 0.3. [5] *S-стабильной* (соответственно *полустабильной*) *парой* $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ назовем следующие данные:

- $\widetilde{S} = \bigcup_{i \geq 0} \widetilde{S}_i$ – допустимая схема, $\sigma : \widetilde{S} \to S$ — морфизм, называемый *каноническим*, $\sigma_i : \widetilde{S}_i \to S$ — его ограничения на компоненты $\widetilde{S}_i$, $i \geq 0$;
- $\widetilde{E}$ — векторное расслоение на схеме $\widetilde{S}$;
- $\widetilde{L} \in \operatorname{Pic} \widetilde{S}$ — выделенная поляризация;

такие, что

- $\chi(\widetilde{E} \otimes \widetilde{L}^n) = rp(n)$, полином $p(n)$ и ранг r пучка $\widetilde{E}$ считаются фиксированными;
- на схеме $\widetilde{S}$ пучок $\widetilde{E}$ *стабилен* (соответственно *полустабилен*) *по Гизекеру*, то есть для любого собственного подпучка $\widetilde{F} \subset \widetilde{E}$ при $n \gg 0$

$$\frac{h^0(\widetilde{F} \otimes \widetilde{L}^n)}{\operatorname{rank} F} < \frac{h^0(\widetilde{E} \otimes \widetilde{L}^n)}{\operatorname{rank} E},$$
$$\left(\text{соответственно } \frac{h^0(\widetilde{F} \otimes \widetilde{L}^n)}{\operatorname{rank} F} \leq \frac{h^0(\widetilde{E} \otimes \widetilde{L}^n)}{\operatorname{rank} E}\right);$$

- на каждой из дополнительных компонент $\widetilde{S}_i, i > 0$, пучок $\widetilde{E}_i := \widetilde{E}|_{\widetilde{S}_i}$ *квазиидеален*, то есть обладает описанием вида

$$\widetilde{E}_i = \sigma_i^* \ker q_0 / tors_i \tag{0.1}$$

для некоторого $q_0 \in \bigsqcup_{l \leq c_2} \operatorname{Quot}^l \bigoplus^r \mathcal{O}_S$. Эпиморфизм $q_0 : \bigoplus^r \mathcal{O}_S \twoheadrightarrow \varkappa$ и число $l = \operatorname{length} \varkappa$ являются общими для всех компонент $\widetilde{S}_i$ схемы $\widetilde{S}$.

Описание пучка $tors_i$ будет приведено далее.

Пары $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ такие, что $(\widetilde{S}, \widetilde{L}) \cong (S, L)$, будем называть *$S$-парами.*

В серии работ автора [1] — [5] построена проективная алгебраическая схема $\widetilde{M}$ как приведенная схема модулей S-полустабильных допустимых пар. В работе [6] построена схема $\widetilde{M}$ как пространство модулей с возможно неприведенной схемной структурой.

Схема $\widetilde{M}$ содержит открытую подсхему $\widetilde{M}_0$, изоморфную подсхеме M_0 полустабильных в смысле Гизекера векторных расслоений в схеме модулей $\overline{M}$ Гизекера — Маруямы полустабильных пучков без кручения с полиномом Гильберта, равным $\chi(E \otimes L^n) = rp(n)$. При этом используется следующее определение полустабильности в смысле Гизекера.

Определение 0.4. [10] Когерентный $\mathcal{O}_S$-пучок E *стабилен* (соответственно *полустабилен*), если для любого собственного подпучка $F \subset E$ ранга $r' = \operatorname{rank} F$ при $n \gg 0$

$$\frac{\chi(E \otimes L^n)}{r} > \frac{\chi(F \otimes L^n)}{r'} \left(\text{соответственно } \frac{\chi(E \otimes L^n)}{r} \geq \frac{\chi(F \otimes L^n)}{r'}\right).$$

Пусть E — полустабильный локально свободный пучок. Тогда, очевидно, пучок $I = \mathcal{F}itt^0\mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S)$ тривиален, и $\widetilde{S} \cong S$. Тем самым $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E}) \cong ((S, L), E)$, что поставляет биективное соответствие $\widetilde{M_0} \cong M_0$.

Пусть E — полустабильный не локально свободный когерентный пучок; тогда схема $\widetilde{S}$ содержит приведенную неприводимую компоненту $\widetilde{S}_0$ такую, что морфизм $\sigma_0 := \sigma|_{\widetilde{S}_0} : \widetilde{S}_0 \to S$ — морфизм раздутия схемы S в пучке идеалов $I = \mathcal{F}itt^0\mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S)$. Формирование пучка I является способом охарактеризовать особенности пучка E, то есть его отличие от локально свободного. Действительно, факторпучок $\varkappa := E^{\vee\vee}/E$ — артинов длины, не превосходящей $c_2(E)$, и $\mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S) \cong \mathcal{E}xt^2(\varkappa, \mathcal{O}_S)$. Тогда $\mathcal{F}itt^0\mathcal{E}xt^2(\varkappa, \mathcal{O}_S)$ — пучок идеалов (в общем случае неприведенной) подсхемы Z ограниченной [6] длины с носителем в конечном наборе точек на поверхности S. Поэтому, как показано в [4], остальные неприводимые компоненты $\widetilde{S}_i, i > 0$ схемы $\widetilde{S}$ в общем случае несут неприведенную схемную структуру. Пересечение $\widetilde{S}_0 \cap \bigcup_{i>0} \widetilde{S}_i$ совпадает как подсхема с исключительным дивизором раздутия $\sigma|_{\widetilde{S}_0} : \widetilde{S}_0 \to S$.

Каждому полустабильному когерентному пучку без кручения E ставится в соответствие пара $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$, где $(\widetilde{S}, \widetilde{L})$ определяется только что описанным способом.

Теперь обратимся к описанию подпучков $tors_i$ в (0.1). Пусть U — открытое по Зарискому подмножество одной из компонент $\widetilde{S}_i, i \geq 0$, и $\sigma^*E|_{\widetilde{S}_i}(U)$ — соответствующая группа сечений, являющаяся $\mathcal{O}_{\widetilde{S}_i}(U)$-модулем. Сечения $s \in \sigma^*E|_{\widetilde{S}_i}(U)$, аннулируемые простыми идеалами положительной коразмерности в $\mathcal{O}_{\widetilde{S}_i}(U)$, образуют подмодуль в $\sigma^*E|_{\widetilde{S}_i}(U)$, который будем обозначать $tors'_i(U)$. Соответствие $U \mapsto tors'_i(U)$ определяет подпучок $tors'_i \subset \sigma^*E|_{\widetilde{S}_i}$. Заметим, что ассоциированные простые идеалы положительной коразмерности, аннулирующие сечения $s \in \sigma^*E|_{\widetilde{S}_i}(U)$, соответствуют подсхемам с носителями в прообразе $\sigma^{-1}(\mathrm{Supp}\,\varkappa) = \bigcup_{i>0} \widetilde{S}_i$. Поскольку по построению схема $\widetilde{S} = \bigcup_{i\geq 0} \widetilde{S}_i$ связна [4], то подпучки $tors'_i, i \geq 0$, позволяют построить подпучок $tors \subset \sigma^*E$. Последний определяется следующим образом. Сечение $s \in \sigma^*E|_{\widetilde{S}_i}(U)$ удовлетворяет условию $s \in tors|_{\widetilde{S}_i}(U)$ тогда и только тогда, когда

- существует сечение $y \in \mathcal{O}_{\widetilde{S}_i}(U)$ такое, что $ys = 0$,
- выполнено хотя бы одно из двух условий: либо $y \in \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — простой идеал положительной коразмерности, аннулирующий s; либо существует открытое по Зарискому подмножество $V \subset \widetilde{S}$ и сечение $s' \in \sigma^*E(V)$ такие, что $V \supset U$, $s'|_U = s$, и $s'|_{V\cap\widetilde{S}_0} \in tors(\sigma^*E|_{\widetilde{S}_0})(V \cap \widetilde{S}_0)$. В последнем выражении подпучок кручения $tors(\sigma^*E|_{\widetilde{S}_0})$ понимается в обычном смысле.

Подпучок $tors \subset \sigma^*E$ играет в рассматриваемой конструкции роль, аналогичную роли подпучка кручения в случае приведенной и неприводимой базисной схемы. Поскольку путаница исключена, то символ $tors$ всюду понимается в указанном смысле, а подпучок $tors$ называется *подпучком кручения*. Пучки $tors_i$ определяются как ограничения $tors_i := tors|_{\widetilde{S}_i}$.

В работе [5] доказано, что пучки $\sigma^*E/tors$ локально свободны. Пучок $\widetilde{E}$, входящий в пару $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$, определяется соотношением $\widetilde{E} = \sigma^*E/tors$. При этом имеет место изоморфизм $H^0(\widetilde{S}, \widetilde{E} \otimes \widetilde{L}) \cong H^0(S, E \otimes L)$.

