

©Кащенко С. А., 2015

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-682-710

УДК 517.9

Асимптотика собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота

Кащенко С. А.

получена 4 сентября 2015

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение второго порядка с малым множителем при старшей производной. Исследуется вопрос об асимптотике всех собственных значений первой краевой задачи (задачи Дирихле) при стремлении этого множителя к нулю. Показано, что определяющую роль играет поведение коэффициентов уравнения лишь в малых окрестностях точек поворота, то есть таких точек, в которых обращается в нуль коэффициент при первой производной. В качестве основного результата служит теорема о предельных значениях всех собственных чисел первой краевой задачи.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное уравнение, точки поворота, асимптотика, краевая задача, собственные числа

Для цитирования: Кащенко С. А., "Асимптотика собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22:5** (2015), 682–710.

Об авторах:

Кащенко Сергей Александрович, orcid.org/0000-0002-8777-4302, доктор физико-математических наук, профессор, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Каширское ш., 31, 115409, г. Москва, Россия
e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Введение

Систематическое изучение дифференциальных уравнений с малым множителем при старшей производной началось с работы А.Н. Тихонова [1]. К настоящему времени хорошо изучен вопрос об асимптотике решений начальной задачи Коши для достаточно широкого класса таких уравнений. С основными результатами на эту тему можно ознакомиться в работах [2] и [3]. Одними из первых работ, посвященных качественным вопросам в теории рассматриваемых уравнений, явились статьи А.А. Дородницына [4], а также Е.Ф. Мищенко и Л.С. Понтрягина [5]. Дальнейшее развитие идей этих работ нашло отражение в [6].

В статьях [7–9] изучалась асимптотика по некоторому параметру собственных чисел первой краевой задачи для некоторых классов дифференциальных операторов, порядок которых понижался при нулевом значении этого параметра. При этом предполагалось, что у предельного оператора существуют собственные числа соответствующей первой краевой задачи, причем устанавливается, что именно к ним происходит стремление собственных чисел исходного дифференциального оператора при стремлении параметра к нулю. В настоящей работе вычисляются, с использованием качественных методов, пределы всех собственных значений первой краевой задачи для уравнений, указанных в названии. Существенным образом используются хорошо известные (см., например, [10–13]) результаты о разделении нулей решений уравнений второго порядка и теоремы сравнения осцилляционных свойств решений различных уравнений. Предел, к которому стремится первое собственное значение этой краевой задачи, определен в [9]. Трудности, которые здесь возникают, связаны с тем, что нет предельного оператора и, следовательно, методика работ [7, 8] не применима. Настоящая работа является расширенным вариантом работы автора [10].

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

На некотором отрезке $[\alpha, \beta]$ рассматривается первая краевая задача для дифференциального уравнения

$$\varepsilon \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = \lambda x$$

с малым положительным параметром ε . Предполагается, что функция $q(t)$ непрерывна, а $p(t)$ — непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ и, что является самым важным, функция $p(t)$ имеет конечное число простых нулей $t_1, \dots, t_n$, принадлежащих интервалу (α, β) . Хорошо известно (см. например [13]), что поставленная задача имеет счетное количество собственных чисел, которые вещественны и просты. Обозначим их через $\lambda_j(\varepsilon)$ ($j = 1, 2, \dots$). Условимся считать, что эти числа занумерованы в порядке убывания. Это всегда можно проделать, поскольку $\lambda_j(\varepsilon)$ ($j = 1, 2, \dots$) ограничены в совокупности сверху, и, кроме того, ни одна конечная точка числовой оси не может являться точкой сгущения последовательности рассматриваемых чисел. Каждому $\lambda_j(\varepsilon)$ соответствует решение $x_j(t, \varepsilon)$ дифференциального уравнения

$$\varepsilon \ddot{x} + p(t)\dot{x} + [q(t) - \lambda_j(\varepsilon)]x = 0.$$

Функция $x_j(t, \varepsilon)$ обращается в нуль в концах отрезка $[\alpha, \beta]$ и имеет ровно $j - 1$ нулей на интервале (α, β) .

Введем в рассмотрение величины

$$\nu_{ik} = \left[q(t_k) - \frac{|\dot{p}(t_k)| + \dot{p}(t_k)}{2} \right] - |\dot{p}(t_k)|i, \quad (i = 0, 1, \dots; k = 1, \dots, n). \quad (1)$$

Расположим числа ν_{ik} в ряд в порядке убывания. Определим затем числа λ_j , которые будем считать равными соответственно j -ым членам этого ряда.

Главным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Имеют место предельные равенства*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_j(\varepsilon) = \lambda_j \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Доказательство Теоремы 1 будет построено на основе анализа осцилляционных свойств решений дифференциального уравнения

$$\varepsilon \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0. \quad (2)$$

Сначала определим наибольшее количество нулей, которое могут иметь решения уравнения (2) на отрезке $[\alpha, \beta]$ при малых значениях параметра ε , причем сначала рассмотрим самый простой случай.

Лемма 1. *Пусть на интервале (α, β) функция $p(t)$ имеет лишь один нуль в точке t_1 . Пусть, далее, для некоторого целого положительного k выполнено неравенство*

$$k - 1 < \frac{\nu_{01}}{|\dot{p}(t_1)|} < k. \quad (3)$$

Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ найдется решение $x_0(t, \varepsilon)$ уравнения (2), имеющее ровно $k + 1$ нулей на отрезке $[\alpha, \beta]$. Любое другое решение того же уравнения имеет число нулей меньшее или равное $k + 1$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $t_1 = 0$. С помощью преобразования

$$x = y \exp \left[-\frac{1}{2\varepsilon} \int_{\alpha}^t p(\tau) d\tau \right] \quad (4)$$

и последующего

$$t = \sqrt{\varepsilon |\dot{p}(0)|^{-1}} s$$

уравнение (2) приводится к виду

$$\ddot{y} + \left[\frac{2q(0) - \dot{p}(0)}{2|\dot{p}(0)|} - \frac{s^2}{4} + \omega(s, \varepsilon) \right] y = 0. \quad (5)$$

В (5) непрерывная функция $\omega(s, \varepsilon)$ стремится к нулю при стремлении ε к нулю равномерно на каждом конечном промежутке изменения s . В результате новой замены

$$y = u \exp \left[-\frac{s^2}{4} \right]$$

придем к уравнению

$$\ddot{u} - s\dot{u} + \left[\frac{\nu_{01}}{|\dot{p}(0)|} + \omega(s, \varepsilon) \right] u = 0. \quad (6)$$

С уравнением (6) тесно связано уравнение Вебера [14]

$$\ddot{u} - s\dot{u} - au = 0,$$

где

$$a = -\frac{\nu_{01}}{|\dot{p}(0)|}. \quad (7)$$

Линейно независимыми решениями последнего уравнения являются функции

$$u_r(s) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a(a+2) \dots (a+2i-2)}{(2i)!} s^{2i} \quad (8)$$

и

$$u(s) = s + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(a+1) \dots (a+2i-1)}{(2i+1)!} s^{2i+1}.$$

Исследуем осцилляционные свойства этих функций. Мы покажем, что функция $u_r(s)$ имеет ровно $k+1$ нулей при нечетном k , фигурирующем в неравенствах (3), а в случае четного k функция $u(s)$ будет иметь ровно $k+1$ нулей.

Сначала установим, что наибольшее количество нулей функций $u_r(s)$ и $u(s)$, с одной стороны, не превосходит числа $k+1$, а с другой стороны, оно не меньше, чем $k-1$. Для этого введем в рассмотрение функции

$$u_i(s) = (-1)^{k-2+i} \exp \left[\frac{s^2}{2} \right] \frac{d^{k-2+i}}{ds^{k-2+i}} \exp \left[-\frac{s^2}{2} \right], \quad i = 1, 2, 3.$$

Непосредственно проверяется, что введенные таким образом функции являются решениями дифференциальных уравнений

$$\ddot{u} - s\dot{u} - (k-2+i)u = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

соответственно. Легко показать, рассуждая, например, по индукции, что для каждого целого положительного k функция $u_i(s)$ обращается в ноль ровно $k-2+i$ раз на интервале $(-\infty, \infty)$. Отсюда и из теоремы сравнения (см., например, [11–13]) вытекает, что при условии (3) в случае нечетного k число нулей функции $u_r(s)$ не больше, чем $k+1$, и не меньше, чем $k-1$. При этом количество нулей функции $u(s)$ не превосходит k . Если же k четно, то функция $u(s)$ обращается в ноль не более $k+1$ и не менее $k-1$ раз, а число нулей функции $u_r(s)$ меньше или равно k .

