

©Ворожцов Е. В., Шапеев В. П., 2015

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-648-664

УДК 519.63.4:532.51.5

Численное решение уравнения Пуассона в полярных координатах методом коллокаций и наименьших невязок

Ворожцов Е. В., Шапеев В. П.

получена 17 августа 2015

Предложен вариант метода коллокаций и наименьших невязок для численного решения уравнения Пуассона в полярных координатах на неравномерных сетках. Путем введения обобщенных криволинейных координат исходное уравнение Пуассона приводится к уравнению Бельтрами. В криволинейных координатах используется равномерная сетка. Неравномерность сетки в плоскости исходных полярных координат обеспечивается с помощью функций, управляющих растяжением сетки и входящих в формулы перехода от полярных координат к криволинейным. Метод верифицирован на двух тестовых задачах, имеющих точные аналитические решения. Результаты расчетов показывают, что если начало радиальной координатной оси не входит в расчетную область, то предлагаемый метод имеет второй порядок точности. Если расчетная область содержит эту сингулярность, то применение неравномерной сетки вдоль радиальной координаты позволяет повысить точность численного решения в 1.7–5 раз по сравнению со случаем равномерной сетки при том же количестве ее узлов.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, полярные координаты, метод коллокаций и наименьших невязок

Для цитирования: Ворожцов Е. В., Шапеев В. П., "Численное решение уравнения Пуассона в полярных координатах методом коллокаций и наименьших невязок", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22:5** (2015), 648–664.

Об авторах:

Ворожцов Евгений Васильевич, orcid.org/0000-0003-2753-8399, доктор физ.-мат. наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, г. Новосибирск, 630090 Россия, e-mail: vorozh@itam.nsc.ru

Шапеев Василий Павлович, orcid.org/0000-0001-6761-7273, доктор физ.-мат. наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, г. Новосибирск, 630090 Россия, Новосибирский национальный исследовательский университет, ул. Пирогова, 2, г. Новосибирск, 630090 Россия, e-mail: vshapeev@ngs.ru

Благодарности:

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ (код проекта 13–01–00227).

Введение

При моделировании многих физических процессов необходимо решать уравнение Пуассона в круге либо в кольцевом зазоре между двумя концентрическими окружностями. В частности, при численном решении уравнений Навье–Стокса, описывающих течения вязкой несжимаемой жидкости, с помощью проекционных методов требуется решение уравнения Пуассона для давления. Существующие численные методы решения уравнения Пуассона в областях с круглыми границами (в двумерном случае) и в областях с цилиндрическими границами (в трехмерном случае) можно разбить на две группы.

В первую группу входят методы, которые позволяют решать уравнения Пуассона в дисковидных или кольцевых областях непосредственно в декартовых прямоугольных координатах. В двумерном случае решается уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (1)$$

где x, y — декартовы прямоугольные координаты, а $f(\cdot)$ — заданная функция. В работе [1] был впервые предложен метод погруженных границ, в котором использовалась аппроксимация δ -функции; с ее помощью решение «размазывалось» в окрестности границ расчетной области в пределах тонкой полосы. В [2] была предложена симметричная дискретизация уравнения Пуассона в случае, когда на границе нерегулярной пространственной области заданы условия Дирихле. Согласно [2], расчетная область дополняется до прямоугольной, а в фиктивных ячейках, лежащих вне исходной нерегулярной расчетной области и вблизи ее границы, значения численного решения вычисляются с помощью линейной экстраполяции. Это позволяет применять для аппроксимации оператора Лапласа стандартные центрально-разностные формулы во всей расчетной области. В [3] было осуществлено повышение порядка аппроксимации метода погруженных границ, описанного в [2], до третьего и четвертого с помощью задания величин в фиктивных ячейках по экстраполяционным формулам более высоких порядков, чем первый.

В [4] был представлен метод конечных объемов для численного решения уравнения Пуассона с переменными коэффициентами в декартовых координатах в нерегулярных областях с граничными условиями Дирихле. Кроме того, в [4] использовался многосеточный алгоритм для ускорения сходимости. В [5] разностным методом высокого порядка точности со специальной аппроксимацией граничного условия решалось уравнение Пуассона в эллиптической области. В [6] методом коллокаций и наименьших квадратов в области с криволинейной границей решалось уравнение конвекции-диффузии на адаптивной прямоугольной сетке с нерегулярными ячейками на границе области. В [7] был предложен проекционный численный метод решения уравнений Навье–Стокса на адаптивной декартовой прямоугольной сетке. В рамках этого метода численно решалось уравнение Пуассона для давления, при этом налагалось ограничение на сетку, состоящее в том, что отношение размеров двух соседних ячеек не может превышать значение 2. Указанное ограничение на отношение размеров соседних ячеек было снято в работе [8], где была представлена конечно-разностная схема для численного решения уравнения Пуассона в нерегулярных областях на адаптивной прямоугольной сетке, измельчающейся вблизи границы области. Критерий измельчения основан на оценке близости к нерегулярной

границе, так что ячейки наименьшего размера располагаются на границе. Для того, чтобы хранить данные о пространственной дискретизации, в [7] использовалась структура данных в виде октарного дерева, а в [8] – структуры данных в виде квадрадерева и октарного дерева. В [8] был указан недостаток использования структур данных в виде квадрадерева и октарного дерева, состоящий в том, что требуется некоторый расход машинного времени для того, чтобы обойти дерево от его корня до нужного узла графа.

Во вторую группу работ, посвященных разработке численных методов решения уравнения Пуассона в дисковидных или цилиндрических областях, входят работы, в которых решается в двумерном случае уравнение Пуассона в полярных координатах, а в трехмерном – в цилиндрических. Удобство использования указанных криволинейных координат состоит в том, что пространственная расчетная область становится прямоугольником в двумерном случае и параллелепипедом – в трехмерном. В работе [9] двумерное уравнение Пуассона в полярных координатах аппроксимировалось конечно-разностной схемой, имеющей центрированный трехточечный шаблон по каждой из двух полярных координат. Позднее были разработаны эффективные спектрально-разностные методы для решения уравнений Пуассона в полярных и цилиндрических координатах с применением быстрого дискретного преобразования Фурье. В двумерном случае для коэффициентов разложения Фурье получается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которая эффективно решается методом прогонки, а в трехмерном случае возникающая СЛАУ решается методом матричной прогонки. В [10] для коэффициентов Фурье была построена разностная схема второго порядка точности. В [11] была представлена компактная разностная схема четвертого порядка точности для коэффициентов Фурье в случае решения уравнения Пуассона в полярных координатах. В [12] спектрально-разностный метод работы [10] был применен для численного решения уравнения Пуассона в цилиндрических координатах для поправки давления в рамках конечно-разностного метода [14], с помощью которого была решена численно задача о течении вязкого несжимаемого газа в цилиндрическом кожухе с вращающимся диском.