Там же показано, что ограничение пучка $\widetilde{E}$ на каждую из компонент $\widetilde{S}_i$, $i > 0$, дается соотношением квазиидеальности (0.1), где $q_0 : \mathcal{O}_S^{\oplus r} \twoheadrightarrow \varkappa$ — эпиморфизм, определяемый точной тройкой $0 \to E \to E^{\vee\vee} \to \varkappa \to 0$ с учетом локальной свободы пучка $E^{\vee\vee}$.

Разрешение особенностей полустабильного пучка E может быть глобализовано в плоском семействе с помощью конструкции, развитой в различных вариантах в работах [2,3,5]. Пусть T — приведенная неприводимая квазипроективная схема, $\mathbb{E}$ — пучок $\mathcal{O}_{T\times S}$-модулей, $\mathbb{L}$ — обратимый $\mathcal{O}_{T\times S}$-пучок, очень обильный относительно T такой, что $\mathbb{L}|_{t\times S} = L$, причем $\chi(\mathbb{E}\otimes\mathbb{L}^n|_{t\times S}) = rp(n)$ для всех замкнутых точек $t \in T$. Также будем предполагать, что T содержит непустое открытое подмножество T_0 такое, что $\mathbb{E}|_{T_0\times S}$ — локально свободный $\mathcal{O}_{T_0\times S}$-модуль. Тогда определены:

- $\widetilde{T}$ — целая нормальная схема, полученная некоторым бирациональным преобразованием $\phi : \widetilde{T} \to T$ схемы T,
- $\pi : \widetilde{\Sigma} \to \widetilde{T}$ — плоское семейство допустимых схем с обратимым $\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}}$-модулем $\widetilde{\mathbb{L}}$ таким, что $\widetilde{\mathbb{L}}|_{\pi^t(t)}$ — выделенная поляризация схемы $\pi^{-1}(t)$,
- $\widetilde{\mathbb{E}}$ — локально свободный $\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}}$-модуль, причем $((\pi^{-1}(t), \widetilde{\mathbb{L}}|_{\pi^{-1}(t)}), \widetilde{\mathbb{E}}|_{\pi^{-1}(t)})$ — S-полустабильная допустимая пара.

При этом имеет место морфизм раздутия $\Phi : \widetilde{\Sigma} \to \widetilde{T} \times S$, и

$$(\Phi_*\widetilde{\mathbb{E}})^{\vee\vee} = (\phi, id_S)^*\mathbb{E}; \tag{0.2}$$

что следует из совпадения пучков в левой и правой части, которые рефлексивны, на открытом подмножестве вне коразмерности 3. При этом важно, что схема $\widetilde{T} \times S$ является целой и нормальной.

Указанный механизм назван в [5] *стандартным разрешением.*

В работе [9] процедура стандартного разрешения обобщена на случай семейств с неприведенной базой. При этом показано, что преобразование семейства когерентных пучков без кручения E может быть выполнено так, что получится семейство допустимых полустабильных пар $((\pi : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}), \widetilde{\mathbb{E}})$ с той же базой T, т.е. базисная схема не претерпевает бирационального преобразования, и ϕ – тождественный изоморфизм.

Замечание 0.2. В [9] не доказывалось соотношение, аналогичное (0.2). Поэтому, говоря о стандартном разрешении семейства с неприведенной базой, мы не подразумеваем истинности аналогичного соотношения.

В разделе 1 мы напомним определение функтора $\mathfrak{f}^{GM}$ модулей когерентных полустабильных пучков без кручения ("функтор Гизекера – Маруямы") и определение функтора $\mathfrak{f}$ модулей допустимых полустабильных пар. Ранг r и полином $p(n)$ фиксированы и одинаковы для обоих функторов модулей. После этого будет дано описание преобразования семейства полустабильных допустимых пар $((\pi : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}), \widetilde{\mathbb{E}})$ с (возможно, неприведенной) базисной схемой T в семейство когерентных полустабильных пучков без кручения $\mathbb{E}$ с той же базой T. Построенное преобразование поставляет морфизм функтора допустимых полустабильных пар $\mathfrak{f}$ в функтор Гизекера – Маруямы $\mathfrak{f}^{GM}$.

В разделе 2 мы покажем, что построенный морфизм функторов является двусторонним обратным к морфизму $\underline{\kappa} : \mathfrak{f}^{GM} \to \mathfrak{f}$, построенному в [9]. Тем самым, рассматриваемые функторы (а именно, их подфункторы, отвечающие семействам с неприведенными базами, содержащим локально свободные пучки и S-пары соответственно) изоморфны.

В настоящей статье доказываются следующие результаты.

Теорема 0.1. *Имеет место естественное преобразование $\underline{\tau} : \mathfrak{f} \to \mathfrak{f}^{GM}$ каждого максимального замкнутого неприводимого подфунктора функтора модулей допустимых полустабильных пар, содержащего S-пары, в соответствующий максимальный замкнутый неприводимый подфунктор функтора модулей Гизекера – Маруямы, содержащий локально свободные пучки с теми же рангом и полиномом Гильберта. Это естественное преобразование является обратным к естественному преобразованию $\underline{\kappa}$, построенному в [9] и индуцированному процедурой стандартного разрешения, развитой в той же работе. Тем самым, оба морфизма неприведенных функторов модулей $\underline{\kappa} : \mathfrak{f}^{GM} \to \mathfrak{f}$ и $\underline{\tau} : \mathfrak{f} \to \mathfrak{f}^{GM}$ являются изоморфизмами.*

Следствие 0.1. *Объединение основных компонент неприведенной схемы модулей $\widetilde{M}$ для функтора $\mathfrak{f}$ изоморфно объединению основных компонент неприведенной схемы Гизекера – Маруямы $\overline{M}$ для пучков с теми же рангом и полиномом Гильберта.*

Следствие 0.2. *Схема модулей допустимых полустабильных пар $\widetilde{M}$ обладает универсальным семейством в точности тогда, когда схема Гизекера – Маруямы $\overline{M}$ для пучков с теми же $r, p(n)$ обладает универсальным семейством.*

1 Морфизм функторов модулей

Следуя [11, гл. 2, п. 2.2], напомним некоторые определения. Пусть $\mathcal{C}$ — категория, $\mathcal{C}^o$ — двойственная к ней категория, $\mathcal{C}' = \mathcal{F}unct(\mathcal{C}^o, Sets)$ — категория функторов в категорию множеств. По лемме Ионеды, функтор $\mathcal{C} \to \mathcal{C}' : F \mapsto (\underline{F} : X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F))$ вкладывает $\mathcal{C}$ как полную подкатегорию в $\mathcal{C}'$.

Определение 1.1. [11, гл. 2, определение 2.2.1] Функтор $\mathfrak{f} \in Ob\,\mathcal{C}'$ *копредставлен объектом* $M \in Ob\,\mathcal{C}$, если существует $\mathcal{C}'$-морфизм $\psi : \mathfrak{f} \to \underline{M}$ такой, что любой морфизм $\psi' : \mathfrak{f} \to \underline{F'}$ пропускается через единственный морфизм $\omega : \underline{M} \to \underline{F'}$.

Определение 1.2. Схема $\widetilde{M}$ — *грубое пространство модулей* функтора $\mathfrak{f}$, если $\mathfrak{f}$ копредставлен схемой $\widetilde{M}$.

Пусть T – схема над полем k, $\pi : \widetilde{\Sigma} \to T$ – морфизм k-схем. Введем следующее

Определение 1.3. Семейство схем $\pi : \widetilde{\Sigma} \to T$ *бирационально S-тривиально*, если существуют изоморфные открытые подсхемы $\widetilde{\Sigma}_0 \subset \widetilde{\Sigma}$ и $\Sigma_0 \subset T \times S$ и выполнено схемное равенство $\pi(\widetilde{\Sigma}_0) = T$.

Последнее равенство означает, что все слои морфизма π имеют непустые пересечения с открытой подсхемой $\widetilde{\Sigma}_0$.

В частности если $T = \operatorname{Spec} k$, то π — постоянный морфизм и $\widetilde{\Sigma}_0 \cong \Sigma_0$ — открытая подсхема в S.

Рассматриваются множества семейств полустабильных пар

$$\mathfrak{F}_T = \left\{ \begin{array}{l} \pi : \widetilde{\Sigma} \to T \text{ бирационально } S\text{-тривиальное}, \\ \widetilde{\mathbb{L}} \in \operatorname{Pic} \widetilde{\Sigma} \text{ плоский над } T, \\ \text{при } m \gg 0\ \widetilde{\mathbb{L}}^m \text{ обилен относительно } T, \\ \forall t \in T\ \widetilde{L}_t = \widetilde{\mathbb{L}}|_{\pi^{-1}(t)} \text{ обилен;} \\ (\pi^{-1}(t), \widetilde{L}_t) \text{ допустимая схема с выделенной поляризацией;} \\ \chi(\widetilde{L}_t^n) \text{ не зависит от } t, \\ \widetilde{\mathbb{E}} - \text{локально свободный } \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}} - \text{пучок, плоский над } T; \\ \chi(\widetilde{\mathbb{E}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^n)|_{\pi^{-1}(t)}) = rp(n); \\ ((\pi^{-1}(t), \widetilde{L}_t), \widetilde{\mathbb{E}}|_{\pi^{-1}(t)}) - \text{полустабильная пара} \end{array} \right\}$$

и функтор
$$\mathfrak{f} : (Schemes_k)^o \to (Sets)$$
из категории k-схем в категорию множеств, ставящий в соответствие схеме T множество классов эквивалентности семейств вида $(\mathfrak{F}_T/\sim)$.