Уточним теперь полученный результат. А именно, докажем, что количество нулей функции $u_r(s)$ в точности равно $k+1$, если k нечетно. В случае четного k столько же нулей имеет на интервале $(-\infty, \infty)$ функция $u(s)$. Разберем только случай, когда в условии (3) k нечетно. В случае четного k в том же условии доказательство проводится аналогично, и поэтому мы его опустим.

Предположим противное. Тогда, очевидно, решение (8), которое является четной функцией, имеет необходимо $k - 1$ нулей. Приняв во внимание тот факт, что $u_r(0) = 1$, легко получить равенство

$$\lim_{s \rightarrow \infty} u_r(s) = \begin{cases} -\infty, & \text{если } k - 1 \text{ не кратно } 4, \\ \infty, & \text{если } \frac{k-1}{4} = p, \quad p = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (9)$$

Если, однако, мы воспользуемся формулой (8), записанной в виде

$$u_r(s) = 1 + \sum_{i=1}^k \frac{a(a+2) \dots (a+2i-2)}{(2i)!} s^{2i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{a(a+2) \dots (a+2i-2)}{(2i)!} s^{2i},$$

где под последним знаком суммирования все слагаемые положительны, когда $k - 1$ не кратно четырем, и отрицательны – в противном случае, то получим равенство

$$\lim_{s \rightarrow \infty} u_r(s) = \begin{cases} \infty, & \text{если } \frac{k-1}{4} \neq p, \quad p = 0, 1, \dots, \\ -\infty, & \text{если } \frac{k-1}{4} = p, \quad p = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Сравнивая последнее равенство с соотношением (9), приходим к противоречию.

Таким образом, мы доказали, что при нечетном k функция $u_r(s)$ обращается в нуль ровно $k + 1$ раз на интервале $(-\infty, \infty)$. Ясно, что количество нулей функции $u(s)$ при этом равно k .

Фиксируем так $s_0 > 0$, чтобы на интервале $(-s_0, s_0)$ содержались все нули функций $u_r(s)$ и $u(s)$. Будем, далее, рассматривать только те значения ε , при которых

$$\left[-(\varepsilon |\dot{p}(0)|^{-1})^{\frac{1}{2}} s_0, (\varepsilon |\dot{p}(0)|^{-1})^{\frac{1}{2}} s_0 \right] \subset [\alpha, \beta].$$

Тогда на отрезке $[-s_0, s_0]$ определены коэффициенты уравнения (6), которые на нем равномерно сходятся к коэффициентам уравнения (1.9) при стремлении ε к нулю. Отсюда следует существование такого $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ наибольшее число нулей решений уравнения (6), а значит, и уравнения (2), не меньше, чем $k + 1$. Поэтому ясно, что для доказательства леммы необходимо показать следующее: у уравнения (5) не может быть решений с числом нулей на отрезке $[\alpha, \beta]$ большим, чем $k + 1$, когда ε достаточно мало.

Введем сначала несколько обозначений. Через $u_1(s, \varepsilon)$ и $u_2(s, \varepsilon)$ обозначим решения дифференциального уравнения (6), начальные условия которых, заданные при $s = 0$, совпадают соответственно с начальными условиями решений $u_r(s)$ и $u_H(s)$ уравнения (1.9). Введем затем в рассмотрение отрезки

$$\Delta_1(\varepsilon) = \left[\alpha (\varepsilon |\dot{p}(0)|^{-1})^{-\frac{1}{2}}, s_1(\varepsilon) \right] \quad \text{и} \quad \Delta_2(\varepsilon) = \left[s_2(\varepsilon), \beta (\varepsilon |\dot{p}(0)|^{-1})^{-\frac{1}{2}} \right].$$

Здесь через $s_i(\varepsilon) \in [-s_0, s_0]$ ($i = 1, 2$) обозначены числа, являющиеся соответственно левым крайним и правым крайним нулем функции $u_1(s, \varepsilon)$ при четном k , фигурирующем в (3), и функции $u_2(s, \varepsilon)$ – при нечетном. Отметим, что при малых ε нули у функций $u_1(s, \varepsilon)$ и $u_2(s, \varepsilon)$ существуют, и, более того, количество нулей у каждой из рассматриваемых функций на отрезке $[-s_0, s_0]$ равно соответственно числу нулей функций $u_r(s)$ и $u_H(s)$. Это следует из равномерной сходимости $u_1(s, \varepsilon)$ к $u_r(s)$, а

$u_2(s, \varepsilon)$ к $u_H(s)$ на каждом конечном промежутке при стремлении ε к нулю. Отсюда же вытекает справедливость предельных равенств

$$-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s_1(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s_2(\varepsilon) = s_1, \quad (10)$$

где $s_1 > 0$ является правым крайним нулем функции $u_r(s)$, если k четно, и функции $u_H(s)$, если k нечетно.

Покажем, что решения дифференциального уравнения (5) не осциллируют при достаточно малых ε на отрезках $\Delta_1(\varepsilon)$ и $\Delta_2(\varepsilon)$. Отсюда и из теоремы о разделении нулей (см., например, [11–13]) будет следовать, что решения рассматриваемого уравнения имеют не более $k+1$ нулей на отрезке $[\alpha, \beta]$ при тех же значениях ε . Как и в [9], воспользуемся для этого вариантом критерия неосцилляции Валле–Пуссена [15].

Установим существование функции $z_0(s, \varepsilon)$, обладающей следующими двумя свойствами.

Во-первых, она непрерывна на отрезках $\Delta_1(\varepsilon)$ и $\Delta_2(\varepsilon)$, когда $k \geq 2$, и непрерывна лишь на полуинтервалах $[\alpha(\varepsilon|\dot{p}(0)|^{-1})^{-\frac{1}{2}}, s_1(\varepsilon))$ и $(s_2(\varepsilon), \beta(\varepsilon|\dot{p}(0)|^{-1})^{-\frac{1}{2}}]$ при $k = 1$, но в этом случае выполнены предельные равенства

$$\lim_{s \rightarrow s_1(\varepsilon)-0} z_0(s, \varepsilon) = \infty$$

и соответственно

$$\lim_{s \rightarrow s_2(\varepsilon)+0} z_0(s, \varepsilon) = -\infty.$$

Очевидно, что при $k = 1$ имеют место соотношения

$$s_1(\varepsilon) \equiv s_2(\varepsilon) \equiv 0, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

где ε_0 достаточно мало.

Во-вторых, функция $z_0(s, \varepsilon)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$D^* z_0(s, \varepsilon) \geq z_0^2(s, \varepsilon) + \frac{2q(s, \varepsilon) - \dot{p}(s, \varepsilon)}{2|\dot{p}(0)|} - \frac{p^2(s, \varepsilon)}{4\varepsilon|\dot{p}(0)|}. \quad (11)$$

В (11) положено

$$\begin{aligned} q(s, \varepsilon) &= q(\sqrt{\varepsilon|\dot{p}(0)|^{-1}}s), \\ p(s, \varepsilon) &= p(\sqrt{\varepsilon|\dot{p}(0)|^{-1}}s), \\ \dot{p}(s, \varepsilon) &= \dot{p}(\sqrt{\varepsilon|\dot{p}(0)|^{-1}}s), \end{aligned}$$

а $D^* z_0(s, \varepsilon)$ – правое верхнее производное число функции $z_0(s, \varepsilon)$.

Сначала введем одну вспомогательную функцию, которая потребуется нам при построении функции $z_0(s, \varepsilon)$.