Необходимо отметить недостаток спектрально-разностных методов решения уравнений Пуассона в полярных и цилиндрических координатах, который состоит в том, что сетка вдоль окружной координаты должна быть равномерной. При этом наибольшая эффективность быстрого дискретного преобразования Фурье достигается только в случае, когда число узлов N_θ по окружной координате имеет вид $N_\theta = 2^N + 1$, где N – целое положительное число, $N > 1$.

Как известно, при адекватном относительно задачи построении и использовании неравномерных сеток можно существенно повысить точность численного решения по сравнению со случаем использования равномерной сетки с тем же количеством узлов [6, 15, 16]. В этой связи был разработан ряд численных методов для решения уравнения Пуассона в полярных координатах на неравномерной сетке. В частности, в работе [17] был предложен численный метод с применением функции Грина, в котором сетка была неравномерной только в радиальном направлении. В [18] была предложена компактная разностная схема четвертого порядка точности на неравномерной сетке для двумерного уравнения конвекции-диффузии в полярных координатах. Тестовые расчеты подтвердили четвертый порядок точности схемы.

Имеется много прикладных задач, в которых желательно применять неравно-

мерную сетку вдоль окружной координаты θ . Это задачи расчета течений жидкости в устройствах, для которых характерно наличие сопряжения с какими-то технологическими элементами в интервале изменения окружной координаты $0 < \theta \leq 2\pi$, размер которых намного меньше, чем внешний диаметр устройства. Примерами таких устройств являются форсунки и гидроприводы, применяемые в технике.

Ранее в работах [13, 19–24] была продемонстрирована достаточно универсальная применимость метода коллокаций и наименьших невязок (КНН) для численного решения разнообразных краевых и начально-краевых задач для уравнений в частных производных различных типов. В этой связи представляется целесообразным исследовать применимость этого метода также для численного решения уравнений Пуассона в полярных координатах.

Метод КНН численного решения краевых задач для дифференциальных уравнений возник недавно. Он является проекционно-сеточным методом. В нем решение в каждой ячейке разностной сетки ищется в виде линейной комбинации базисных элементов некоторого конечномерного функционального пространства. В качестве последнего в силу определенных удобств, в основном, используется пространство многочленов. Метод КНН отличается от других численных методов тем, что численное решение задачи сводится к решению переопределенной СЛАУ. Решение последней ищется из требования минимизации функционала невязки уравнений задачи на ее численном решении. Вследствие такого комбинирования метода коллокаций с “сильным” требованием к решению дискретной задачи улучшаются его свойства (гладкость, точность) в сравнении с решениями, получаемыми простым методом коллокаций. На самом деле метод КНН обладает и другими улучшенными свойствами в сравнении с методом коллокаций. В частности, минимизация функционала невязки способствует подавлению (демпфированию) различных возмущений, возникающих в процессе решения задачи и ускоряет сходимость решения при итерационном способе его построения. Более подробный обзор литературы по методу КНН, а также описание прикладных задач, решенных этим методом, можно найти в [20, 23–25].

В настоящей работе предлагаются варианты метода КНН для численного решения двумерного уравнения Пуассона в полярных координатах как на равномерных, так и неравномерных сетках.

1. Метод КНН для численного решения уравнения Пуассона в полярных координатах

В результате перехода от декартовых координат x, y к полярным координатам r, θ по формулам $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ уравнение Пуассона (1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \bar{f}(\theta, r), \quad (2)$$

где $\bar{f}(\theta, r) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. В дальнейшем для краткости черту над f опустим. Уравнение (2) решается в прямоугольной области

$$\Omega = \{(\theta, r), 0 \leq \theta < 2\pi, R_1 \leq r \leq R_2\} \quad (3)$$

с граничными условиями Дирихле

$$u = g_1(\theta), \quad r = R_1; \quad u = g_2(\theta), \quad r = R_2; \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (4)$$

В (3), (4) R_1 и R_2 — заданные величины, $0 \leq R_1 < R_2$. На границах $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$ задается условие периодичности

$$u(0, r) = u(2\pi, r), \quad R_1 \leq r \leq R_2. \quad (5)$$

Сформулируем “дискретную” задачу, аппроксимирующую исходную дифференциальную краевую задачу. В методе КНН в пространственной расчетной области (3) строится расчетная сетка, которая может быть неравномерной вдоль обеих координат θ, r . Обозначим r -координату j -го узла сетки на оси r через r_j , и пусть N_r — число узлов неравномерной сетки в промежутке $[R_1, R_2]$. Множество узлов сетки r_1, \dots, r_{N_r} должно удовлетворять соотношениям $R_1 = r_1 < r_2 < \dots < r_{N_r} = R_2$. Аналогично, в интервале $[0, 2\pi)$ задается множество узлов сетки $\theta_1, \dots, \theta_{N_\theta}$ так, чтобы выполнялись соотношения $0 = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{N_\theta} = 2\pi$, где N_θ — число узлов сетки в интервале $[0, 2\pi)$. Обозначим через $\Omega_{i,j}$ подобласть области (3), занимаемую ячейкой с индексами i, j , то есть

$$\Omega_{i,j} = \{(\theta, r), \theta_i \leq \theta \leq \theta_{i+1}, r_j \leq r \leq r_{j+1}\}, \quad i = 1, \dots, N_\theta - 1, \quad j = 1, \dots, N_r - 1. \quad (6)$$

В задачах гидродинамики часто встречаются пространственные подобласти, в которых решение имеет большие градиенты. В случае равномерной сетки такие подобласти могут иметь размер менее, чем один шаг сетки; в этих случаях расчетный алгоритм может попросту “не заметить” подобные узкие переходные области, и это может привести к значительным ошибкам и неправильным результатам численного моделирования. В таких ситуациях применение неравномерных сеток, сгущающихся в подобластях больших градиентов решения, позволяет увеличить точность моделирования.

Один из наиболее простых способов управления растяжением сетки в случае уравнения Пуассона (1) состоит в использовании отображения [15]

$$x = f_2(\eta) \cos f_1(\xi), \quad y = f_2(\eta) \sin f_1(\xi), \quad (7)$$

где управляющие функции $f_1(\xi), f_2(\eta)$ входят в соотношения $\theta = f_1(\xi), r = f_2(\eta)$ и задаются пользователем с учетом специфики решаемой задачи. Расчетная область в плоскости криволинейных координат (ξ, η) по-прежнему остается прямоугольной, как и в случае, когда $f_1(\xi) = \xi, f_2(\eta) = \eta$. Предположим, следуя [15, 16], что расчетная сетка в плоскости (ξ, η) является квадратной с шагами $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$. Если $f_1(\xi) \neq \xi$ или $f_2(\eta) \neq \eta$, то расчетная сетка в исходной плоскости (θ, r) будет неравномерной.