Отношение эквивалентности $\sim$ определяется следующим образом. Семейства $((\pi : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}), \widetilde{\mathbb{E}})$ и $((\pi' : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}'), \widetilde{\mathbb{E}}')$ из класса $\mathfrak{F}_T$ считаются эквивалентными (обозначение: $((\pi : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}), \widetilde{\mathbb{E}}) \sim ((\pi' : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}'), \widetilde{\mathbb{E}}'))$, если
1) существует изоморфизм $\iota : \widetilde{\Sigma} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\Sigma}'$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\Sigma} \arrow[rr, "\iota", "\sim"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & \widetilde{\Sigma}' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

коммутативна;
2) существуют линейные расслоения L', L'' на схеме T такие, что $\iota^*\widetilde{\mathbb{E}}' = \widetilde{\mathbb{E}} \otimes \pi^* L'$, $\iota^*\widetilde{\mathbb{L}}' = \widetilde{\mathbb{L}} \otimes \pi^* L''$.

Поясним, каковы "размеры" наибольшей по включению из тех открытых подсхем $\widetilde{\Sigma}_0$ в семействе допустимых схем $\widetilde{\Sigma}$, которые изоморфны подходящим открытым подсхемам в $T \times S$ в определении 1.3. Множество $F = \widetilde{\Sigma} \setminus \widetilde{\Sigma}_0$ замкнуто. Если T_0 –открытая в T подсхема, слои над которыми изоморфны S, то $\widetilde{\Sigma}_0 \supsetneqq \pi^{-1}T_0$ (неравенство строгое, поскольку в определении 1.3 $\pi(\widetilde{\Sigma}_0) = T$). Изоморфная подсхеме $\widetilde{\Sigma}_0$ открытая в $T \times S$ подсхема Σ_0 такова, что $\Sigma_0 \supsetneqq T_0 \times S$. В теоретико-множественном смысле, если $\pi : \widetilde{\Sigma} \to T$ – семейство допустимых схем, то $\widetilde{\Sigma}_0 \cong \widetilde{\Sigma} \setminus F$, где F – объединение дополнительных компонент слоев, не изоморфных S.

Под схемой Гизекера — Маруямы $\overline{M}$ будем понимать объединение тех компонент неприведенной схемы модулей полустабильных когерентных пучков без кручения, которые содержат локально свободные пучки.

Функтор Гизекера – Маруямы

$$\mathfrak{f}^{GM} : (Schemes_k)^o \to Sets,$$

ставит в соответствие каждой схеме T множество классов эквивалентности семейств вида $\mathfrak{F}_T^{GM}/\sim$, где

$$\mathfrak{F}_T^{GM} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}\text{– пучок } \mathcal{O}_{T\times S} \text{ – модулей, плоский над } T;\\ \mathbb{L}\text{– обратимый пучок } \mathcal{O}_{T\times S} \text{ – модулей,}\\ \text{обильный относительно } T\\ \text{и такой, что } L_t := \mathbb{L}|_{t\times S} \cong L \text{ для любой точки } t\in T;\\ E_t := \mathbb{E}|_{t\times S} \text{ без кручения и полустабилен по Гизекеру;}\\ \chi(E_t\otimes L_t^n) = rp(n). \end{array} \right\}$$

Семейства $\mathbb{E},\mathbb{L}$ и $\mathbb{E}',\mathbb{L}'$ из класса $\mathfrak{F}_T^{GM}$ считаются эквивалентными (обозначение: $(\mathbb{E},\mathbb{L})\sim(\mathbb{E}',\mathbb{L}')$), если существуют линейные расслоения L', L'' на схеме T такие, что $\mathbb{E}'=\mathbb{E}\otimes p^*L'$, $\mathbb{L}'=\mathbb{L}\otimes p^*L''$, где $p: T\times S\to T$ – проекция на сомножитель.

Замечание 1.1. Поскольку $\mathrm{Pic}\,(T\times S)=\mathrm{Pic}\,T\times\mathrm{Pic}\,S$, то данное нами определение функтора модулей $\mathfrak{f}^{GM}$ эквивалентно стандартному, приведенному, например, в [11]: различие в выборе семейств поляризаций $\mathbb{L}$ и $\mathbb{L}'$, имеющих изоморфные ограничения на слои над базой T, устраняется эквивалентностью, индуцированной тензорным умножением на обратный образ обратимого пучка L'' с базы T.

Морфизм функторов $\underline{\kappa}: \mathfrak{f}^{GM}\to\mathfrak{f}$ в [9] определяется коммутативными диаграммами

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \mathfrak{F}_T^{GM}/\sim \arrow[d] \\ & \mathfrak{F}_T/\sim \end{tikzcd}$$

где $T\in\mathcal{O}bSchemes_k$, $\underline{\kappa}(T): (\mathfrak{F}_T^{GM}/\sim)\to(\mathfrak{F}_T/\sim)$ – морфизм в категории множеств (отображение).

Замечание 1.2. Мы рассматриваем подфункторы в $\mathfrak{f}^{GM}$ (соответственно в $\mathfrak{f}$), определяемые следующими требованиями. Любое семейство $(\mathbb{L},\mathbb{E})$ (соответственно $((\pi:\widetilde{\Sigma}\to T,\widetilde{L}),\widetilde{E}))$ с базой T индуцировано семейством $(\mathbb{L}',\mathbb{E}')$ (соответственно $((\pi':\widetilde{\Sigma}'\to T',\widetilde{\mathbb{L}}'),\widetilde{\mathbb{E}}'))$ согласно расслоенной диаграмме

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, "o"'] & T\times S \arrow[l] \arrow[d, "(o,id_S)"] & \text{(соотв.,} & T \arrow[d, "o"'] & \widetilde{\Sigma} \arrow[l] \arrow[d, "\widetilde{o}"] &) \\ T' & T'\times S \arrow[l] & & T' & \widetilde{\Sigma}' \arrow[l] & \end{tikzcd}$$

А именно, $\mathbb{E}=(o,id_S)^*\mathbb{E}'$ (соответственно $\widetilde{\Sigma}=\widetilde{\Sigma}'\times_{T'}T$, $\widetilde{o}:\widetilde{\Sigma}\longrightarrow\widetilde{\Sigma}'$ — индуцированный морфизм, $\widetilde{\mathbb{E}}=\widetilde{o}^*\widetilde{\mathbb{E}}'$, $\widetilde{\mathbb{L}}=\widetilde{o}^*\widetilde{\mathbb{L}}'$). Ограничение семейства $(\mathbb{L}',\mathbb{E}')$ (соответственно $((\pi':\widetilde{\Sigma}'\to T',\widetilde{\mathbb{L}}'),\widetilde{\mathbb{E}}'))$ на каждую компоненту T'' схемы T' такую, что ее редукция T''_{red} неприводима, содержит локально свободные пучки (соответственно S-пары). В процессе доказательств можно предполагать, что семейство $(\mathbb{L},\mathbb{E})$ (соответственно $((\pi:\widetilde{\Sigma}\to T,\widetilde{L}),\widetilde{E}))$ содержит локально свободные пучки (соответственно S-пары), и его база T такова, что ее редукция T_{red} неприводима. Это означает, что рассматриваются допустимые полустабильные пары, деформационно эквивалентные S-парам [5].

Под схемой Гизекера – Маруямы $\overline{M}$ подразумевается объединение тех компонент неприведенной схемы модулей полустабильных когерентных пучков без кручения, которые содержат локально свободные пучки, под схемой модулей $\widetilde{M}$ — объединение ее компонент, содержащих S-пары.

Далее мы покажем, что имеется морфизм неприведенного функтора модулей допустимых полустабильных пар на неприведенный функтор модулей Гизекера – Маруямы. А именно, построим для каждой схемы T соответствие $((\pi : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}), \widetilde{\mathbb{E}}) \mapsto (\mathbb{L}, \mathbb{E})$, задающее отображение множеств $(\{((\pi : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}), \widetilde{\mathbb{E}})\}/\sim) \to (\{\mathbb{L}, \mathbb{E}\}/\sim)$. Это означает, что по каждому плоскому над базой T бирационально тривиальному семейству $((\pi : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}), \widetilde{\mathbb{E}})$ допустимых полустабильных пар можно построить семейство полустабильных когерентных пучков без кручения $\mathbb{E}$ с той же базой T.