Положим

$$u(b, s) = \begin{cases} 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b(b+2)\dots(b+2i-2)}{(2i)!} s^{2i}, & k \text{ четно,} \\ s + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(b+1)\dots(b+2i-1)}{(2i+1)!} s^{2i+1}, & k \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (12)$$

В (12) параметр b удовлетворяет неравенствам

$$-k < b < -k + \delta_0, \quad (13)$$

где положительная постоянная $\delta_0 < 1$, вообще говоря, достаточно мала. Ниже будет указано, насколько малой ее следует выбрать. Заметим, что функция (12) является решением дифференциального уравнения

$$\ddot{u} - s\dot{u} - bu = 0.$$

Тем самым, при условии (13) она имеет ровно k нулей на интервале $(-\infty, \infty)$. Обозначим через $s(b)$ правый крайний нуль функции $u(b, s)$. Отметим, что

$$s(b) \leq s_1,$$

если только выполнено неравенство

$$\delta_0 \leq k + a.$$

Этот факт следует из определения чисел $s(b)$ и s_1 , а также из теоремы сравнения (см., например, [11–13]). Далее, так как левее точки $-s(b)$ и правее точки $s(b)$ функция (12) не меняет знака, то для значений s , принадлежащих интервалам $(-\infty, -s(b))$ и $(s(b), \infty)$, определена непрерывная нечетная функция

$$v(b, s) = \frac{s}{2} - \frac{\dot{u}(b, s)}{u(b, s)}, \quad (14)$$

которая, очевидно, является решением дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{v} = v^2 + \frac{1}{2} - b - \frac{s^2}{4}. \quad (15)$$

Ниже будет установлено существование такого $\delta_1 > 0$, что при

$$-k < b \leq -k + \delta_1$$

функция $v(b, s)$ будет обращаться в нуль в некоторой точке $\bar{s}(b) \in (s(b), \infty)$, причем непрерывная функция $\bar{s}(b)$ параметра b будет удовлетворять предельному равенству

$$\lim_{b \rightarrow -k+0} \bar{s}(b) = \infty. \quad (16)$$

Если δ_0 в (13) определить так, чтобы имело место неравенство

$$\delta_0 \leq \min(\delta_1, k + a),$$

то построить функцию $z_0(s, \varepsilon)$ можно без труда.

Действительно, пусть выполняется (16). Функцию $z_0(s, \varepsilon)$ начнем строить следующим образом. Предварительно введем несколько обозначений. Выберем такое положительное σ_0 , чтобы отрезок $[-\sigma_0, \sigma_0]$ принадлежал интервалу (α, β) и чтобы

$$m_0 = \min |\dot{p}(t)| > 0, \quad -\sigma_0 \leq t \leq \sigma_0.$$

Затем фиксируем некоторое положительное число l_0 так, чтобы имело место неравенство

$$l_0 > \max[4q(t) - 2\dot{p}(t)], \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Далее, положим

$$r_0 = m_0^{-1} \sqrt{l_0 |\dot{p}(0)|}.$$

Из предельного равенства (10) вытекает существование такого $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполняются соотношения ($k \geq 2$)

$$\begin{aligned} s(b) &< s_1(\varepsilon) \leq s_2, \\ -s(b) &< s_2(\varepsilon) \geq -s_2, \end{aligned}$$

где $s_2 > 0$ не зависит от ε . Отметим, что при $k = 1$

$$s(b) = s_i(\varepsilon) \equiv 0, \quad i = 1, 2.$$

Используя (16), можно сделать вывод о существовании такого b , удовлетворяющего условию (13), и такого $r > \max(r_0, s_2)$, что $\bar{s}(b) = r \in (s_1(\varepsilon), \infty)$. Функцию $z_0(s, \varepsilon)$ будем считать теперь равной $v(b, s)$ при $|s| \leq r$ и $s \in \Delta_1(\varepsilon) \cup \Delta_2(\varepsilon)$, а для остальных значений s из $\Delta_1(\varepsilon) \cup \Delta_2(\varepsilon)$ определим ее равной тождественно нулю.

Покажем, что построенная так функция $z_0(s, \varepsilon)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству (11).

При $|s| \leq r$ ($s \in \Delta_1(\varepsilon) \cup \Delta_2(\varepsilon)$) неравенство (11) будет иметь место, если

$$a - b \geq \max \omega(s, \varepsilon),$$

т.е. при достаточно малых значениях ε . При $s \in \Delta_1(\varepsilon) \cup \Delta_2(\varepsilon)$ и

$$r \leq s \leq \sigma_0 \sqrt{\varepsilon^{-1} |\dot{p}(0)|}$$

неравенство (11) будет выполнено, если будет выполнено неравенство

$$|p(\sqrt{\varepsilon |\dot{p}(0)|^{-1}} s)| \geq \sqrt{l_0 \varepsilon},$$

которое, используя формулу Лагранжа, запишем в виде

$$|\dot{p}(\sqrt{\varepsilon |\dot{p}(0)|^{-1}} \theta s) \sqrt{\varepsilon |\dot{p}(0)|^{-1}} s| \geq \sqrt{l_0 \varepsilon},$$

где $\theta \in (0, 1)$. Последнее неравенство является следствием другого неравенства

$$m_0 r \geq \sqrt{l_0 |\dot{p}(0)|^{-1}},$$

которое верно в силу выбора чисел r_0 и r . При остальных значениях s , принадлежащих отрезкам $\Delta_1(\varepsilon)$ и $\Delta_2(\varepsilon)$, дифференциальное неравенство будет выполнено, если

$$\varepsilon l_0 \leq \min p^2(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \quad t \in (-\sigma_0, \sigma_0),$$

т.е. при достаточно малых ε .

Таким образом, нам осталось обосновать лишь предельное равенство (16). Соответствующее доказательство разобьем на четыре этапа, причем ограничимся случаем четного k , так как при k нечетном рассуждения аналогичны.

2. Обоснование предельного свойства функции $\bar{s}(b)$

1. Докажем сначала один общий факт, касающийся свойств решений дифференциального уравнения (15). Именно, покажем, что непрерывная на некотором интервале функция, являющаяся решением уравнения (15), не может иметь на этом интервале более двух нулей с учетом их кратностей. Поскольку в дальнейшем мы будем работать только с решением $v(b, s)$, то применительно к нему и обоснуем это утверждение.

Предположим противное, т.е. будем считать, что существует такое значение параметра b , удовлетворяющее условию (13), при котором непрерывная на некотором интервале функция $v(b, s)$ обращается в нуль не менее, чем в трех точках этого интервала. Пусть для определенности первые три нуля, о которых идет речь, находятся в точках

$$s^1 \leq s^2 \leq s^3. \quad (17)$$

Непосредственно из уравнения (15) видно, что кратность любого нуля, не совпадающего с началом координат, не может превышать двух, так как для второй производной функции $v(b, s)$ выполняется равенство

$$\ddot{v}(b, s^i) = -\frac{1}{2}s^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (18)$$

Из (18) следует, что в неравенствах (17) хотя бы в одном месте стоит знак строгого неравенства.

Обозначим через $s_j(b)$ ($j = 1, \dots, \frac{k}{2}$) все положительные нули функции $u(b, s)$, которые будем считать занумерованными в порядке возрастания. Равенство (14) определяет функцию $v(b, s)$ для неотрицательных значений s не только на интервале $(s(b), \infty)$, но и на интервалах $(s_j(b), s_{j+1}(b))$ ($j = 1, \dots, \frac{k}{2} - 1$) и полуинтервале $[0, s_1(b))$. Достаточно доказать сформулированное выше утверждение для этих интервалов. Обоснование того же факта для остальных интервалов, на которых функция $v(b, s)$ непрерывна, будет следовать из нечетности рассматриваемой функции.