Уравнение (1) при переходе от переменных x, y к криволинейным координатам ξ, η принимает следующий вид [16]:

$$\Delta_{\text{В}} u(\xi, \eta) = \bar{f}(\xi, \eta), \quad (8)$$

где $\Delta_{\text{В}} u$ — оператор Бельтрами, $\bar{f}(\xi, \eta) = f(f_2(\eta) \cos f_1(\xi), f_2(\eta) \sin f_1(\xi))$,

$$\Delta_B u = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{g_{22}u_\xi - g_{12}u_\eta}{\sqrt{g}} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{g_{11}u_\eta - g_{12}u_\xi}{\sqrt{g}} \right) \right], \quad (9)$$

g_{ij} ($i, j = 1, 2$) — скалярные произведения ковариантных касательных векторов, $g_{ij} = \vec{x}_{\xi_i} \cdot \vec{x}_{\xi_j}$, $i, j = 1, 2$, где $\xi_1 \equiv \xi$, $\xi_2 \equiv \eta$, $x_\xi = \partial x(\xi, \eta)/\partial \xi$, $y_\xi = \partial y(\xi, \eta)/\partial \xi$ и т.д., $\vec{x}_\xi = (x_\xi, y_\xi)$, $\vec{x}_\eta = (x_\eta, y_\eta)$, то есть

$$g_{11} = x_\xi^2 + y_\xi^2, \quad g_{22} = x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad g_{12} = g_{21} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \quad \sqrt{g} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi. \quad (10)$$

Вычисление величин g_{ij} согласно (10) в конкретном случае отображения (7) приводит к следующему выражению для оператора Бельтрами:

$$\Delta_B u = \frac{1}{f_2(\eta)f'_1(\xi)f'_2(\eta)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{f'_2(\eta)u_\xi}{f_2(\eta)f'_1(\xi)} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{f'_1(\xi)f_2(\eta)u_\eta}{f'_2(\eta)} \right] \right\}. \quad (11)$$

В методе КНН, наряду с глобальными координатами ξ, η , в каждой ячейке $\Omega_{i,j}$ используются локальные координаты y_1, y_2 . Для реализации метода КНН удобно ввести локальные координаты так, чтобы в пределах ячейки они менялись от -1 до $+1$. Поскольку расчетная сетка в плоскости (ξ, η) имеет шаги $\Delta \xi = \Delta \eta = 1$, то локальные переменные y_1, y_2 вводятся по формулам:

$$y_1 = \frac{\xi - \xi_{i+1/2}}{0.5}, \quad y_2 = \frac{\eta - \eta_{j+1/2}}{0.5}, \quad (12)$$

где $(\xi_{i+1/2}, \eta_{j+1/2})$ — координаты геометрического центра ячейки $\Omega_{i,j}$ в плоскости (ξ, η) . Формулы

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{dy_1}{d\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{1}{0.5} \frac{\partial}{\partial y_1} = 2 \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = 2 \frac{\partial}{\partial y_2} \quad (13)$$

позволяют заменить дифференцирование по ξ и η в (11) на дифференцирование по y_1, y_2 . Кроме того, необходимо заменить ξ и η в $f_2(\eta), f'_1(\xi), f'_2(\eta)$ по формулам: $\xi = 0.5y_1 + \xi_{i+1/2}$, $\eta = 0.5y_2 + \eta_{j+1/2}$.

В упомянутых во введении работах по применению метода КНН для решения различных краевых задач для уравнений в частных производных использовались полиномы от локальных координат для аппроксимации решения в каждой ячейке расчетной сетки. В настоящей работе также используется полиномиальное представление решения уравнения Пуассона в каждой ячейке $\Omega_{i,j}$. Пусть $U(y_1, y_2)$ — приближенное решение в ячейке в виде полинома. Для того, чтобы можно было аппроксимировать вторые производные, полином должен иметь, как минимум, вторую степень по переменным y_1, y_2 . Поэтому ниже используется многочлен второй степени вида

$$U(y_1, y_2) = a_1 + a_2 y_1 + a_3 y_2 + a_4 y_1^2 + 2a_5 y_1 y_2 + a_6 y_2^2. \quad (14)$$

В формулу (11) входят производные $f'_1(\xi), f'_2(\eta), f''_1(\xi), f''_2(\eta)$. Эти производные аппроксимировались в центре ячейки $\Omega_{i,j}$ со вторым порядком точности. Проиллюстрируем процедуру вычисления этих производных на примере производных $f'_2(\eta)$,

$f_2''(\eta)$. Для их аппроксимации во внутренних ячейках используем центральные разности [15, 16]

$$f_2'(\eta_{j+1/2}) = r_{j+1} - r_j, \quad f_2''(\eta_{j+1/2}) = r_{j+3/2} - 2r_{j+1/2} + r_{j-1/2}. \quad (15)$$

В левой граничной ячейке $\Omega_{i,1}$ применим правые односторонние разности:

$$f_2'(\eta_{3/2}) = (1/2)(4r_{5/2} - 3r_{3/2} - r_{7/2}), \quad f_2''(\eta_{3/2}) = r_{7/2} - 2r_{5/2} + r_{3/2}. \quad (16)$$

В правой граничной ячейке Ω_{i,N_r-1} применим левые односторонние разности

$$\begin{aligned} f_2'(\eta_{N_r-1/2}) &= \frac{1}{2}(r_{N_r-1/2} - 4r_{N_r-3/2} + r_{N_r-5/2}), \\ f_2''(\eta_{N_r-1/2}) &= r_{N_r-1/2} - 2r_{N_r-3/2} + r_{N_r-5/2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Следует заметить, что при применении метода КНН для решения любых задач важно, чтобы уравнения переопределенной системы, которые играют одинаковую роль в приближенном решении, имели примерно равные весовые коэффициенты. Обозначим через Δ_{B,y_1,y_2} оператор Бельтрами в локальных переменных y_1, y_2 . Заметим, что в оператор Бельтрами (8) входит множитель $1/[f_2'(\eta)]^2$, который в случае равномерной сетки имеет порядок малости $1/O(h_r^2)$, где h_r — шаг сетки в промежутке $[R_1, R_2]$. А коэффициенты уравнений, получаемых из краевого условия, имеют порядок малости $O(1)$. Для того, чтобы коэффициенты всех уравнений алгебраической системы относительно a_1, \dots, a_6 имели одинаковые порядки малости, достаточно умножить уравнение Бельтрами на величину порядка $O(h_r^2)$. Это можно обеспечить умножением его на величину $[f_2'(\eta)]^2$:

$$[f_2'(\eta)]^2 \Delta_{B,y_1,y_2} U = [f_2'(\eta)]^2 F(y_1, y_2), \quad (18)$$

где $F(y_1, y_2) = \bar{f}(0.5y_1 + \xi_{i+1/2}, 0.5y_2 + \eta_{j+1/2})$. Этот прием несколько улучшает точность численного решения.