Пусть $((\widetilde{\Sigma}, \widetilde{\mathbb{L}}), \widetilde{\mathbb{E}})$ – бирационально тривиальное семейство допустимых полустабильных пар с базой T. Мы предполагаем, что схема T_{red} неприводима и содержит хотя бы одну замкнутую точку, соответствующую S-паре, т.е. точку $x \in T$, для которой $\pi^{-1}(x) = \widetilde{S}_x \cong S$. Последнее условие обеспечивается замечанием 1.2. В такой точке $\widetilde{E}|_{\pi^{-1}(x)} = \widetilde{E}_x$ – локально свободный пучок на поверхности S, полустабильный по Гизекеру относительно поляризации $\widetilde{\mathbb{L}}|_{\widetilde{S}_x} = \widetilde{L}_x \cong L$. Пусть $\widetilde{\Sigma}_0$ – максимальная по включению открытая подсхема в $\widetilde{\Sigma}$, изоморфная открытой подсхеме произведения $T \times S$. Выберем $m \gg 0$ такое, что морфизм $\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}}$-модулей $\pi^*\pi_*(\widetilde{\mathbb{E}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m) \to \widetilde{\mathbb{E}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m$ сюръективен. После, быть может, тензорного умножения пучка $\widetilde{\mathbb{E}}$ на подходящий обратимый пучок с базы T, для локально свободного $\mathcal{O}_T$-пучка $\mathbb{V} := \pi_*(\widetilde{\mathbb{E}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m)$ имеем $\pi^*\mathbb{V} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^{-m}|_{\widetilde{\Sigma}_0} \cong \mathbb{V} \boxtimes L^{-m}|_{\Sigma_0}$, принимая во внимание изоморфизм $\widetilde{\Sigma}_0 \cong \Sigma_0$. Имеет место эпиморфизм $\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_0}$-модулей $\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}|_{\Sigma_0} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathbb{E}}|_{\widetilde{\Sigma}_0}$. Напомним, что если T_0 – подмножество точек в T, соответствующих S-парам, то $\pi^{-1}T_0 \subsetneqq \widetilde{\Sigma}_0$, и $\pi(\widetilde{\Sigma}_0) = T$.

Рассмотрим относительную схему Гротендика $\mathrm{Quot}^{\,rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}) \to T$. Она снабжена универсальным $\mathcal{O}_{\mathrm{Quot}^{\,rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}) \times S}$-факторпучком

$$\mathbb{V} \boxtimes_T \mathcal{O}_{\mathrm{Quot}^{\,rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m})} \boxtimes L^{-m} \twoheadrightarrow \mathbb{E}_{\mathrm{Quot}}\,.$$

Морфизм $\pi^*\mathbb{V} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathbb{E}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m$ индуцирует морфизм T-схем

$$\widetilde{\Sigma}_0 \to \mathrm{Quot}^{\,rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}) \times S,$$

являющийся локально замкнутым вложением.

Пусть $T' \subset \mathrm{Quot}^{\,rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m})$ – (возможно, неприведенная) подсхема, образованная всеми факторпучками $q_t : V \otimes L^{-m} \twoheadrightarrow E_t$ такими, что $q_t|_{\Sigma_0 \cap (t \times S)}$ изоморфен $(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m})|_{\Sigma_0 \cap (t \times S)} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathbb{E}}|_{\Sigma_0 \cap (t \times S)}$, где символом V обозначено k-векторное пространство $V \cong H^0(\widetilde{S}_t = \pi^{-1}(t), \widetilde{E}_t \otimes \widetilde{L}_t^m)$ размерности $rp(m)$, изоморфное слою векторного расслоения $\mathbb{V}$ в точке $t \in T$. Равносильно, T' – это схемный образ подсхемы $\widetilde{\Sigma}_0$ в $\mathrm{Quot}^{\,rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m})$. Имеем коммутативную диаграмму T-схем с расслоенным квадратом

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\Sigma}_0 \arrow[r, hook] \arrow[dr] & T' \times S \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{Quot}^{\,rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}) \times S \arrow[d] \\
& T' \arrow[r, hook] \arrow[dr, two heads, "\tau"'] & \mathrm{Quot}^{\,rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}) \arrow[d] \\
& & T
\end{tikzcd}$$

Двойная стрелка в диаграмме схем означает, что теоретико-схемный образ морфизма τ совпадает с его областью значений, т.е. образ схемы T' при морфизме τ имеет такую же схемную структуру, что и T. Это так, поскольку образ подсхемы $\widetilde{\Sigma}_0$ при проектировании на T совпадает с T.

Утверждается, что τ – изоморфизм. Для доказательства рассмотрим сначала замкнутую точку $\mathfrak{m} \in T$, образ слоя $\widetilde{\Sigma}_0 \cap \pi^{-1}(\mathfrak{m})$ в $\mathrm{Quot}^{\,rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}) \times S$ (который попрежнему будем обозначать $\widetilde{\Sigma}_0 \cap \pi^{-1}(\mathfrak{m})$) и соответствующий точке $\mathfrak{m}$ эпиморфизм

$$\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}|_{\widetilde{\Sigma}_0 \cap \pi^{-1}(\mathfrak{m})} \twoheadrightarrow \mathbb{E}|_{\widetilde{\Sigma}_0 \cap \pi^{-1}(\mathfrak{m})}. \tag{1.1}$$

Заметим, что в ситуации замечания 1.2 образ подмножества $\pi^{-1}(\mathfrak{m}) \setminus (\widetilde{\Sigma}_0 \cap \pi^{-1}(\mathfrak{m}))$ в S – это конечный набор точек на поверхности $S = \mathfrak{m} \times S \subset \mathrm{Quot}^{\,rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}) \times S$. Действительно, это "предел" замкнутых вложений поверхностей, изоморфных поверхности S, несущих полустабильные локально свободные пучки (в смысле функтора Гизекера – Маруямы). Получается снова изоморфная S поверхность, несущая полустабильный когерентный пучок без кручения.

Подсхема $U := (\widetilde{\Sigma}_0 \cap \pi^{-1}(\mathfrak{m})) \subset \mathfrak{m} \times S$ неаффинна и строго больше любой собственной аффинной подсхемы в S, не содержащей подмножество $\mathfrak{m} \times S \setminus U$.

Мы покажем, что морфизм (1.1) имеет однозначное продолжение на всю подсхему $\mathfrak{m} \times S$. Это означает, что подмодуль $\ker(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}|_{\widetilde{\Sigma}_0 \cap \pi^{-1}(\mathfrak{m})} \to \mathbb{E}_{\mathrm{Quot}}|_{\widetilde{\Sigma}_0 \cap \pi^{-1}(\mathfrak{m})})$ имеет однозначное продолжение на всю подсхему $\mathfrak{m} \times S$. Далее используется обозначение $E := \mathbb{E}_{\mathrm{Quot}}|_{\mathfrak{m} \times S}$.

Для любого открытого $U' \subset S$ такого, что $U' \cap (S \setminus U) \neq \emptyset$, элемент $f \in (V \otimes L^{-m})(U') = \mathbb{V} \boxtimes L^{-m}|_{\mathfrak{m} \times S}(U')$, обращающийся в 0 в $E(U' \cap U)$, обращается в $0 \in E(U')$ на всем U'. Тем самым, в слое над замкнутой точкой $\mathfrak{m} \in T$ имеет место однозначное продолжение эпиморфизма $V \otimes L^{-m}|_U \twoheadrightarrow E|_U$ до гомоморфизма $V \otimes L^{-m} \twoheadrightarrow E$. Поскольку морфизм $\kappa_{red} : \overline{M} \to \widetilde{M}$ биективен [5] и каждой полустабильной паре $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ соответствует когерентный полустабильный пучок E без кручения, и при $m \gg 0$ построенный гомоморфизм $V \otimes L^{-m} \twoheadrightarrow E$ определяет точку в подсхеме $Q \subset \mathrm{Quot}^{\,rp(n)}(V \otimes L^{-m})$, соответствующей полустабильным пучкам без кручения, то гомоморфизм, полученный продолжением, является эпиморфизмом.