Из определения чисел $s_j(b)$ и из формулы (14) вытекают предельные равенства

$$\lim_{s \rightarrow s_j(b)-0} v(b, s) = \infty, \quad (19)$$

$$\lim_{s \rightarrow s_j(b)+0} v(b, s) = -\infty. \quad (20)$$

Равенство (20) позволяет нам без потери общности считать, что выполняется неравенство

$$\dot{v}(b, s^1) \geq 1.$$

Если же $s^1 \in [0, s_1(b))$, то ясно, что $s^1 = 0$, причем s^1 является простым нулем функции $v(b, s)$. Используя эти замечания и соотношение (18), убеждаемся в справедливости неравенства

$$s^2 < s^3. \quad (21)$$

На основании формулы (15) и, вновь учитывая (18) и (20), заключаем теперь, что

$$\frac{1}{2} - b - \frac{1}{4}(s^1)^2 \geq 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} - b - \frac{1}{4}(s^2)^2 &\leq 0, \\ \frac{1}{2} - b - \frac{1}{4}(s^3)^2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Однако, в силу (21), последние два неравенства одновременно выполняться не могут. Мы пришли к противоречию. Тем самым показано, что на промежутках, на которых $v(b, s)$ непрерывна, не может существовать у нее более двух нулей с учетом их кратностей. Заметим, что полученный вывод справедлив и в случае, когда $b = -k$.

В заключение этого этапа отметим, что в силу предельного равенства (19) на интервалах $(s_j(b), s_{j+1}(b))$ ($j = 1, \dots, \frac{k}{2} - 1$) у функции $v(b, s)$ находится лишь один простой нуль. На полуинтервале $[0, s_1(b))$ эта функция единственный раз обращается в нуль в точке $s = 0$, причем этот нуль также простой.

2. Здесь будут изучены некоторые специальные свойства функции $v(b, s)$ при значении параметра b , равном $-k$.

Как было показано выше, четная функция $u(-k, s)$ обращается в нуль в k точках интервала $(-\infty, \infty)$. Обозначим через $s_j(-k)$ ($j = 1, \dots, \frac{k}{2}$) положительные нули этой функции, причем будем считать, что нумерация происходит в порядке возрастания. Формула (14) определяет непрерывную функцию $v(-k, s)$ на промежутках $[0, s_1(-k))$, $(s_1(-k), s_2(-k))$, $\dots$, $(s_{\frac{k}{2}-1}(-k), s_{\frac{k}{2}}(-k))$, $(s_{\frac{k}{2}}(-k), \infty)$. Основным содержанием этого этапа является доказательство того факта, что функция $v(-k, s)$ обращается в нуль в некоторой точке $\underline{s}(-k)$, принадлежащей интервалу $(s_{\frac{k}{2}}(-k), \infty)$, причем выполнено неравенство

$$v(-k, \underline{s}(-k)) > 0. \quad (22)$$

В дальнейшем нам будет удобно работать с формулой

$$u(b, s)v(b, s) = s \left[\frac{1}{2} - b + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b(b+2) \dots (b+2i-2)}{(2i)!} \left(\frac{1}{2} - \frac{2i+b}{2i+1} \right) s^{2i} \right], \quad (23)$$

которая при $b = -k$ принимает более простой вид

$$u(-k, s)v(-k, s) = s \left[\frac{1}{2} + k + \sum_{i=1}^{k/2} \frac{-k \dots (-k+2i-2)}{(2i)!} \left(\frac{1+k}{4i+2} \right) s^{2i} \right]. \quad (24)$$

Заметим теперь, что все нули многочлена степени $k+1$, стоящего в правой части формулы (24), совпадают с нулями функции $v(-k, s)$, причем других нулей у последней функции нет. Поскольку, как отмечалось выше, на каждом из промежутков $[0, s_1(-k))$, $[s_j(-k), s_{j+1}(-k))$ ($j = 1, \dots, \frac{k}{2} - 1$) функция $v(-k, s)$ имеет ровно один простой нуль, то для доказательства существования нуля на интервале $(s_{\frac{k}{2}}(-k), \infty)$ необходимо показать следующее: многочлен (24) имеет точно $\frac{k}{2}$ положительных нулей. Очевидно, что больше, чем $\frac{k}{2}$, их быть не может. Предположим противное, т.е. будем считать, что количество положительных нулей этого многочлена меньше, чем $\frac{k}{2}$. Тогда число их в точности равно $\frac{k}{2} - 1$. В точке $s = 0$ многочлен равен нулю, а его производная при этом положительна. Из сказанного следует предельное равенство

$$\lim_{s \rightarrow \infty} u(-k, s)v(-k, s) = \begin{cases} \infty, & \text{если } \frac{k}{4} \neq p, \quad (p = 1, 2, \dots), \\ -\infty, & \text{если } \frac{k}{4} = p, \quad (p = 1, 2, \dots). \end{cases} \quad (25)$$

С другой стороны, если воспользоваться формулой (24), то получим вместо равенства (25) не совпадающее с ним равенство

$$\lim_{s \rightarrow \infty} u(-k, s)v(-k, s) = \begin{cases} -\infty, & \text{если } \frac{k}{4} \neq p, \quad (p = 1, 2, \dots), \\ \infty, & \text{если } \frac{k}{4} = p, \quad (p = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Тем самым получено противоречие. Неравенство (22) для нуля $\underline{s}(-k) \in (s_{\frac{k}{2}}(-k), \infty)$ функции $v(-k, s)$, существование которого мы доказали, выполняется очевидным образом.

3. Покажем здесь, используя предыдущий результат, что существует такое $\delta_1 \in (0, 1)$, при котором для всех $b \in (-k, -k + \delta_1)$ функция $v(b, s)$ обращается в нуль в некоторой точке $\underline{s}(b) \in (s(b), \infty)$. Покажем также, что при этом выполняется неравенство

$$\dot{v}(b, \underline{s}(b)) > 0. \quad (26)$$

Введя новый параметр

$$\delta = k + b,$$

перепишем формулу (23) в более удобном для нас виде

$$u(b, s)v(b, s) = s \left[\frac{1}{2} + k + \sum_{i=1}^{k/2} \frac{-k(-k+2)\dots(-k+2i-2)}{(2i)!} \left(\frac{1}{2} - \frac{2i-k}{2i+1} \right) s^{2i} + f(s, \delta) \right], \quad (27)$$

где непрерывная функция $f(s, \delta)$ стремится к нулю при стремлении δ к нулю равномерно на каждом конечном промежутке изменения s . Фиксируем затем такое $s_0 > 0$, чтобы $\underline{s}(-k) \in (0, s_0)$. На отрезке $[0, s_0]$ правая часть формулы (27) равномерно сходится к (24). Отсюда следует, что при малых δ у функции $v(b, s)$ существует нуль $\underline{s}(b) \in (s(b), \infty)$, причем в силу (22) имеет место неравенство (26).

Отметим, что для непрерывной функции $\underline{s}(b)$ параметра $b \in (-k, -k + \delta_1)$ выполняется неравенство

$$\underline{s}(b) < \sqrt{2 + 4k}.$$

Этот вывод можно сделать на основании (15) и с помощью неравенства (26).

4. Покажем теперь, что при достаточной близости параметра b к числу $-k$ у функции $v(b, s)$ существует второй нуль $\bar{s}(b)$, удовлетворяющий предельному равенству (16).

При решении поставленной задачи мы вновь воспользуемся представлением (23), которое перепишем в несколько ином виде

$$u(b, s)v(b, s) = s \left[\frac{1}{2} - b + \sum_{i=1}^k \frac{b(b+2)\dots(b+2i-2)}{(2i)!} \left(\frac{1}{2} - \frac{2i+b}{2i+1} \right) s^{2i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{b(b+2)\dots(b+2i-2)}{(2i)!} \left(\frac{1}{2} - \frac{2i+b}{2i+1} \right) s^{2i} \right]. \quad (28)$$

Для значений b из интервала $(-k, -k + \delta_1)$ все слагаемые, объединенные под последним знаком суммирования в формуле (28), положительны, если k не кратно

четырем, и отрицательны – в противном случае. Отсюда следует, что выполняется равенство

$$\lim_{s \rightarrow \infty} u(b, s)v(b, s) = \begin{cases} \infty, & \text{если } \frac{k}{4} \neq p, \quad p = 1, 2, \dots, \\ -\infty, & \text{если } \frac{k}{4} = p, \quad p = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (29)$$

Из определения числа $\underline{s}(b)$ и из неравенства (26) вытекает, что функция $v(b, s)$ положительна в некоторой окрестности справа от точки $\underline{s}(b)$. Отсюда, из предельных равенств

$$\lim_{s \rightarrow \infty} u(b, s) = \begin{cases} -\infty, & \text{если } \frac{k}{4} \neq p, \quad p = 1, 2, \dots, \\ \infty, & \text{если } \frac{k}{4} = p, \quad p = 1, 2, \dots \end{cases}$$

и (29) следует, что функция $v(b, s)$ отрицательна при достаточно больших значениях s . Из этого вытекает существование у этой функции второго нуля $\bar{s}(b)$.