Количество точек коллокации N_c в каждой ячейке $\Omega_{i,j}$ и их расположение внутри ячейки задаются пользователем, и это может делаться различными способами. В данном исследовании были реализованы более 20 вариантов задания локальных координат $(y_{1,i,m}, y_{2,j,m})$ точек коллокации. При этом для значений $N_c = 6$, $N_c = 8$ были реализованы два различных способа размещения точек коллокации внутри ячейки. В первом способе при $N_c = 6$ координаты точек коллокации таковы: $(\pm\omega, -\frac{2}{3}), (\pm\omega, 0), (\pm\omega, \frac{2}{3})$, где ω — значение, задаваемое пользователем в интервале $0 < \omega < 1$, см. рис. 1, (а). На рис. 1 точки коллокации показаны черными кружками, при этом $\omega = 0.7$. При $N_c = 8$ локальные координаты точек коллокации вычислялись в первом способе по формулам: $(\pm\omega, -\frac{3}{4}), (\pm\omega, -\frac{1}{4}), (\pm\omega, \frac{1}{4}), (\pm\omega, \frac{3}{4})$, см. рис. 1, (б). Таким образом, при $N_c = 6$ и $N_c = 8$ вдоль полярной оси r в ячейке задавалось больше рядов точек коллокации, чем вдоль оси θ . Это делалось с целью более точного расчета решения вблизи границ $r = R_1, r = R_2$, где могут иметься пограничные слои с большими градиентами решения.

В той же компьютерной программе был реализован при $N_c \geq 2$ и другой алгоритм задания точек коллокации. В этом алгоритме точки коллокации задавались на равном угловом расстоянии друг от друга на замкнутой кривой

$$\left(\frac{y_1}{\omega}\right)^M + \left(\frac{y_2}{\omega}\right)^M = 1, \quad (19)$$

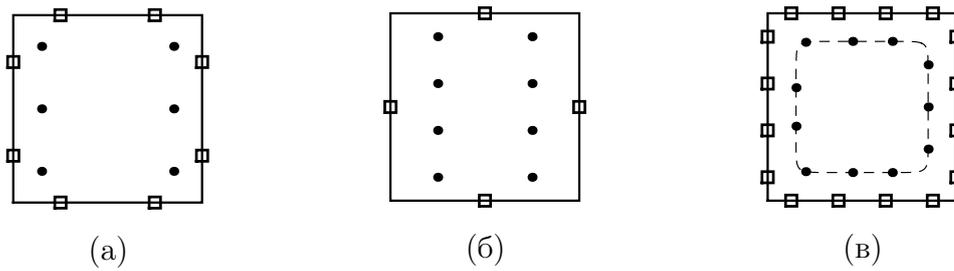


Рис. 1. Варианты задания точек коллокации и точек согласования: (а) $N_c = 6$, $N_m = 2$; (б) $N_c = 8$, $N_m = 1$; (в) $N_c = 11$, $N_m = 4$

где M — четное число, $M \geq 2$; оно задается пользователем. На рис. 1, (в) показан пример задания 11 точек коллокации данным способом; штриховой линией показана кривая (19) при $M = 12$. Следует отметить, что точки коллокации располагаются в ячейке $\Omega_{i,j}$ несимметрично относительно прямых $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ при нечетных N_c (см. рис. 1, (в)), что может несколько ухудшить точность решения, получаемого по методу КНН. Поэтому желательно использовать четные значения параметра N_c .

Подстановка выражения (14) в (18) приводит к алгебраическому уравнению, линейному относительно коэффициентов a_1, \dots, a_6 . Затем в это линейное уравнение подставляются координаты N_c точек коллокаций $(y_{1,i,m}, y_{2,j,m})$, $m = 1, \dots, N_c$. В результате получаются N_c уравнений коллокаций. Так как число неизвестных коэффициентов a_1, \dots, a_6 в (14) равно шести, то желательно задавать в каждой ячейке шесть и более точек коллокаций.

Как и в [22–24], на сторонах каждой ячейки задаются условия согласования решения в ней с решением в соседних ячейках, обеспечивающие единственное кусочно-полиномиальное решение. В качестве таких условий здесь взяты записанные в нескольких точках на общих сторонах рассматриваемой ячейки и соседних с ней требования непрерывности линейной комбинации значений приближенного решения и ее производной по нормали к стороне:

$$\sigma_1 h \partial(U^+) / \partial n + \sigma_2 (U^+) = \sigma_1 h \partial(U^-) / \partial n + \sigma_2 (U^-). \quad (20)$$

В левой части этих соотношений берется решение в рассматриваемой ячейке, а в правой части — решение в соседней ячейке. Точки, в которых записываются уравнения (20), называются точками согласования. Здесь $n = (n_1, n_2)$ — внешняя нормаль к стороне ячейки, U^+ , U^- — пределы функции U при стремлении ее аргументов к стороне ячейки изнутри и снаружи ячейки; σ_1, σ_2 — неотрицательные весовые параметры, которые влияют в некоторых пределах на обусловленность полученной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и скорость сходимости решения [26].

Величина h в (20) задается следующим образом: на стороне $r = r_{j+1}$ ячейки $\Omega_{i,j}$ в соответствии с (12) полагаем $h = \frac{1}{2}$. Тогда $h \partial(U^+) / \partial n = h \cdot \frac{dy_2}{dn} \cdot \frac{\partial U^+}{\partial y_2} = \frac{\partial U^+}{\partial y_2}$. Аналогично, на стороне $\theta = \theta_{i+1}$ имеем: $h_\theta \partial(U^+) / \partial n = h_\theta \partial(U^+) / \partial \theta = \partial U^+ / \partial y_1$, $h_\theta = \frac{1}{2}$. Обозначим через N_m количество точек согласования на каждой стороне ячейки. Так как число сторон ячейки равно четырем, получаем $4N_m$ условий согласования в каждой ячейке (на рис. 1 точки согласования показаны малыми квадратами).

Если сторона ячейки, на которой $r = \text{const}$, принадлежит границе области Ω ,

то вместо условий согласования на этой стороне в точках, которым на сторонах в ячейках внутри области соответствуют точки записи условий согласования, записываются граничные условия $U(y_1, y_2) = g_1$ или $U(y_1, y_2) = g_2$ в соответствии с (4).