Теперь обратимся к продолжению эпиморфизма $\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}|_{\widetilde{\Sigma}_0} \twoheadrightarrow \mathbb{E}_{\mathrm{Quot}}|_{\widetilde{\Sigma}_0}$. Пусть $\mathbb{U}' \subset T' \times S$ – открытая подсхема такая, что $\mathbb{U}' \cap \widetilde{\Sigma}_0 \neq \emptyset$. Предположим, что существует элемент $f \in (\mathbb{V} \boxtimes L^{-m})(\mathbb{U}')$, обращающийся в 0 в $\mathbb{E}_{\mathrm{Quot}}|_{T' \times S}(\mathbb{U}' \cap \widetilde{\Sigma}_0)$, но не в $\mathbb{E}_{\mathrm{Quot}}|_{T' \times S}(\mathbb{U}')$. Это означает, что $f|_{\mathbb{U}' \cap (T' \times S \setminus \widetilde{\Sigma}_0)} \neq 0$, что приводит к разложению неприводимого топологического пространства $T' \times S$ в несвязное объединение двух открытых подмножеств. Полученное противоречие доказывает однозначную продолжаемость эпиморфизма $\mathbb{V}\boxtimes_T \mathcal{O}_{\mathrm{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V}\boxtimes L^{-m})}\boxtimes L^{-m}|_{\widetilde{\Sigma}_0} \twoheadrightarrow \mathbb{E}_{\mathrm{Quot}}|_{\widetilde{\Sigma}_0}$ до эпиморфизма $\mathbb{V}\boxtimes_T \mathcal{O}_{\mathrm{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V}\boxtimes L^{-m})}\boxtimes L^{-m}|_{T'\times S} \twoheadrightarrow \mathbb{E}$, где $\mathbb{E} := \mathbb{E}_{\mathrm{Quot}}|_{T'\times S}$.

Заметим, что построенное соответствие $T \mapsto T'$ функториально и осуществляет морфизм функторов $\mathrm{Hom}_{Schemes_k}(-,T) \to \mathrm{Hom}_{Schemes_k}(-,T')$ и, тем самым, естественное преобразование функторов точек для схем T и T'. Это означает [12, лекция 3, предложение], что определен морфизм схем $\tau^{-1} : T \to T'$, обратный к τ.

Итак, остается убедиться в том, что подсхема $T' \subset \mathrm{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V}\boxtimes L^{-m})$ целиком попадает в подсхему Q, соответствующую полустабильным когерентным фактор-пучкам без кручения. Для этого будем считать, что $T' = \mathrm{Spec}\, A$, где A – локальная k-алгебра конечного типа с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Поскольку замкнутая точка $\mathfrak{m} \in T$, соответствующая допустимой полустабильной паре $((\widetilde{S},\widetilde{L}),\widetilde{E})$, переходит при нашей конструкции в когерентный L-полустабильный пучок без кручения $E_{\mathfrak{m}}$, то, переходя к локализации кольца A в любом из его простых идеалов $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A = T'$, мы можем заключить, что все полустабильные допустимые пары, соответствующие точкам схемы T', переходят в полустабильные когерентные пучки без кручения и, тем самым, T'_{red} принадлежит подсхеме Q полустабильных когерентных пучков без кручения. Однако свойство отсутствия кручения и свойство полустабильности по Гизекеру являются открытыми в плоских семействах когерентных пучков. Поэтому, если верно, что T'_{red} принадлежит подсхеме полустабильных пучков без кручения, то же самое верно относительно самой подсхемы T'.

Действительно, предположим, что T' – локальная схема с единственной замкнутой точкой $\mathfrak{m}$, и T' не принадлежит подсхеме полустабильных пучков без кручения. Поскольку $E_{\mathfrak{m}}$ – полустабильный пучок без кручения, то существует непустая замкнутая подсхема в схеме T', содержащая замкнутую точку, соответствующую неполустабильному пучку или пучку с кручением. Это невозможно, поскольку единственная замкнутая точка схемы T' соответствует полустабильному пучку без кручения.

Итак, мы показали, что определено естественное преобразование $\underline{\tau} : \mathfrak{f} \to \mathfrak{f}^{GM}$ функтора допустимых полустабильных пар в функтор полустабильных когерентных пучков без кручения. Это естественное преобразование определяется серией коммутативных диаграмм

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, mapsto, "\mathfrak{f}"] \arrow[d, equal] & \mathfrak{F}_T/\sim \arrow[d] \\
T \arrow[r, mapsto, "\mathfrak{f}^{GM}"] & \mathfrak{F}_T^{GM}/\sim
\end{tikzcd}$$

и приводит с помощью хорошо известной процедуры к морфизму схем модулей $\tau : \widetilde{M} \to \overline{M}$. В частности, описание вывода морфизма схем модулей из морфизма функторов приведено в [9].

Замечание 1.3. В [9] построены естественное преобразование $\underline{\kappa} : \mathfrak{f}^{GM} \to \mathfrak{f}$ и соответствующий морфизм возможно неприведенных схем модулей $\kappa : \overline{M} \to \widetilde{M}$.

2 Изоморфизм функторов модулей

Итак, конструкция предыдущего параграфа устанавливает морфизм функторов $\underline{\tau} : \mathfrak{f} \to \mathfrak{f}^{GM}$. В работе [9] построен морфизм $\underline{\kappa}$ в противоположном направлении.

Необходимо убедиться в том, что эти два морфизма взаимно обратны и поставляют изоморфизм функторов.

Сначала покажем, что $\underline{\tau} \circ \underline{\kappa} = id_{\mathfrak{f}^{GM}}$. Для этого возьмем семейство полустабильных когерентных пучков без кручения $\mathbb{E}$ и семейство поляризаций $\mathbb{L}$. Домножив, если это необходимо, эти пучки на подходящие обратимые $\mathcal{O}_T$-пучки, считаем, что локально свободные пучки $p_*(\mathbb{E} \otimes \mathbb{L}^m)$ и $p_*\mathbb{L}^m$ имеют первый класс Чженя, равный 0. Применим к выбранному семейству стандартное разрешение из [9]. Получим семейство допустимых полустабильных пар $((\pi : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}), \widetilde{\mathbb{E}})$. Теперь выполним преобразование, описанное в предыдущем параграфе. Получим снова семейство когерентных полустабильных пучков без кручения $\mathbb{E}''$ и семейство поляризаций $\mathbb{L}''$. Теперь, домножив оба $\mathcal{O}_{T\times S}$-модуля на подходящие обратимые пучки, поднятые с базы T, и получив $\mathcal{O}_{T\times S}$-модули $\mathbb{E}'$ и $\mathbb{L}'$ соответственно, считаем, что локально свободные $\mathcal{O}_T$-пучки $p_*(\mathbb{E}' \otimes \mathbb{L}'^m)$ и $p_*\mathbb{L}'^m$ имеют первый класс Чженя, равный 0. Семейства $(\mathbb{L}, \mathbb{E})$ и $(\mathbb{L}', \mathbb{E}')$ совпадают на подсхеме Σ_0, в обозначениях раздела 1. Согласно рассуждению о продолжении в разделе 1, они совпадают на всем произведении $\Sigma = T \times S$. Отсюда заключаем, что $(\mathbb{L}, \mathbb{E}) \sim (\mathbb{L}', \mathbb{E}')$. Доказанное означает, что естественное преобразование $\underline{\kappa} : \mathfrak{f}^{GM} \to \mathfrak{f}$ является сечением естественного преобразования $\underline{\tau}$ и, следовательно, морфизм пространств модулей $\kappa : \overline{M} \to \widetilde{M}$ является сечением морфизма $\tau : \widetilde{M} \to \overline{M}$. Таким образом, $\kappa : \overline{M} \to \widetilde{M}$ – замкнутое вложение. Это следует из следующей общей леммы.

Лемма 2.1. *Пусть $f : X \to Y$ – морфизм схем и $s : Y \to X$ – его сечение. Тогда s – замкнутое вложение.*

Доказательство. Поскольку $f \circ s = \mathrm{id}_Y$, морфизм s осуществляет изоморфизм схемы Y на ее образ в X. Теперь перейдем к аффинным подсхемам и будем считать, что $X = \mathrm{Spec}\, A$, $Y = \mathrm{Spec}\, B$, где A, B – коммутативные кольца, $f^\sharp : B \to A$, $s^\sharp : A \to B$ – их гомоморфизмы, порождающие одноименные морфизмы схем. При этом $s^\sharp \circ f^\sharp = \mathrm{id}_B$. Тогда $f^\sharp$ отображает B изоморфно на его образ в A, а $s^\sharp$ отображает подкольцо $f^\sharp(B) \subset A$ на B. Тем самым, $s^\sharp$ – сюръективный гомоморфизм, и B изоморфно факторкольцу кольца A. Отсюда заключаем, что $s : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ – замкнутое вложение. □

Итак, каждая допустимая полустабильная пара $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ соответствует когерентному полустабильному пучку E без кручения, и имеется замкнутое вложение $\kappa : \overline{M} \hookrightarrow \widetilde{M}$.

Теперь убедимся в том, что $\underline{\kappa} \circ \underline{\tau} = id_{\mathfrak{f}}$. Пусть T_0 – максимальная непустая открытая подсхема в T, замкнутые точки которой соответствуют S-парам. Ограничение семейства $((\widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}), \widetilde{E})$ на T_0 индуцирует локально замкнутое вложение $\mu_0 : T_0 \hookrightarrow \mathrm{Quot}^{\,rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m})$, в композиции со структурной проекцией на базу T поставляющее изоморфизм $\mu_0(T_0) \cong T_0$. При этом $(\mu_0, \mathrm{id}_S)^*\mathbb{E}_{\mathrm{Quot}} = \widetilde{\mathbb{E}}|_{\pi^{-1}(T_0)}$.