Равенство (16) доказывается теперь без труда. В самом деле, предположим противное: пусть существует такая последовательность $b_m \rightarrow -k + 0$, что выполняется равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{s}(b_m) = \bar{s}_0, \quad \bar{s}_0 \in (\underline{s}(-k), \infty).$$

Фиксируем тогда такое $\bar{s}_1 > 0$, чтобы

$$[\bar{s}_0 - \bar{s}_1, \bar{s}_0 + \bar{s}_1] \subset (\underline{s}(-k), \infty).$$

На отрезке $[\bar{s}_0 - \bar{s}_1, \bar{s}_0 + \bar{s}_1]$ правая часть (28) равномерно сходится к правой части (24) при стремлении b_m к числу $-k$. Следовательно, существует такое $\bar{\delta} > 0$, при котором для всех $b \in (-k, -k + \bar{\delta})$ функция $v(b, s)$ положительна на рассматриваемом отрезке. Тем самым мы пришли к противоречию. Предельное равенство (16) доказано.

3. Вспомогательное утверждение

1. Приведенное в этом параграфе утверждение, для обоснования которого мы будем использовать уже полученные результаты, будет играть основную роль при доказательстве теоремы 1.

Пусть функция $p(t)$ обращается в нуль в точках $t_1, \dots, t_n$ интервала (α, β) . Фиксируем такое $t_0 > 0$, чтобы принадлежащие интервалу (α, β) отрезки $[t_i - t_0, t_i + t_0]$ ($i = 1, \dots, n$) не пересекались между собой. Эти отрезки нам удобно обозначить через $\Delta_i(t_0)$ соответственно.

Предположим, что

$$-h_i = \frac{\nu_{0i}}{|\dot{p}(t_i)|} \neq j, \quad j = 0, 1, \dots; i = 1, \dots, n. \quad (30)$$

Отметим, что в силу леммы 1 наименьшее число нулей, которое могут иметь решения дифференциального уравнения (2) на каждом из отрезков $\Delta_i(t_0)$, не зависит от ε , если только ε достаточно мало. Наименьшее возможное число нулей на $\Delta_i(t_0)$ мы будем обозначать ниже через k_i . Очевидно, что наибольшее количество нулей у решений уравнения (2) на том же отрезке будет равно $k_i + 1$.

Лемма 2. Пусть выполнены неравенства (30). Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существует решение $x^*(t, \varepsilon)$ уравнения (2), имеющее ровно k_0 нулей на отрезке $[\alpha, \beta]$, где

$$k_0 = 1 + \sum_{i=1}^n k_i.$$

Любое другое решение при этом обращается в нуль не более k_0 раз.

Доказательство. Сначала покажем, что существует решение уравнения (2), которое имеет на отрезке $[\alpha, \beta]$ не менее k_0 нулей при малых ε . Для этого выберем такое $\varepsilon_0 > 0$, чтобы при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ на каждом из отрезков $\Delta_i(t_0)$ существовало решение, имеющее $k_i + 1$ нулей соответственно. Ясно, что тогда любое решение имеет не менее k_i нулей на каждом из рассматриваемых отрезков. Таким образом, если зафиксировать такое решение, которое имело бы $k_1 + 1$ нулей на отрезке $\Delta_1(t_0)$, то на каждом из остальных отрезков $\Delta_i(t_0)$ это же решение обращается в нуль не менее, чем k_i раз. Начальные условия такого решения, заданные в момент времени t_1 , можно взять не зависящими от ε . Отсюда следует, что наибольшее количество нулей, которое могут иметь решения уравнения (2) на отрезке $[\alpha, \beta]$, не меньше k_0 для достаточно малых ε .

Доказательство леммы будет завершено, если мы покажем, что существует решение уравнения (2), имеющее при малых ε не более $k_0 - 1$ нулей. Чтобы показать это, нам будет удобнее работать с дифференциальным уравнением

$$\varepsilon \ddot{x} + \left[\frac{2q(t) - \dot{p}(t)}{2} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon} \right] x = 0, \quad (31)$$

в которое преобразуется уравнение (2) с помощью замены (4) и переобозначения $y = x$.

Без ограничения общности можно считать, что нули функции $p(t)$ занумерованы в порядке возрастания. Введем в рассмотрение дифференциальное уравнение

$$\varepsilon \ddot{x} + \left[\frac{2q_0(t) - \tilde{p}_0(t)}{2} - \frac{p_0^2(t)}{4\varepsilon} \right] x = 0. \quad (32)$$

Здесь положено

$$p_0(t) = \begin{cases} a_0 > 0, & \text{если } t \in [\alpha, \beta] \text{ и } t \notin \bigcup_i \Delta_i(t_0), \\ a_i(t - t_i), & \text{если } t \in \Delta_i(t_0), \end{cases} \quad (33)$$

$$\tilde{p}_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [\alpha, \beta] \text{ и } t \notin \bigcup_i \Delta_i(t_0), \\ \dot{p}(t), & \text{если } t \in \Delta_i(t_0), \end{cases} \quad (34)$$

$$q_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [\alpha, \beta] \text{ и } t \notin \bigcup_i \Delta_i(t_0), \\ b_i, & \text{если } t \in \Delta_i(t_0). \end{cases} \quad (35)$$

В (33) – (35) индекс i принимает значения от 1 до n , а числа a_i ($i = 0, \dots, n$) и b_i ($i = 1, \dots, n$) считаем выбранными таким образом, чтобы имели место неравенства

$$n_i - 1 < \nu_i = \frac{2b_i - a_i - |a_i|}{2|a_i|} < n_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (36)$$

где n_i – целые числа. Докажем сначала лемму для дифференциального уравнения (32). Отметим, что это уравнение подобрано так, чтобы его можно было проинтегрировать в явном виде.

На заключительном этапе доказательства леммы будет показано, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, при котором для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполняется неравенство

$$\frac{2q(t) - \dot{p}(t)}{2} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon} \leq \frac{2q_0(t) - \tilde{p}_0(t)}{2} - \frac{p_0^2(t)}{4\varepsilon} \quad (37)$$

при $t \in [\alpha, \beta]$. При этом можно так определить числа a_i и b_i в формулах (33) – (35), чтобы числа ν_i были заключены между теми же целыми числами, что и $\nu_{0i}|\dot{p}(t_i)|^{-1}$. При таком определении чисел ν_i ($i = 1, \dots, n$) максимальное возможное количество нулей, которое могут иметь при малых ε решения уравнения (32), не превзойдет числа k_0 . Отсюда и из неравенства (37) будет следовать, что у решений уравнения (31) не может существовать при тех же ε нулей больше, чем k_0 . Последнее вытекает из теоремы сравнения (см., например, [11–13]).

Итак, основную роль при доказательстве леммы играет обоснование соответствующего утверждения для дифференциального уравнения (32). Приступим к изучению свойств решений этого уравнения.

2. Свойства решений уравнения (32). Первый этап.

Введем в рассмотрение функции, используя которые докажем на следующих этапах нужное утверждение.