Вдоль координаты θ в граничных ячейках $\Omega_{1,j}$ и $\Omega_{N_\theta-1,j}$, $j = 1, \dots, N_r - 1$ учитывались условия периодичности (5) в условиях согласования (20). Рассмотрим сначала ячейку $\Omega_{1,j}$. Сторона $\theta_1 = 0$ этой ячейки одновременно является стороной $\theta_1 = 2\pi$ ячейки $\Omega_{N_\theta-1,j}$. Поэтому равенство (20) было реализовано в ячейке $\Omega_{1,j}$ следующим образом:

$$\left[\sigma_1 \frac{\partial U(y_1, y_2)}{\partial y_1} + \sigma_2 U(y_1, y_2) \right]_{i=1, y_1=-1} = \left[\sigma_1 \frac{\partial U(y_1, y_2)}{\partial y_1} + \sigma_2 U(y_1, y_2) \right]_{i=N_\theta-1, y_1=1}. \quad (21)$$

Аналогично, при формировании СЛАУ в ячейке $\Omega_{N_\theta-1,j}$ в СЛАУ включалось уравнение

$$\left[\sigma_1 \frac{\partial U(y_1, y_2)}{\partial y_1} + \sigma_2 U(y_1, y_2) \right]_{i=N_\theta-1, y_1=1} = \left[\sigma_1 \frac{\partial U(y_1, y_2)}{\partial y_1} + \sigma_2 U(y_1, y_2) \right]_{i=1, y_1=-1}. \quad (22)$$

В реализованном здесь варианте метода численное решение глобальной задачи находится итерационно в так называемом процессе Гаусса–Зейделя. В нем, после того, как начальное приближение присвоено решению в каждой ячейке, на каждой глобальной итерации последовательно перебираются все ячейки области. В каждой ячейке решается СЛАУ, определяющее «локальный» кусок глобального решения в ней. В реализованном варианте решение в ней находилось ортогональным методом путем приведения матрицы переопределенной СЛАУ методом Гивенса к верхнетреугольному виду. При этом решение в очередной ячейке «согласовывается» посредством условий согласования с решением, имеющимся в соседних ячейках. Если очередная ячейка принадлежит границе области, то в ней реализуются краевые условия задачи, поскольку их аппроксимация включена в СЛАУ, определяющую решение в этой ячейке. Глобальные итерации заканчиваются при выполнении критерия прекращения итераций (27), (28).

При практической реализации метода КНН решение находится в ячейках $\Omega_{i,j}$ в направлении возрастания индексов i, j . Поэтому при формировании СЛАУ в ячейке $\Omega_{1,j}$ еще неизвестно решение в ячейке $\Omega_{N_\theta-1,j}$. В этой связи был реализован расчет с применением альтернирующего метода Шварца [28]. В соответствии с этим методом в качестве U^- в (20), (21) брались значения, известные на момент решения в данной ячейке. Пусть k — номер итерации, $k = 0, 1, 2, \dots$. Тогда условие (21) реализовывалось так:

$$\left[\sigma_1 \frac{\partial U^{k+1}(y_1, y_2)}{\partial y_1} + \sigma_2 U^{k+1}(y_1, y_2) \right]_{i=1, y_1=-1} = \left[\sigma_1 \frac{\partial U^k(y_1, y_2)}{\partial y_1} + \sigma_2 U^k(y_1, y_2) \right]_{i=N_\theta-1, y_1=1}.$$

А в правой части уравнения (22) можно брать значения $U(y_1, y_2)$ и $\partial U(y_1, y_2)/\partial y_1$ на $(k+1)$ -ой итерации, так как при счете в направлении возрастающего индекса i значения коэффициентов a_1, \dots, a_6 в (14) уже известны к тому моменту, когда вычислительный процесс достигнет граничной ячейки $(N_\theta - 1, j)$.

Начальное приближение $u^0(\theta, r)$ задавалось с учетом краевых условий (5) линейной интерполяцией значений $g_1(\theta)$, $g_2(\theta)$:

$$u^0(\theta, r) = \frac{[g_1(\theta) - g_2(\theta)]r + g_2(\theta)R_1 - g_1(\theta)R_2}{R_1 - R_2}.$$

В результате в каждой ячейке путем включения в СЛАУ уравнений коллокаций и условий согласования получается система, содержащая $N_c + 4N_m$ уравнений, где $N_c \geq 6$, $N_m \geq 1$. В силу того, что $N_c + 4N_m \geq 10$, СЛАУ для нахождения шести неизвестных коэффициентов a_1, \dots, a_6 в (14) переопределена. Для численного решения этой СЛАУ применялся метод Гивенса [23, 29].

Уравнение Пуассона (2) содержит сингулярность в точке $r = 0$. При этом само решение регулярно, если правая часть уравнения Пуассона и краевые условия достаточно гладкие. В спектрально-разностных методах [10, 11] проблема сингулярности была решена путем использования на оси r равномерной сетки, смещенной на полшаг от точки $r = 0$, и условия симметричности коэффициентов разложения в ряд Фурье.

В предлагаемом методе КНН проблема сингулярности отсутствует при конечных величинах шагов сетки. Точки коллокации задаются внутри ячейки, поэтому всегда $r = r_{j,m} > 0$ ($j = 1, \dots, N_r - 1$; $m = 1, \dots, N_c$). В условиях согласования (20) нет деления на r , то есть в них нет сингулярности.

Для вывода рабочих формул численного алгоритма решения задачи методом КНН все указанные выше действия были осуществлены в системе символьных вычислений МАТНЕМАТИСА. При этом все арифметические операторы были переведены в операторы ФОРТРАНА с помощью этой системы и включены в соответствующие места компьютерной программы численного решения задачи.

2. Результаты численных расчетов

Для исследования точности предложенного выше варианта метода КНН были взяты следующие тестовые решения уравнения Пуассона (1) [10, 17]:

$$u(x, y) = 3e^{x+y}(x - x^2)(y - y^2) + 5, \quad (23)$$

$$u(x, y) = \frac{e^x + e^y}{1 + xy}. \quad (24)$$

Соответствующие правые части $f(x, y)$ легко получаются подстановкой решений (23)–(24) в левую часть уравнения (1). Затем находится выражение для функции $\bar{f}(\theta, r)$ в (2). Заметим, что при использовании теста (24) необходимо задавать в (3) $R_2 < \sqrt{2}$, так как при $R_2 = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$ знаменатель в (24) обращается в ноль.

Расчеты по методу КНН выполнялись как на равномерных, так и неравномерных сетках вдоль осей θ, r . Неравномерные сетки были сгенерированы вдоль каждой из осей θ, r по одному и тому же алгоритму, описанному в [15]. Кратко опишем алгоритм получения неравномерной сетки в промежутке $R_1 \leq r \leq R_2$. В этом алгоритме нужно сначала задать шаги сетки $r_2 - r_1$ и $r_{N_r} - r_{N_r-1}$ по формулам: $r_2 - r_1 = \lambda_{r,L} \cdot h_r$, $r_{N_r} - r_{N_r-1} = \lambda_{r,R} \cdot h_r$, где h_r — шаг равномерной сетки в промежутке $R_1 \leq r \leq R_2$, имеющей N_r узлов, то есть $h_r = (R_2 - R_1)/(N_r - 1)$; $\lambda_{r,L}$ и $\lambda_{r,R}$ — коэффициенты, задаваемые пользователем, $0 < \lambda_{r,L}, \lambda_{r,R} \leq 1$. Если $\lambda_{r,L} < 1$, $\lambda_{r,R} =$

1, то получается вдоль оси r сетка, сгущающаяся вблизи границы $r = R_1$; если $\lambda_{r,L} < 1$ и $\lambda_{r,R} < 1$, то сетка сгущается вблизи обеих границ $r = R_1$ и $r = R_2$; если $\lambda_{r,L} = 1$, $\lambda_{r,R} < 1$, то сетка сгущается вблизи границы $r = R_2$; и, наконец, при $\lambda_{r,L} = \lambda_{r,R} = 1$ получается равномерная сетка. В вычислениях координат узлов сетки в этом алгоритме участвует функция $\text{sh}(\zeta)$.