Образуем расслоение Грассмана $\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r) \to T$ r-факторпространств слоев векторного расслоения $\mathbb{V}$. Слоем расслоения $\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r) \to T$ в точке $t \in T$ является обычное многообразие Грассмана $G(V_t, r)$. Поскольку все векторные пространства $V_t \cong V$ изоморфны как имеющие одинаковые размерности, то и все слои грассманова расслоения также изоморфны: $G(V_t, r) \cong G(V, r)$. Для допустимой полустабильной пары $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ при $m \gg 0$ определено замкнутое вложение $j : \widetilde{S} \hookrightarrow G(V, r)$, определенное эпиморфизмом локально свободных пучков

$H^0(\widetilde{S}, \widetilde{E} \otimes \widetilde{L}^m) \boxtimes \widetilde{L}^{-m} \twoheadrightarrow \widetilde{E}$. Пусть $\mathcal{O}_{G(V,r)}(1)$ – положительная образующая группы $\mathrm{Pic}\, G(V,r)$, тогда $P(n) := \chi(j^*\mathcal{O}_{G(V,r)}(n))$ – полином Гильберта замкнутой подсхемы $j(\widetilde{S})$. Зафиксируем полином $P(n)$ и рассмотрим схему Гильберта $\mathrm{Hilb}^{P(n)}\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r)$ подсхем в $\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r)$, имеющих полином Гильберта $P(n)$, и ее универсальную подсхему $\mathrm{Univ}^{P(n)}\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r) \to \mathrm{Hilb}^{P(n)}\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r)$.

Семейство допустимых полустабильных пар $((\pi : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}), \widetilde{\mathbb{E}})$ индуцирует расслоенный квадрат

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\Sigma} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{Univ}^{P(n)}G(V,r) \arrow[d] \\
T \arrow[r] & \mathrm{Hilb}^{P(n)}G(V,r)
\end{tikzcd}$$

для подходящего $V \cong H^0(\widetilde{S}, \widetilde{E} \otimes \widetilde{L}^m)$, и диаграмму с расслоенным квадратом и вложениями в "относительные" схемы

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\Sigma} \arrow[r, hook, "\widetilde{\mu}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{Univ}^{P(n)}\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r) \arrow[d] \\
T \arrow[r, hook, "\mu"] \arrow[dr, "\sim"] & \mathrm{Hilb}^{P(n)}\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r) \arrow[d] \\
 & T
\end{tikzcd}$$

Рассматриваемое семейство содержит S-пары; возьмем максимальное открытое $\widetilde{\Sigma}_0 \subset \widetilde{\Sigma}$, локально изоморфное открытому подмножеству произведения $T \times S$. Рассмотрим относительную схему Гротендика $\mathrm{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m})$ и диагональное вложение

$$\delta_0 : \widetilde{\Sigma}_0 \hookrightarrow \mathrm{Univ}^{P(n)}\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r) \times_T \mathrm{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}).$$

Пусть морфизм φ определяется композицией морфизмов T-схем

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\Sigma}_0 \arrow[r, hook, "\delta_0"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathrm{Univ}^{P(n)}\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r) \times_T \mathrm{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}) \arrow[d] \\
 & \mathrm{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m})
\end{tikzcd}$$

Согласно приведенному в предыдущем разделе рассуждению о естественном преобразовании $\underline{\tau}$, вложение δ_0 продолжается до вложения

$$\delta : \widetilde{\Sigma} \hookrightarrow \mathrm{Univ}^{P(n)}\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r) \times_T \mathrm{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}).$$

Морфизм φ имеет своим образом схему T', изоморфную T. Изоморфизм осуществляется проектированием на базу относительных схем T.

Таким образом, имеем вложение $\mu' : \varphi(\widetilde{\Sigma}_0) \cong T \hookrightarrow \mathrm{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m})$, которое поставляет семейство когерентных полустабильных пучков без кручения $\mathbb{E} = (\mu', \mathrm{id}_S)^*\mathbb{E}_{\mathrm{Quot}}$. Семейство поляризаций $\mathbb{L}$ дается, например, формулой $\mathbb{L} = \mathcal{O}_T \boxtimes L$.

Теперь выполним стандартное разрешение полученного семейства $\mathbb{E}$ так, как оно описано в [9]. При этом нас по-прежнему интересует та версия стандартного разрешения, которая не меняет базисную схему T. Стандартное разрешение, предложенное в [9], использует раздутие $\boldsymbol{\sigma} : \widehat{\Sigma} \to \Sigma$ произведения $\Sigma = T \times S$ в пучке идеалов Фиттинга $\mathbb{I} = \mathcal{F}itt^0 \mathcal{E}xt^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_\Sigma)$. В той же статье доказано, что композиция $f := p_1 \circ \boldsymbol{\sigma} : \widehat{\Sigma} \to T$ — плоский морфизм. Получим семейство допустимых полустабильных пар $((\pi' : \widetilde{\Sigma}' \to T, \widetilde{\mathbb{L}}'), \widetilde{\mathbb{E}}')$, где $\widetilde{\Sigma}' = \widehat{\Sigma}$, $\pi' = f$, $\widetilde{\mathbb{L}}' = \boldsymbol{\sigma}^* \mathbb{L} \otimes \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbb{I} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}}$, пучок $\widetilde{\mathbb{E}}'$ таков, как описано в работе [9]. Оно поставляет локально свободный пучок $\pi'_*(\widetilde{\mathbb{E}}' \otimes (\widetilde{\mathbb{L}}')^m)$. Нам необходимо следующее предложение, доказательство которого будет приведено позднее.

Предложение 2.1. *После тензорного умножения на подходящие обратимые $\mathcal{O}_T$-пучки следующие локально свободные пучки изоморфны:* $\mathbb{V} = \pi_*(\widetilde{\mathbb{E}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m)$, $\mathbb{V}_0 = p_*(\mathbb{E} \otimes \mathbb{L}^m)$, *и* $\mathbb{V}' = \pi'_*(\widetilde{\mathbb{E}}' \otimes (\widetilde{\mathbb{L}}')^m)$.

В силу предложения 2.1 определены вложения T-схем

$$\delta' : \widetilde{\Sigma}' \hookrightarrow \mathrm{Univ}^{\,P(n)}\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r) \times_T \mathrm{Quot}^{\,rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m})$$

и

$$\widetilde{\mu}' : \widetilde{\Sigma}' \hookrightarrow \mathrm{Univ}^{\,P(n)}\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r),$$

индуцированные соответственно пучками $\mathbb{V} \cong \mathbb{V}_0$ и $\mathbb{V}'$. Схема $\widetilde{\Sigma}'$ содержит открытую подсхему $\widetilde{\Sigma}'_0$, изоморфную подсхеме $\widetilde{\Sigma}_0$, причем при учете этого изоморфизма и по конструкции стандартного разрешения имеют место изоморфизмы $\widetilde{\mathbb{L}}'|_{\widetilde{\Sigma}'_0} \cong \widetilde{\mathbb{L}}|_{\widetilde{\Sigma}_0}$ и $\widetilde{\mathbb{E}}'|_{\widetilde{\Sigma}'_0} \cong \widetilde{\mathbb{E}}|_{\widetilde{\Sigma}_0}$. Кроме того, слои семейств $\widetilde{\Sigma}$ и $\widetilde{\Sigma}'$ в замкнутых точках совпадают.

Итак, в $\mathrm{Univ}^{\,P(n)}\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r)$ имеется две T-подсхемы $\widetilde{\mu}(\widetilde{\Sigma})$ и $\widetilde{\mu}'(\widetilde{\Sigma})$, совпадающие при ограничениях на редукцию T_{red} и на открытых подмножествах $\widetilde{\mu}(\widetilde{\Sigma}_0) = \widetilde{\mu}'(\widetilde{\Sigma}'_0)$.

Замечание 2.1. Совпадение на редукциях следует из единственности схемного замыкания для $\widetilde{\mu}(\widetilde{\Sigma}_{0red}) = \widetilde{\mu}'(\widetilde{\Sigma}'_{0red})$ в $\mathrm{Univ}^{\,P(n)}\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r) \times_T T_{red}$. Отсюда получается изоморфизм приведенных функторов модулей $\mathfrak{f}^{GM}_{red} \cong \mathfrak{f}_{red}$ и, тем самым, изоморфизм приведенных схем модулей $\overline{M}_{red} \cong \widetilde{M}_{red}$.

Теперь заметим, что относительно проекции

$$\pi : \mathrm{Univ}^{\,P(n)}\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r) \to \mathrm{Hilb}^{\,P(n)}\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r)$$

имеем

$$\pi(\widetilde{\mu}(\widetilde{\Sigma}_0)) = \mu(T) = \mu'(T) = \pi(\widetilde{\mu}'(\widetilde{\Sigma}'_0)),$$

причем эта подсхема изоморфно отображается на базу T структурной проекцией $\mathrm{Hilb}^{\,P(n)}\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r) \to T$.