На отрезке $\Delta_i(t_0)$ ($i = 1, \dots, n$) определим функции

$$x_{i1}(t, \varepsilon) = \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-\nu_i(-\nu_i + 2) \dots (-\nu_i + 2j - 2)|a_i|^j}{(2j)! \varepsilon^j} (t - t_i)^{2j} \right] \exp \left[-\frac{|a_i|}{4\varepsilon} (t - t_i)^2 \right]$$

и

$$x_{i2}(t, \varepsilon) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{|a_i|}} \exp \left[-\frac{|a_i|}{4\varepsilon} (t - t_i)^2 \right] \frac{\sqrt{|a_i|}}{\sqrt{\varepsilon}} (t - t_i) + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-\nu_i + 1) \dots (-\nu_i + 2j - 2)|a_i|^{\frac{2j+1}{2}}}{(2j+1)\varepsilon^{\frac{2j+1}{2}}} (t - t_i)^{2j+1}.$$

Далее положим

$$x_i(t, \varepsilon) = \begin{cases} x_{i1}(t, \varepsilon), & \text{если } n_i \geq 2 \text{ и } n_i \text{ четно,} \\ x_{i2}(t, \varepsilon), & \text{если } n_i \leq 0 \text{ или } n_i \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (38)$$

Числа n_i , входящие в (38), те же, что и в (36). Каждая из функций $x_i(t, \varepsilon)$ является решением дифференциального уравнения (32) на соответствующем промежутке. Как следует из доказательства леммы 1, функция $x_i(t, \varepsilon)$ обращается в нуль на отрезке $\Delta_i(t_0)$ ровно k_i раз при малых значениях ε . При этом количество нулей любого другого решения уравнения (32) на том же отрезке не меньше, чем k_i .

Рассмотрим отдельно функцию $x_1(t, \varepsilon)$, определенную на отрезке $\Delta_1(t_0)$. Эта функция будет играть особую роль в дальнейших рассуждениях. Нам будет удобно считать, что $x_1(t, \varepsilon)$ определена на всем отрезке $[\alpha, \beta]$. На значениях $t \notin \Delta_1(t_0)$ определим эту функцию так, чтобы она была решением уравнения (32). Обозначим полученную функцию через $x_0(t, \varepsilon)$. Для нас будет важно знать, как ведет себя

эта функция при значениях $t \notin \Delta_1(t_0)$. Поэтому нам будет удобно вводить новые обозначения этой функции, рассматриваемой на некоторых специальных отрезках.

Рассмотрим отрезки $[t_1 + t_0, t_2 - t_0]$ и $\Delta_2(t_0)$. На этих отрезках функция $x_0(t, \varepsilon)$ определяет соответственно две функции $x_{01}(t, \varepsilon)$ и $x_{02}(t, \varepsilon)$. Как оказывается, первую из этих функций можно выписать в явном виде, а вторую выразить через $x_{21}(t, \varepsilon)$ и $x_{22}(t, \varepsilon)$.

Имеем

$$x_{01}(t_1 + t_0, \varepsilon) = x_1(t_1 + t_0, \varepsilon), \quad \dot{x}_{01}(t_1 + t_0, \varepsilon) = \dot{x}_1(t_1 + t_0, \varepsilon).$$

Используя формулы, при помощи которых мы ввели $p_0(t)$, $\tilde{p}_0(t)$ и $q_0(t)$, получим, что

$$x_{01}(t^0, \varepsilon) = \frac{1}{2}x_1(t_1 + t_0, \varepsilon) \left(\exp \left[\frac{a_0}{2\varepsilon}(t_2 - t_1 - 2t_0) \right] + \exp \left[-\frac{a_0}{2\varepsilon}(t_2 - t_1 - 2t_0) \right] \right) + \\ + \frac{\varepsilon}{a_0} \dot{x}_1(t_1 + t_0, \varepsilon) \left(\exp \left[\frac{a_0}{2\varepsilon}(t_2 - t_1 - 2t_0) \right] - \exp \left[-\frac{a_0}{2\varepsilon}(t_2 - t_1 - 2t_0) \right] \right), \quad (39)$$

$$\dot{x}_{01}(t^0, \varepsilon) = \frac{1}{2}\dot{x}_1(t_1 + t_0, \varepsilon) \left(\exp \left[\frac{a_0}{2\varepsilon}(t_2 - t_1 - 2t_0) \right] + \exp \left[\frac{-a_0}{2\varepsilon(t_2 - t_1 - 2t_0)} \right] \right) + \\ + \frac{a_0}{4\varepsilon}x_1(t_1 - t_0, \varepsilon) \left(\exp \left[\frac{a_0}{2\varepsilon}(t_2 - t_1 - 2t_0) \right] - \exp \left[-\frac{a_0}{2\varepsilon}(t_2 - t_1 - 2t_0) \right] \right), \quad (40)$$

где положено $t^0 = t_2 - t_0$. Отметим, что

$$x_{21}(t, \varepsilon)\dot{x}_{22}(t, \varepsilon) - \dot{x}_{21}(t, \varepsilon)x_{22}(t, \varepsilon) \equiv 1, \quad t \in \Delta_2(t_0). \quad (41)$$

Поскольку

$$x_{02}(t^0, \varepsilon) = x_{01}(t^0, \varepsilon), \quad \dot{x}_{02}(t^0, \varepsilon) = \dot{x}_{01}(t^0, \varepsilon),$$

то из (41) получаем, что имеет место представление

$$x_{02}(t^0, \varepsilon) = [x_{01}(t^0, \varepsilon)\dot{x}_{22}(t^0, \varepsilon) - \dot{x}_{01}(t^0, \varepsilon)x_{22}(t^0, \varepsilon)] x_{21}(t, \varepsilon) + \\ + [\dot{x}_{01}(t^0, \varepsilon)x_{21}(t^0, \varepsilon) - x_{01}(t^0, \varepsilon)\dot{x}_{21}(t^0, \varepsilon)] x_{22}(t, \varepsilon). \quad (42)$$

Ниже нам потребуется еще функция

$$x^0(t, \varepsilon) = \left[\frac{\dot{x}_{22}(t^0, \varepsilon)}{x_{22}(t^0, \varepsilon)} - \frac{\dot{x}_{01}(t^0, \varepsilon)}{x_{01}(t^0, \varepsilon)} \right] \frac{x_{21}(t, \varepsilon)}{x_{21}(t^0, \varepsilon)} - \left[\frac{\dot{x}_{21}(t^0, \varepsilon)}{x_{21}(t^0, \varepsilon)} - \frac{\dot{x}_{01}(t^0, \varepsilon)}{x_{01}(t^0, \varepsilon)} \right] \frac{x_{22}(t, \varepsilon)}{x_{22}(t^0, \varepsilon)}. \quad (43)$$

Используя эту функцию, формулу (42) можно записать в виде

$$x_{02}(t, \varepsilon) = x_{01}(t^0, \varepsilon)x_{21}(t, \varepsilon)x_{22}(t, \varepsilon)x^0(t, \varepsilon),$$

из которого становится ясно, что наличие $k_1 + k_2$ нулей у функции $x_0(t, \varepsilon)$ на отрезке $[t_1 - t_0, t_2 + t_0]$ будет доказано, если мы покажем, что она не меняет знака на $[t_1 + t_0, t_2 - t_0]$, а функция $x^0(t, \varepsilon)$ обращается в нуль ровно k_2 раз на отрезке $[t_2 - t_0, t_2 + t_0]$.

3. Свойства решений уравнения (32). Второй этап.

На этом этапе будет доказано одно вспомогательное неравенство, при помощи которого мы ниже установим существование ровно k_2 нулей у функции $x^0(t, \varepsilon)$ на $[t_2 - t_0, t_2 + t_0]$.