Чтобы определить погрешность метода на конкретной пространственной расчетной сетке, вычислялись сеточные аналоги норм погрешности с использованием норм пространств L_p ($p \geq 1$) по формуле

$$\| \delta u^k \|_p = \left[\frac{1}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \sum_{i=1}^{N_\theta-1} \sum_{j=1}^{N_r-1} \left(u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^k - u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{ex} \right)^p r_{j+\frac{1}{2}} (r_{j+1} - r_j) (\theta_{i+1} - \theta_i) \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (25)$$

где $u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{ex}$ и $u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^k$ — соответственно, точное решение и приближенное решение по методу КНН, вычисленные в центре ячейки $\Omega_{i,j}$.

Порядок сходимости ν_p метода КНН на последовательности сеток при мельчении сетки вычислялся по известной в численном анализе формуле

$$\nu_p = \frac{\log(\| \delta u^k(h_{m-1}) \|_p / \| \delta u^k(h_m) \|_p)}{\log(h_{m-1}/h_m)}, \quad (26)$$

где h_m , $m = 2, 3, \dots$ — некоторые значения шагов h_r и h_θ , такие, что $|h_{r,m-1} - h_{r,m}| + |h_{\theta,m-1} - h_{\theta,m}| > 0$.

Пусть $a_{i,j,l}^k$ ($k = 0, 1, \dots; l = 1, \dots, 6$) — значение коэффициента a_l в (14) в ячейке $\Omega_{i,j}$ на k -ой итерации. Использовалось следующее условие окончания итераций по альтернирующему методу Шварца:

$$\| \delta a^{k+1} \| < \varepsilon, \quad (27)$$

где

$$\| \delta a^{k+1} \| = \max_{i,j} \left(\max_{1 \leq l \leq 6} |a_{i,j,l}^{k+1} - a_{i,j,l}^k| \right), \quad (28)$$

ε — малое положительное число, задаваемое вычислителем,

$$\varepsilon \ll \left[\min_{i,j} \{ (\theta_{i+1} - \theta_i), (r_{j+1} - r_j) \} \right]^2.$$

Численные результаты, представленные в таблицах 1 и 2, были получены со значением $\omega = 0.7$ при задании точек коллокации; $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ в (20). В критерии останова счета (27) брали значение $\varepsilon = 10^{-9}$. Использовалось шесть точек коллокации в каждой ячейке, для задания их координат применялось уравнение (20) с $M = 2$. Кроме того, на каждой стороне ячейки $\Omega_{i,j}$ задавалось по четыре точки согласования.

В табл. 1 представлены результаты расчетов по методу КНН в кольцевом зазоре между двумя концентрическими окружностями радиусов $R_1 = 0.5$, $R_2 = 1.0$, то есть сингулярность $r = 0$ находится вне расчетной области. Из этой таблицы видно, что порядок сходимости ν_2 весьма близок ко второму; порядок сходимости ν_∞ тоже близок ко второму, хотя и несколько ниже, чем 2.

Таблица 1. Погрешности $\|\delta u\|_2, \|\delta u\|_\infty$ и порядки сходимости ν_2, ν_∞ на последовательности сеток,
 $u(x, y) = 3e^{x+y}(x - x^2)(y - y^2) + 5, 0.5 \leq r \leq 1$

$N_\theta - 1$	$N_r - 1$	$\ \delta u\ _2$	ν_2	$\ \delta u\ _\infty$	ν_∞
Равномерная сетка					
75	6	5.0539E-04		1.1629E-03	
100	8	2.8206E-04	2.03	6.6402E-04	1.95
150	12	1.2498E-04	2.01	2.9861E-04	1.97
200	16	7.0317E-05	2.00	1.6847E-04	1.99
250	20	4.5033E-05	2.00	1.0805E-04	1.99
Неравномерная сетка вдоль оси r ($\lambda_{r,L} = 0.93, \lambda_{r,R} = 1.0$) и равномерная сетка вдоль оси θ					
75	6	5.6142E-04		1.1213E-03	
100	8	3.0738E-04	2.09	6.8916E-04	1.69
150	12	1.3454E-04	2.04	3.2792E-04	1.83
200	16	7.5413E-05	2.01	1.9028E-04	1.89
250	20	4.8216E-05	2.00	1.2396E-04	1.92
Равномерная сетка вдоль оси r и неравномерная сетка вдоль оси θ ($\lambda_{\theta,L} = \lambda_{\theta,R} = 0.6$)					
75	6	4.7726E-04		1.1430E-03	
100	8	2.6860E-04	2.00	6.6327E-04	1.89
150	12	1.1989E-04	1.99	3.0050E-04	1.95
200	16	6.7660E-05	1.99	1.6884E-04	2.00
250	20	4.3404E-05	1.99	1.0842E-04	1.99

Таблица 2. Погрешности $\|\delta u\|_2, \|\delta u\|_\infty$ и порядки сходимости ν_2, ν_∞ на последовательности сеток,
 $u(x, y) = 3e^{x+y}(x - x^2)(y - y^2) + 5, 0 \leq r \leq 1$

$N_\theta - 1$	$N_r - 1$	$\ \delta u\ _2$	ν_2	$\ \delta u\ _\infty$	ν_∞
Равномерная сетка					
75	12	3.4861E-03		2.5131E-02	
100	16	2.3369E-03	1.39	2.0583E-02	0.69
150	24	1.3983E-03	1.27	1.5271E-02	0.74
200	32	1.0222E-03	1.09	1.2481E-02	0.70
250	40	8.2012E-04	0.99	1.1284E-02	0.45
Неравномерная сетка вдоль оси r ($\lambda_{r,L} = 0.4, \lambda_{r,R} = 0.998$) и равномерная сетка вдоль оси θ					
75	12	2.0722E-03		1.1213E-03	
100	16	1.2641E-03	1.72	7.1873E-03	1.30
150	24	6.2044E-04	1.76	4.3878E-03	1.22
200	32	3.7129E-04	1.78	3.0676E-03	1.24
250	40	2.4852E-04	1.80	2.3191E-03	1.25

Таблица 3. Погрешности $\|\delta u\|_2$, $\|\delta u\|_\infty$ и порядки сходимости ν_2, ν_∞ на последовательности сеток,
 $u(x, y) = (e^x + e^y)/(1 + xy)$, $0 \leq r \leq 1$