По построению и универсальному свойству схемы Гильберта имеем

$$\widetilde{\mu}(\widetilde{\Sigma}) = \pi^{-1}\pi(\widetilde{\mu}(\widetilde{\Sigma}_0)) = \pi^{-1}\mu(T) = \pi^{-1}\mu'(T) = \pi^{-1}\pi(\widetilde{\mu}'(\widetilde{\Sigma}'_0)) = \widetilde{\mu}'(\widetilde{\Sigma}').$$

Изоморфизмы $\widetilde{\Sigma} \cong \widetilde{\mu}(\widetilde{\Sigma})$ и $\widetilde{\Sigma}' \cong \widetilde{\mu}'(\widetilde{\Sigma}')$ завершают доказательство.

Доказательство предложения 2.1. Рассмотрим эпиморфизм $\mathcal{O}_{T\times S}$-модулей

$$\mathbb{V} \boxtimes L^{-m} \twoheadrightarrow \mathbb{E},$$

связанный с вложением $T \hookrightarrow \mathrm{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m})$. Тензорное умножение на $\mathcal{O}_S$-пучок L^m и формирование прямого образа p_* приводит к морфизму локально свободных $\mathcal{O}_T$-модулей $\psi : \mathbb{V} \to p_*(\mathbb{E} \boxtimes L^m)$. Пучок справа отличается от $\mathbb{V}_0$ умножением на некоторый обратимый $\mathcal{O}_T$-модуль, что и доказывает предложение для $\mathcal{O}_T$-модулей $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}_0$.

Теперь обратимся к паре $\mathbb{V}_0$ и $\mathbb{V}'$. Напомним, что пучки $\widetilde{\mathbb{E}}'$ и $\widetilde{\mathbb{L}}'$ получены стандартным разрешением семейства $\mathbb{E}$. В ходе этой процедуры получается эпиморфизм $\boldsymbol{\sigma}^*\mathbb{E} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathbb{E}}'$ [9]. Подкрутка на $(\widetilde{\mathbb{L}}')^m$ и формирование прямого образа $\boldsymbol{\sigma}_*$ приводят к морфизму $\mathcal{O}_{T\times S}$-модулей

$$\boldsymbol{\sigma}_*(\boldsymbol{\sigma}^*\mathbb{E} \otimes (\widetilde{\mathbb{L}}')^m) \to \boldsymbol{\sigma}_*(\widetilde{\mathbb{E}}' \otimes (\widetilde{\mathbb{L}}')^m). \tag{2.1}$$

Теперь нам потребуется лемма, являющаяся обобщением известной формулы проекции.

Лемма 2.2. *Пусть $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ – морфизм локально окольцованных пространств такой, что $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$, $\mathcal{E}$ – конечно представимый $\mathcal{O}_Y$-модуль, $\mathcal{F}$ – $\mathcal{O}_X$-модуль. Тогда имеет место мономорфизм $\mathcal{E} \otimes f_*\mathcal{F} \hookrightarrow f_*[f^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}]$.*

Доказательство леммы. Зафиксируем какое-нибудь конечное представление для пучка $\mathcal{E}$:

$$E_1 \to E_0 \to \mathcal{E} \to 0,$$

где E_0, E_1 – локально свободные $\mathcal{O}_Y$-модули. Формирование обратного образа f^*, тензорное умножение на $\otimes_X \mathcal{F}$ и затем формирование прямого образа f_* приводит к комплексу

$$\dots \to f_*[f^*E_1 \otimes_X \mathcal{F}] \to f_*[f^*E_0 \otimes_X \mathcal{F}] \to f_*[f^*\mathcal{E} \otimes_X \mathcal{F}] \to \dots$$

Согласно обычной формуле проекции, первые два выписанных члена равны соответственно $E_1 \otimes_Y f_*\mathcal{F}$ и $E_0 \otimes_Y f_*\mathcal{F}$. Тем самым имеем

$$\mathcal{E} \otimes_Y f_*\mathcal{F} = \mathrm{coker}\,(E_1 \otimes_Y f_*\mathcal{F} \to E_0 \otimes_Y f_*\mathcal{F}) \hookrightarrow f_*[f^*\mathcal{E} \otimes_X \mathcal{F}].$$

Это доказывает лемму. □

Применив лемму, имеем мономорфизм

$$(\mathbb{E} \otimes \mathbb{L}^m) \otimes \boldsymbol{\sigma}_*(\boldsymbol{\sigma}^{-1}\mathbb{I} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}})^m \hookrightarrow \boldsymbol{\sigma}_*(\boldsymbol{\sigma}^*\mathbb{E} \otimes (\widetilde{\mathbb{L}}')^m). \tag{2.2}$$

Применение прямого образа p_* к морфизмам (2.1) и (2.2) и учет равенства $\pi = p \circ \boldsymbol{\sigma}$ приводит к диаграмме

$$\begin{tikzcd} p_*[(\mathbb{E} \otimes \mathbb{L}^m) \otimes \boldsymbol{\sigma}_*(\boldsymbol{\sigma}^{-1}\mathbb{I} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}})^m] \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\eta"] & p_*[\mathbb{E} \otimes \mathbb{L}^m] \\ \pi_*[\boldsymbol{\sigma}^*\mathbb{E} \otimes (\widetilde{\mathbb{L}}')^m] \arrow[r] & \pi_*[\widetilde{\mathbb{E}}' \otimes (\widetilde{\mathbb{L}}')^m] \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

Верхняя горизонтальная стрелка индуцирована вложением $\boldsymbol{\sigma}^{-1}\mathbb{I} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}}$. Нижняя горизонтальная стрелка – эпиморфизм, поскольку $m \gg 0$ и $\widetilde{\mathbb{L}}'$ обилен относительно проекции π. Наклонная стрелка определяется как композиция морфизмов и потребуется в дальнейшем.

В диаграмме (2.3) пучки справа локально свободны ранга $rp(m)$. Домножив $\mathbb{E}$ (или $\widetilde{\mathbb{E}}'$) на подходящий обратимый пучок $\mathcal{L}$ с базы T, добьемся того, чтобы пучки, стоящие справа в (2.3), совпадали на открытом подмножестве, полученном исключением подсхемы коразмерности ≥ 2. Кроме того, известно [15], что для пучка идеалов $\mathbb{I}$ на схеме Σ и любого обратимого $\mathcal{O}_\Sigma$-пучка $\mathcal{L}'$ раздутия этой схемы, определяемые пучками $\mathbb{I}$ и $\mathbb{I} \otimes \mathcal{L}'$, изоморфны. Поэтому, домножив при необходимости пучок идеалов $\mathbb{I}$ на подходящий обратимый $\mathcal{O}_T$-пучок $\mathcal{L}'$, добьемся того, чтобы пучки в верхней строке диаграммы (2.3) совпадали на открытом подмножестве, полученном удалением подсхемы коразмерности ≥ 2. Такое преобразование приводит к умножению пучка $\widetilde{\mathbb{L}}'$ на $\pi^*\mathcal{L}'$.

После такого преобразования верхняя горизонтальная стрелка в (2.3) – это канонический морфизм пучка $p_*[(\mathbb{E}\otimes\mathbb{L}^m)\otimes\boldsymbol{\sigma}_*(\boldsymbol{\sigma}^{-1}\mathbb{I}\cdot\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}})^m]$ в его рефлексивную оболочку. Наклонная стрелка – морфизм того же пучка в локально свободный пучок, который очевидно рефлексивен. Следовательно, этот морфизм пропускается через рефлексивную оболочку. Таким образом получаем (дважды двойственный к η) морфизм $\eta^{\vee\vee} : p_*[\mathbb{E} \otimes \mathbb{L}^m] \to \pi_*[\widetilde{\mathbb{E}}' \otimes (\widetilde{\mathbb{L}}')^m]$ локально свободных $\mathcal{O}_T$-пучков, который является изоморфизмом на открытом подмножестве, полученном удалением подсхемы коразмерности не ниже 2. Кроме этого, совпадают ограничения обоих локально свободных пучков на редукцию T_{red}. Совпадение пучков на всей схеме T следует из простой алгебраической леммы.

Лемма 2.3. *Пусть A – коммутативное кольцо, M– A-модуль конечного типа, $\Phi : M \to M$ – A-эндоморфизм. Пусть редукция $\Phi_{red} : M_{red} \to M_{red}$ – A_{red}-автоморфизм. Тогда Φ – A-автоморфизм.*

□

Доказательство леммы. Поскольку гомоморфизм Φ_{red} сюръективен и нильрадикал принадлежит радикалу Джекобсона, то, согласно [13, глава 2, упражнение 10], Φ тоже сюръективен. Тогда согласно [14, теорема 2.4] Φ – автоморфизм. □

Полученный изоморфизм завершает доказательство теоремы 0.1 и позволяет усилить результат работы [7] о существовании универсального семейства на схеме $\widetilde{M}$, доказав следствие 0.2.