Покажем, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, при котором для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполняется неравенство

$$\frac{\dot{x}_{01}(t^0, \varepsilon)}{x_{01}(t^0, \varepsilon)} - \max \left[\frac{\dot{x}_{21}(t^0, \varepsilon)}{x_{21}(t^0, \varepsilon)}, \frac{\dot{x}_{22}(t^0, \varepsilon)}{x_{22}(t^0, \varepsilon)} \right] > 0. \quad (44)$$

Прежде всего обоснуем соотношение

$$\frac{\dot{x}_{01}(t^0, \varepsilon)}{x_{01}(t^0, \varepsilon)} \geq \frac{c_0}{\varepsilon}, \quad (45)$$

где положительная постоянная c_0 не зависит от ε , когда ε мало. Для этого воспользуемся равенствами (39) и (40). Полагая

$$z(t, \varepsilon) = \frac{\dot{x}_1(t_1 + t_0, \varepsilon)}{x_1(t_1 + t_0, \varepsilon)},$$

левую часть неравенства (45) запишем в виде

$$\frac{\dot{x}_{01}(t^0, \varepsilon)}{x_{01}(t^0, \varepsilon)} = \frac{a_0}{2\varepsilon} \left[\frac{\left(\frac{2\varepsilon}{a_0} z(t_0, \varepsilon) + 1 \right) \exp \left[\frac{a_0}{\varepsilon} (t_2 - t_1) \right] + \left(\frac{2\varepsilon}{a_0} z(t_0, \varepsilon) - 1 \right)}{\left(\frac{2\varepsilon}{a_0} z(t_0, \varepsilon) + 1 \right) \exp \left[\frac{a_0}{\varepsilon} (t_2 - t_1) \right] + \left(1 - \frac{2\varepsilon}{a_0} z(t_0, \varepsilon) \right)} \right].$$

Отсюда вытекает, что для обоснования неравенства (45) достаточно показать, что при малых ε имеет место неравенство

$$\frac{2\varepsilon}{a_0} z(t_0, \varepsilon) + 1 \geq c > 0,$$

в котором постоянная c не зависит от ε . Мы покажем, что $z(t_0, \varepsilon)$ положительна при достаточно малых ε . Тем самым можно будет положить $c = 1$. Учитывая (38), получим, что

$$z(t, \varepsilon) = \frac{\dot{u}(t, \varepsilon)}{u(t, \varepsilon)} - \frac{(t - t_1)|a_1|}{2\varepsilon}.$$

Здесь положено

$$u_0(t, \varepsilon) = \begin{cases} u_1(t, \varepsilon), & \text{если } x_1(t, \varepsilon) \equiv x_{11}(t, \varepsilon), \\ u_2(t, \varepsilon), & \text{если } x_1(t, \varepsilon) \equiv x_{12}(t, \varepsilon), \end{cases}$$

где, в свою очередь, приняты следующие обозначения:

$$u_1(t - t_1, \varepsilon) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-\nu_1(-\nu_1 + 2) \dots (-\nu_1 + 2j - 2)|a_1|^j}{(2j)! \varepsilon^j} (t - t_1)^{2j},$$

$$u_2(t - t_1, \varepsilon) = \frac{\sqrt{|a_1|}}{\sqrt{\varepsilon}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-\nu_1 + 1) \dots (-\nu_1 + 2j - 1)|a_1|^{\frac{2j+1}{2}}}{(2j+1)! \varepsilon^{\frac{2j+1}{2}}} (t - t_1)^{2j+1}.$$

Воспользуемся теперь одним результатом, полученным при доказательстве леммы 1. Там нами была построена функция $v(b, s)$, которая определялась равенством (14), и было получено такое утверждение: при достаточной близости параметра b к числу $-k$ (k – целое неотрицательное) существует такое $s_0 > 0$, что при всех $s > s_0$ функция $v(b, s)$ отрицательна, а при $s < -s_0$ положительна. Заметим теперь, сравнивая формулу (14) с формулой, положенной в основу определения $z(t, \varepsilon)$, что

$$z(t_0, \varepsilon) = -v_0(-\nu_1, \frac{\sqrt{|a_1|}}{\sqrt{\varepsilon}}t_0),$$

где функция $v_0(b, s)$ обладает перечисленными выше для функции $v(b, s)$ свойствами. При этом, конечно, предполагается, что ν_1 достаточно близко слева к целому неотрицательному числу. Тем самым показано, что при малых ε функция $z(t_0, \varepsilon)$ положительна.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что числа ν_i ($i = 1, \dots, n$) достаточно близки к целым неотрицательным числам, не превосходя последних.

Для следующих рассуждений нам удобно будет использовать формулу

$$\frac{\dot{x}_{22}(t^0, \varepsilon)}{x_{22}(t^0, \varepsilon)} - \frac{\dot{x}_{21}(t^0, \varepsilon)}{x_{21}(t^0, \varepsilon)} = \frac{1}{x_{21}(t^0, \varepsilon)x_{22}(t^0, \varepsilon)}, \quad (46)$$

вытекающую из тождества (41). Отсюда и из определения функций $x_{21}(t, \varepsilon)$ и $x_{22}(t, \varepsilon)$ следует равенство

$$\max \left[\frac{\dot{x}_{21}(t^0, \varepsilon)}{x_{21}(t^0, \varepsilon)}, \frac{\dot{x}_{22}(t^0, \varepsilon)}{x_{22}(t^0, \varepsilon)} \right] = \begin{cases} \frac{\dot{x}_{21}(t^0, \varepsilon)}{x_{21}(t^0, \varepsilon)}, & n_2 \text{ четно или } n_2 \leq 0, \\ \frac{\dot{x}_{22}(t^0, \varepsilon)}{x_{22}(t^0, \varepsilon)}, & n_2 \text{ нечетно и } n_2 > 0. \end{cases} \quad (47)$$

Обозначим левую часть последнего равенства через $u(t^0, \varepsilon)$. Для завершения доказательства неравенства (44) достаточно установить, что при малых ε функция $u(t^0, \varepsilon)$ отрицательна. На основании (47) в этом нетрудно убедиться, если заметить, что

$$u(t^0, \varepsilon) = -v_1(-\nu_2, \frac{\sqrt{|a_2|}}{\sqrt{\varepsilon}}t_0),$$

где $v_1(b, s)$ – некоторая функция, по отношению к которой справедливы выводы, полученные для ранее изучавшейся функции $v(b, s)$. Поскольку, как мы уже упоминали на этом этапе, $v(b, s)$ положительна при $s < -s_0$ (s_0 – некоторое фиксированное число), то, очевидно, $v_1(-\nu_2, -\frac{\sqrt{|a_2|}}{\sqrt{\varepsilon}}t_0) > 0$, когда ε достаточно мало. Таким образом, неравенство (44) доказано.

4. Свойства решений уравнения (32). Третий этап.

Здесь мы покажем, что функция $x_0(t, \varepsilon)$ обращается в нуль ровно k_1 раз на отрезке $[\alpha, t_2 - t_0]$, когда ε достаточно мало. Этот результат будет следовать из того, что функция $x_0(t, \varepsilon)$ не обращается в нуль на отрезках $[\alpha, t_1 - t_0]$ и $[t_1 + t_2, t_2 - t_0]$, а также из того, что она имеет k_1 нулей на промежутке $\Delta_1(t_0)$. Для обоснования сформулированного утверждения воспользуемся той частью доказательства леммы 1, в которой показывается, что решения уравнения (2) не осциллируют на определенных выше отрезках $\Delta_1(t_0)$ и $\Delta_2(t_0)$. Это же доказательство целиком, без изменений,

переносится на рассматриваемый здесь случай, только роль отрезков $\Delta_1(t_0)$ и $\Delta_2(t_0)$ будут теперь играть соответственно отрезки

$$\Delta_1^*(\varepsilon) = \left[\alpha (\varepsilon |\dot{p}(t_1)|^{-1})^{-\frac{1}{2}}, (t_1 - \tilde{t}(\varepsilon)) (\varepsilon |\dot{p}(t_1)|^{-1})^{-\frac{1}{2}} \right], \quad (48)$$

$$\Delta_1^*(\varepsilon) = \left[(t_1 + \tilde{t}(\varepsilon)) (\varepsilon |\dot{p}(t_1)|^{-1})^{-\frac{1}{2}}, (t_2 - t_0) (\varepsilon |\dot{p}(t_1)|^{-1})^{-\frac{1}{2}} \right],$$

где через $t_1 - \tilde{t}$ обозначен крайний левый нуль функции $x_0(t, \varepsilon)$ на отрезке $\Delta_1(t^0)$, а через $t_1 + \tilde{t}$ — соответственно крайний правый нуль этой функции. Таким образом, убеждаемся в том, что $x_0(t, \varepsilon)$ не имеет нулей на отрезках $[\alpha, t_1 + t_0]$ и $[t_1 + t_0, t_2 - t_0]$, если ε достаточно мало.

5. Свойства решений уравнения (32). Четвертый этап.

Этот и последующий этапы будут посвящены обоснованию того факта, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, для которого при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решение $x^0(t, \varepsilon)$ дифференциального уравнения (32) на отрезке $\Delta_2(t^0)$ имеет ровно k_2 нулей.