$N_\theta - 1$	$N_r - 1$	$\ \delta u\ _2$	ν_2	$\ \delta u\ _\infty$	ν_∞
Равномерная сетка					
75	12	1.2773E-03		7.7051E-02	
100	16	1.0188E-02	0.79	6.9087E-02	0.38
150	24	7.3624E-03	0.80	5.6739E-02	0.49
200	32	5.8088E-03	0.82	4.8329E-02	0.56
250	40	4.8153E-03	0.84	4.2320E-02	0.60
Неравномерная сетка вдоль оси r ($\lambda_{r,L} = 0.3$, $\lambda_{r,R} = 1.0$) и равномерная сетка вдоль оси θ					
75	12	8.9070E-03		4.9344E-02	
100	16	5.9090E-03	1.43	3.8715E-02	0.84
150	24	3.3825E-03	1.38	2.8247E-02	0.78
200	32	2.2881E-03	1.36	2.2689E-02	0.76
250	40	1.6888E-03	1.36	1.9107E-02	0.77

Далее, как видно из табл. 1, в случае решения уравнения Пуассона в кольцевом зазоре $0.5 \leq r \leq 1$ применение неравномерной сетки вдоль оси r практически не дает выигрыша в точности. Если же используется неравномерная сетка вдоль оси θ , то имеется небольшой выигрыш в точности решения.

Однако если сингулярная точка $r = 0$ является граничной точкой расчетной области, то применение неравномерной сетки вдоль оси r приводит к заметному повышению точности, см. табл. 2. При этом происходит уменьшение погрешностей $\|\delta u\|_2$, $\|\delta u\|_\infty$ соответственно в 1.7–3.3 раза и в 2–5 раз по сравнению со случаем равномерной сетки.

Из сравнения таблиц 1 и 2 видно, что если точка $r = 0$ является границей расчетной области (то есть $R_1 = 0$), то происходит существенное (на один-два десятичных порядка) увеличение погрешностей $\|\delta u\|_2$ и $\|\delta u\|_\infty$ по сравнению со случаем, когда $R_1 = 0.5$. Этот эффект можно объяснить следующим образом на примере равномерной сетки с шагами h_r и h_θ вдоль осей соответственно r и θ . Рассмотрим ячейки $\Omega_{i,j}$, лежащие вблизи точки $r = 0$. Согласно (2), производная $\partial u / \partial r$ делится на r . В ячейке $\Omega_{i,1}$ координаты $r_{j,m}$ точек коллокаций удовлетворяют неравенствам $0 < r_{j,m} < h_r$. Это приводит к тому, что в рассматриваемой ячейке порядок погрешности аппроксимации члена $(1/r)\partial u / \partial r$ уменьшается. Если же $R_1 = O(1)$, то такая потеря точности численного решения не наблюдается.

В случае тестового решения (24) погрешности численного решения по методу КНН выше, чем в случае теста (23), ср. табл. 1 и 2 с табл. 3. Аналогичный эффект потери точности численного решения в случае теста (24) по сравнению с (23) был отмечен ранее в [11], где была предложена компактная разностная схема для уравнения (2). Здесь в численных экспериментах установлено, что применение неравномерной сетки вдоль оси r позволило повысить точность численного решения в два-три раза по сравнению со случаем равномерной сетки, см. табл. 3.

3. Заключение

Представлен новый вариант метода коллокаций и наименьших невязок для численного решения уравнения Пуассона в полярных координатах. Метод верифицирован на двух тестовых задачах, имеющих точные аналитические решения. Показано, что если начало радиальной координаты не входит в расчетную область, то предлагаемый метод имеет второй порядок точности.

Если сингулярность — начало радиальной координатной оси — входит в расчетную область, то применение неравномерной сетки вдоль радиальной координаты позволяет повысить точность численного решения в 1.7–5 раз по сравнению со случаем равномерной сетки.

Можно также отметить, что метод КНН хорошо распараллеливается. В нем всю расчетную область можно разрезать вдоль границ ячеек сетки на несколько подобластей, содержащих примерно равное количество ячеек. Расчет глобальной задачи можно вести параллельно в каждой подобласти.

Список литературы / References

- [1] Peskin C., “Numerical analysis of blood flow in the heart”, *J. Comput. Phys.*, **25** (1977), 220–252.
- [2] Gibou F., Fedkiw R., Cheng L.-T., Kang M., “A second-order-accurate symmetric discretization of the poisson equation on irregular domains”, *J. Comput. Phys.*, **176** (2002), 205–227.
- [3] Gibou F., Fedkiw R., “A fourth order accurate discretization for the laplace and heat equations on arbitrary domains, with applications to the stefan problem”, *J. Comput. Phys.*, **202** (2005), 577–601.
- [4] Johansen H., Colella P., “A cartesian grid embedded boundary method for poisson’s equation on irregular domains”, *J. Comput. Phys.*, **147** (1998), 60–85.
- [5] Шапеев А. В., Шапеев В. П., “Разностные схемы повышенной точности для решения эллиптических уравнений в области с криволинейной границей”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **40**:2 (2000), 223–232; English transl.: Shapeev A. V., Shapeev V. P., “Difference schemes of increased order of accuracy for solving elliptical equations in domain with curvilinear boundary”, *Computat. Math. and Math. Phys.*, **40**:2 (2000), 213–221.
- [6] Беляев В. В., Шапеев В. П., “Метод коллокаций и наименьших квадратов на адаптивных сетках в области с криволинейной границей”, *Вычисл. технологии*, **5**:4 (2000), 12–21; (Belyaev V. V., Shapeev V. P., “Metod kollokatsiy i naimenshih kvadratov na adaptivnyh setkah v oblasti s krivolineynoi granitsey”, *Vychislitelnye tehnologii*, **5**:4 (2000), 12–21.)
- [7] Popinet S., “Gerris: a tree-based adaptive solver for the incompressible euler equations in complex geometries”, *J. Comput. Phys.*, **190** (2003), 572–600.
- [8] Chen H., Min C., Gibou F., “A supra-convergent finite difference scheme for the Poisson and heat equations on irregular domains and non-graded adaptive Cartesian grids”, *J. Sci. Computing*, **31**:1/2 (2007), 19–60.
- [9] Swartztrauber P. N., Sweet R. A., “The direct solution of the discrete Poisson equation on a disc”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **10** (1973), 900–907.
- [10] Lai M.-C., Lin W.-W., Wang W., “A fast spectral/difference method without pole conditions for Poisson-type equations in cylindrical and spherical geometries”, *IMA J. Numer. Anal.*, **22**:4 (2002), 537–548.
- [11] Lai M.-C., “A simple compact fourth-order Poisson solver on polar geometry”, *J. Comput. Phys.*, **182** (2002), 337–345.