Для этого напомним

Определение 2.1. [11, определение 2.2.1] Функтор $\mathfrak{f} : \mathcal{C}^o \to Sets$ *представлен объектом* $M \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, если он изоморфен функтору $\underline{M} : T \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M)$.

Если $\mathcal{C} = (Schemes_k)$ и, соответственно, $\mathfrak{f} : T \mapsto \mathfrak{F}_T/\sim$, то объект (схема) M называется *тонким пространством модулей* функтора $\mathfrak{f}$.

Изоморфизм функторов $\mathfrak{f} \cong \underline{M}$ определяется серией коммутативных диаграмм

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, equal] \arrow[d] & T \arrow[d] \\ (\mathfrak{F}_T/\sim) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M) \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

в которых нижняя горизонтальная стрелка – биекция. Положим $T = M$. Любой представитель класса $\xi \in (\mathfrak{F}_M/\sim)$, являющегося прообразом тождественного морфизма $\mathrm{id}_M \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M)$, есть универсальное семейство [16, ch. 1, §2] для тонкого пространства модулей M.

Пусть теперь $\mathfrak{f}, \widetilde{\mathfrak{f}} : (Schemes_k)^o \to Sets$ – два функтора модулей, между которыми имеется изоморфизм $\underline{\kappa} : \mathfrak{f} \to \widetilde{\mathfrak{f}}$, определяемый серией коммутативных диаграмм

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, equal] \arrow[d, mapsto] & T \arrow[d, mapsto] \\ (\mathfrak{F}_T/\sim) \arrow[r, "\sim", "\underline{\kappa}(T)"'] & (\widetilde{\mathfrak{F}}_T/\sim) \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

Тогда функтор $\widetilde{\mathfrak{f}}$ представлен схемой $\widetilde{M}$ тогда и только тогда, когда функтор $\mathfrak{f}$ представлен той же, с точностью до изоморфизма, схемой $M \cong \widetilde{M}$. Этот вывод следует сразу же из объединения диаграмм (2.4) и (2.5).

Пусть теперь $u \in \mathfrak{F}_M$ – универсальное семейство для $\mathfrak{f}$, $\xi = [u] \in \mathfrak{F}_M/\sim$ – его класс. Тогда класс $\underline{\kappa}(M)(\xi)$ отображается в $\mathrm{id}_{\widetilde{M}}$, а любой представитель $\widetilde{u} \in \underline{\kappa}(M)(\xi)$ поставляет универсальное семейство для $\widetilde{f}$. Тем самым следствие 0.2 доказано.

Список литературы / References

[1] Тимофеева Н. В., "Компактификация в схеме Гильберта многообразия модулей стабильных 2-векторных расслоений на поверхности", *Матем. заметки*, **82**:5 (2007), 756 – 769; [Timofeeva N. V., "Compactification in Hilbert scheme of moduli scheme of stable 2-vector bundles on a surface", *Math. Notes*, **82**:5 (2007), 677–690].

[2] Тимофеева Н. В., "О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности", *Матем. сборник*, **199**:7 (2008), 103–122; [Timofeeva N. V., "On a new compactification of the moduli of vector bundles on a surface", *Sb. Math.*, **199**:7 (2008), 1051–1070].

[3] Тимофеева Н. В., "О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности, II", *Матем. сборник*, **200**:3 (2009), 95–118; [Timofeeva N. V., "On a new compactification of the moduli of vector bundles on a surface. II", *Sb. Math.*, **200**:3 (2009), 405–427].

[4] Тимофеева Н. В., "О вырождении поверхности в компактификации Фиттинга модулей стабильных векторных расслоений", *Матем. заметки*, **90**:1 (2011), 143– 150; [Timofeeva N. V., "On degeneration of surface in Fitting compactification of moduli of stable vector bundles", *Math. Notes*, **90** (2011), 142–148].

[5] Тимофеева Н. В., "О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности, III: Функториальный подход", *Матем. сборник*, **202**:3 (2011), 107–160; [Timofeeva N. V., "On a new compactification of the moduli of vector bundles on a surface. III: Functorial approach", *Sb. Math.*, **202**:3 (2011), 413–465].

[6] Тимофеева Н. В., "О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности, IV: Неприведенная схема модулей", *Матем. сборник*, **204**:1 (2013), 139–160; [Timofeeva N. V., "On a new compactification of the moduli of vector bundles on a surface. IV: Nonreduced moduli", *Sb. Math.*, **204**:1 (2013), 133–153].

[7] Тимофеева Н. В., "О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности, V: Существование универсального семейства", *Матем. сборник*, **204**:3 (2013), 107–134; [Timofeeva N. V., "On a new compactification of the moduli of vector bundles on a surface. V: Existence of universal family", *Sb. Math.*, **204**:3 (2013), 411–437].

[8] Тимофеева Н. В., "Об одном изоморфизме компактификаций схемы модулей векторных расслоений", *Модел. и анализ информ. систем*, **19**:1 (2012), 37–50; [Timofeeva N. V., "On some isomorphism of compactifications of moduli scheme of vector bundles", *ArXiv:1103.5327v2].*

[9] Timofeeva N. V., "On a morphism of compactifications of moduli scheme of vector bundles", *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **12** (2015), 577–591.

[10] Gieseker D., "On the moduli of vector bundles on an algebraic surface", *Annals of Math.*, **106** (1977), 45–60.

[11] Huybrechts D., Lehn M., *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Vieweg, 1997.

[12] Мамфорд Д., *Лекции о кривых на алгебраической поверхности*, Мир, М., 1968; [Mumford D., *Lectures on curves on an algebraic surface*, Princeton Univ. Press, Princeton – New Jersey, 1966, Annals of Mathematical Studies, 59]

[13] Атья М., Макдональд И., *Введение в коммутативную алгебру*, Мир, М., 1972; [Atiyah M. F., Macdonald I. G., *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publ. Co., Massachusets, 1969].

[14] Matsumura H., *Commutative ring theory*, Cambridge Univ. Press, 1986, transl. from Japanese by M. Reid.

[15] Хартсхорн Р., *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981; [Hartshorne R., *Algebraic geometry*, Springer, 1977, Graduate Texts in Mathematics, 52].

[16] Newstead P. E., *Lectures on introduction to moduli problems and orbit spaces*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1978, Publ. for the Tata Institute for Fundamental Research, Bombay. Lectures on mathematics and Physics, vol. 51.

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-629-647

Isomorphism of Compactifications of Vector Bundles Moduli: Nonreduced Moduli

Timofeeva N. V.

Received May 15, 2015

We continue the study of the compactification of the moduli scheme for Gieseker-semistable vector bundles on a nonsingular irreducible projective algebraic surface S with polarization L, by locally free sheaves. The relation of main components of the moduli functor for admissible semistable pairs and main components of the Gieseker – Maruyama moduli functor (for semistable torsion-free coherent sheaves) with the same Hilbert polynomial on the surface S is investigated.
The compactification of interest arises when families of Gieseker-semistable vector bundles E on the nonsingular polarized projective surface (S, L) are completed by vector bundles $\widetilde{E}$ on projective polarized schemes $(\widetilde{S}, \widetilde{L})$ of special form. The form of the scheme $\widetilde{S}$, of its polarization $\widetilde{L}$ and of the vector bundle $\widetilde{E}$ is described in the text. The collection $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ is called a semistable admissible pair. Vector bundles E on the surface (S, L) and $\widetilde{E}$ on schemes $(\widetilde{S}, \widetilde{L})$ are supposed to have equal ranks and Hilbert polynomials which are compute with respect to polarizations L and $\widetilde{L}$, respectively. Pairs of the form $((S, L), E)$ named as S-pairs are also included into the class under the scope. Since the purpose is to study the compactification of moduli space for vector bundles, only families which contain S-pairs are considered.
We build up the natural transformation of the moduli functor for admissible semistable pairs to the Gieseker – Maruyama moduli functor for semistable torsion-free coherent sheaves on the surface (S, L), with same rank and Hilbert polynomial. It is demonstrated that this natural transformation is inverse to the natural transformation built in the preceding paper and defined by the standard resolution of a family of torsion-free coherent sheaves with a possibly nonreduced base scheme. The functorial isomorphism constructed determines the scheme isomorphism of compactifications of moduli space for semistable vector bundles on the surface (S, L).

Keywords: moduli space, semistable coherent sheaves, semistable admissible pairs, moduli functor, vector bundles, algebraic surface.

For citation: Timofeeva N. V., "Isomorphism of Compactifications of Vector Bundles Moduli: Nonreduced Moduli", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:5 (2015), 629–647.

On the authors:
Timofeeva Nadezhda Vladimirovna, orcid.org/0002-0007-1896-0951, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: nadezdavtimofeeva@gmail.com