- [12] Ворожцов Е. В., “Аналитическое и численное исследование течения газа в кожухе с вращающимся диском”, *Вычислит. методы и программирование*, **10:2** (2009), 162–176; (Vorozhtsov E. V., “Analytic and Numerical Investigation of Gas Flow in a Casing with Rotating Disc”, *Vychisl. Metody Programm.*, **10:2** (2009), 162–176, [in Russian].)
- [13] Слепцов А. Г., “Коллокационно-сеточное решение эллиптических краевых задач”, *Моделирование в механике*, **5(22):2** (1991), 101–126; (Sleptsov A. G., “Kollokatsionno-setochnoe reshenie ellipticheskikh kraevykh zadach”, *Modelirovanie v mekhanike*, **5(22):2** (1991), 101–126, [in Russian].)
- [14] Verzicco R., Orlandi P., “A finite-difference scheme for three-dimensional incompressible flows in cylindrical coordinates”, *J. Comput. Phys.*, **123:2** (1996), 402–414.
- [15] Thompson J. F., Warsi Z. U. A., Mastin C. W., *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications*, North-Holland, New York, 1985, 483 pp.
- [16] Knupp P., Steinberg S., *Fundamentals of Grid Generation*, CRC Press, Boca Raton, 1994, 286 pp.
- [17] Borges L., Daripa P., “A fast parallel algorithm for the Poisson equation on a disk”, *J. Comput. Phys.*, **169** (2001), 151–192.
- [18] Ray R. K., Kalita J. C., “A transformation-free HOC scheme for incompressible viscous flows on nonuniform polar grids”, *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, **62** (2010), 683–708.
- [19] Семин Л. Г., Слепцов А. Г., Шапеев В. П., “Метод коллокаций–наименьших квадратов для уравнений Стокса”, *Вычисл. технологии*, **1:2** (1996), 90–98; (Semin L. G., Sleptsov A. G., Shapeev V. P., “Metod kollokatsiy–naimenshih kvadratov dlia uravneniy Stoksa”, *Vychislitelnye tehnologii*, **1:2** (1996), 90–98, [in Russian].)
- [20] Исаев В. И., Шапеев В. П., “Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнений Навье–Стокса”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50:10** (2010), 1758–1770; (English transl.: Isaev V. I., Shapeev V. P., “High-accuracy versions of the collocations and least squares method for the numerical solution of the Navier–Stokes equations”, *Computat. Math. and Math. Phys.*, **50:10** (2010), 1670–1681.)
- [21] Исаев В. И., Шапеев В. П., “Метод коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для решения уравнений Навье–Стокса”, *Докл. Академии наук*, **442:4** (2012), 442–445; (English transl.: Isaev V. I., Shapeev V. P., “High-order accurate collocations and least squares method for solving the Navier - Stokes equations”, *Dokl. Math.*, **85** (2012), 71–74.)
- [22] Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V., “CAS application to the construction of the collocations and least residuals method for the solution of 3D Navier–Stokes equations”, LNCS, **8136**, eds. Gerdt V. P., Koepf W., Mayr E. W., Vorozhtsov E. V., Springer, Heidelberg, 2013, 381–392.
- [23] Шапеев В. П., Ворожцов Е. В., Исаев В. И., Идимешев С. В., “Метод коллокаций и наименьших невязок для трехмерных уравнений Навье–Стокса”, *Вычислительные методы и программирование*, **14:3** (2013), 306–322; (Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V., Isaev V. I., Idimeshev S. V., “The Method of Collocations and Least Residuals for Three-dimensional Navier–Stokes Equations”, *Vychisl. Metody Programm.*, **14:3** (2013), 306–322, [in Russian].)
- [24] Шапеев В. П., Ворожцов Е. В., “Применение систем компьютерной алгебры для построения метода коллокаций и наименьших невязок решения трехмерных уравнений Навье–Стокса”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **21:5** (2014), 131–147; (Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V., “Application of Computer Algebra Systems to the Construction of the Collocations and Least Residuals Method for Solving the 3D Navier–Stokes Equations”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **21:5** (2014), 131–147, [in Russian].)
- [25] Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V., “CAS application to the construction of the collocations and least residuals method for the solution of the Burgers and Korteweg–de Vries–Burgers equations”, LNCS, **8660**, eds. Gerdt V. P., Koepf W., Mayr E. W., Vorozhtsov E. V., Springer, Heidelberg, 2014, 432–446.

- [26] Исаев В. И., Шапеев В. П., Еремин С. А., “Исследование свойств метода коллокации и наименьших квадратов решения краевых задач для уравнения Пуассона и уравнений Навье–Стокса”, *Вычислительные технологии*, **12:3** (2007), 53–70; (Isaev V. I., Shapeev V. P., Eremin S. A., “Issledovanie svoistv metoda kollokatsii i naimenshih kvadratov resheniya kraevykh zadach dlia uravneniya Puassona i uravneniy Navie–Stoksa”, *Vychislitelnye tehnologii*, **12:3** (2007), 53–70, [in Russian].)
- [27] Ferziger J. H., Perić M., *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 3rd Edition, Springer-Verlag, Berlin, 2002, 423 pp.
- [28] Schwarz H. A., “Über einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahren”, *Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, **15** (1870), 272–286.
- [29] Golub G. H., Van Loan C. F., *Matrix Computations*, 3rd Edition, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996, 694 pp.

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-648-664

Numerical Solution of the Poisson Equation in Polar Coordinates by the Method of Collocations and Least Residuals

Vorozhtsov E. V., Shapeev V. P.

Received August 17, 2015

A version of the method of collocations and least residuals is proposed for the numerical solution of the Poisson equation in polar coordinates on non-uniform grids. By introducing general curvilinear coordinates the original Poisson equation is reduced to the Beltrami equation. A uniform grid is used in curvilinear coordinates. The grid non-uniformity in the plane of the original polar coordinates is ensured with the aid of functions which control the grid stretching and entering the formulas of the passage from polar coordinates to the curvilinear ones. The method was verified on two test problems having exact analytic solutions. The examples of numerical computations show that if the radial coordinate axis origin lies outside the computational region, the proposed method has the second order of accuracy. If the computational region contains the singularity, the application of a non-uniform grid along the radial coordinate enables an increase in the numerical solution accuracy by factors from 1.7 to 5 in comparison with the uniform grid case at the same number of grid nodes.

Keywords: Poisson equation, polar coordinates, the method of collocations and least residuals

For citation: Vorozhtsov E. V., Shapeev V. P., "Numerical Solution of the Poisson Equation in Polar Coordinates by the Method of Collocations and Least Residuals", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22:5** (2015), 648–664.

On the authors:

Vorozhtsov Evgenii Vasilyevich, orcid.org/0000-0003-2753-8399, Doctor of physical and mathematical sciences, professor, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Institutskaya str., 4/1, Novosibirsk, 630090, Russia, e-mail: vorozh@itam.nsc.ru

Shapeev Vasily Pavlovich, orcid.org/0000-0001-6761-7273, Doctor of physical and mathematical sciences, professor Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Institutskaya str., 4/1, Novosibirsk, 630090, Russia, Novosibirsk National Research University, Pirogov str., 2, Novosibirsk, 630090, Russia, e-mail: vshapeev@ngs.ru

Acknowledgments:

The work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 13–01–00227).