Здесь будет разобран случай, когда n_2 , входящее в одно из неравенств (36), меньше или равно нулю. Отметим, что при этом функция $x_{21}(t, \varepsilon)$ ($x_{21}(t, \varepsilon) \equiv x_2(t, \varepsilon)$) положительна на отрезке $\Delta_2(t^0)$, а функция $x_{22}(t, \varepsilon)$ один раз обращается в нуль в точке t_2 при всех положительных ε . Как следует из определения $x_{22}(t, \varepsilon)$, производная этой функции в точке t_2 положительна. Производная же функции $x_{21}(t, \varepsilon)$ в точке t_2 равна нулю. Эти простые замечания будут использованы в дальнейшем при выводе нужных неравенств.

Для доказательства сформулированного выше утверждения достаточно показать, что в точках t^0 и t_2 функция $x^0(t, \varepsilon)$ имеет один и тот же знак, причем выполняется неравенство

$$x^0(t_2, \varepsilon) \dot{x}^0(t_2, \varepsilon) > 0. \quad (49)$$

Действительно, из сказанного следует, что на отрезке $[t^0, t_2]$ у рассматриваемой функции одного нуля быть не может, а наличие большего числа нулей исключается, благодаря теореме о разделении нулей решения уравнения (32) (см., например, [11–13]). На промежутке $[t_2, t_2 + t_0]$ функция $x^0(t, \varepsilon)$ в нуль обратиться не может в силу того, что имеет место представление

$$x^0(t, \varepsilon) = x^0(t_2, \varepsilon) x_{21}(t, \varepsilon) + x^0(t_2, \varepsilon) x_{22}(t, \varepsilon),$$

в котором оба слагаемые, стоящие в правой части, имеют один и тот же знак на этом отрезке.

Проведем обоснование отмеченных неравенств. Соотношение

$$x^0(t^0, \varepsilon) x^0(t_2, \varepsilon) > 0$$

следует из формулы

$$x^0(t^0, \varepsilon) x^0(t_2, \varepsilon) = \left[\frac{\dot{x}_{22}(t^0, \varepsilon)}{x_{22}(t^0, \varepsilon)} - \frac{\dot{x}_{21}(t^0, \varepsilon)}{x_{21}(t^0, \varepsilon)} \right] \left[\frac{\dot{x}_{22}(t^0, \varepsilon)}{x_{22}(t^0, \varepsilon)} - \frac{\dot{x}_{01}(t^0, \varepsilon)}{x_{01}(t^0, \varepsilon)} \right] \frac{x_{21}(t_2, \varepsilon)}{x_{21}(t^0, \varepsilon)},$$

которая имеет место на основании (43). При этом мы учитываем, что выполняется неравенство (44) и равенство (46), в котором правая часть отрицательна при малых ε . Неравенство (49), в свою очередь, следует из представления

$$x^0(t_2, \varepsilon) \dot{x}^0(t_2, \varepsilon) = - \left[\frac{\dot{x}_{22}(t^0, \varepsilon)}{x_{22}(t^0, \varepsilon)} - \frac{\dot{x}_{01}(t^0, \varepsilon)}{x_{01}(t^0, \varepsilon)} \right] \left[\frac{\dot{x}_{21}(t^0, \varepsilon)}{x_{21}(t^0, \varepsilon)} - \frac{\dot{x}_{01}(t^0, \varepsilon)}{x_{01}(t^0, \varepsilon)} \right] \frac{1}{x_{21}(t^0, \varepsilon) x_{22}(t^0, \varepsilon)},$$

вытекающего из (43), и упоминающихся свойств входящих туда функций. Таким образом, в случае, когда $n_2 \leq 0$, мы доказали, что на отрезке $[\alpha, t_2 + t_0]$ функция $x_0(t, \varepsilon)$ имеет ровно $k_1 + k_2$ нулей.

На этом же этапе установим еще один факт. Обозначим через $x_2^*(t, \varepsilon)$ решение дифференциального уравнения (32), совпадающее на отрезке $\Delta_2(t_0)$ с функцией $x_{21}(t, \varepsilon)$. Предположим, что это решение первый раз на отрезке $[t_2 + t_0, \beta]$ обращается в нуль в некоторой точке $t^*(\varepsilon)$. Тогда выполняется неравенство

$$t_1(\varepsilon) \geq t^*(\varepsilon), \quad (50)$$

где через $t_1(\varepsilon)$ обозначен наименьший нуль, если таковой вообще существует, функции $x_0(t, \varepsilon)$ на отрезке $[t_2 - t_0, \beta]$. Если же на рассматриваемом отрезке функция $x_2^*(t, \varepsilon)$ в нуль не обращается, тогда и функция $x_0(t, \varepsilon)$ сохраняет знак на том же отрезке.

Для обоснования этого факта введем в рассмотрение функции

$$z_0(t, \varepsilon) = -\frac{\dot{x}_0(t, \varepsilon)}{x_0(t, \varepsilon)}, \quad (t \in [t_2 - t_0, \beta])$$

и соответственно

$$z^*(t, \varepsilon) = -\frac{\dot{x}_2^*(t, \varepsilon)}{x_2^*(t, \varepsilon)}, \quad (t \in [t_2 - t_0, \beta]).$$

Напомним, что везде на этом этапе предполагается выполненным неравенство $n_2 \leq 0$. Заметим, далее, что обе функции $z_0(t, \varepsilon)$ и $z^*(t, \varepsilon)$ являются решениями на отрезке $[t_2 - t_0, \beta]$ дифференциального уравнения Риккати

$$\varepsilon \dot{z} = \varepsilon z^2 + \frac{2q_0(t) - \tilde{p}_0(t)}{2} - \frac{\tilde{p}_0(t)}{4\varepsilon}. \quad (51)$$

Из неравенства (49) вытекает соотношение

$$z_0(t_2, \varepsilon) < 0,$$

а из определения функций $x_2^*(t, \varepsilon)$ и $z^*(t, \varepsilon)$ следует, что в точке t_2 последняя функция обращается в нуль. Отсюда и в силу теоремы о монотонной зависимости от начальных условий решений уравнения (51) (см., например, [11–13]) делаем следующий вывод:

$$z_0(t, \varepsilon) < z^*(t, \varepsilon)$$

при $t \in [t_2 - t_0, t^*(\varepsilon)]$ или при $t \in [t_2 - t_0, \beta]$, если $x_2^*(t, \varepsilon)$ не обращается в нуль. Из последнего неравенства следует обоснование соотношения (50).

6. Свойства решений уравнения (32). Пятый этап.

Покажем, что при малых ε функция $x_0(t, \varepsilon)$ ровно k_2 раз обращается в нуль на отрезке $\Delta_2(t_0)$. На этом этапе мы рассматриваем только случай, когда соответствующее из неравенств (36) выполняется для положительного n_2 .

Обозначим через $t_{21}(\varepsilon)$ и $t_{22}(\varepsilon)$ крайние левые нули функций $x_{21}(t, \varepsilon)$ и $x_{22}(t, \varepsilon)$ на промежутке $\Delta_2(t_0)$. Для доказательства сформулированного утверждения можно ограничиться лишь обоснованием неравенства

$$t_1(\varepsilon) \geq \max[t_{21}(\varepsilon), t_{22}(\varepsilon)]. \quad (52)$$

Отметим, что все функции параметра ε , входящие в (52), при положительном n_2 заведомо существуют, если только ε достаточно мало. Существование еще ровно $k_2 - 1$ нулей у функции $x_0(t, \varepsilon)$ на рассматриваемом отрезке будет гарантировано тем, что одна из функций $x_{21}(t, \varepsilon)$ или $x_{22}(t, \varepsilon)$ имеет $k_2 + 1$ нулей, а другая — k_2 , а также теоремой о разделении нулей решений уравнения (32) (см., например, [11–13]).

Обоснование неравенства (52) будет завершено, если мы покажем, что в точках t^0 , $t_{21}(\varepsilon)$ и $t_{22}(\varepsilon)$ функция $x^0(t, \varepsilon)$ имеет один и тот же знак. Выпишем значения этой функции в точках:

$$x^0(t^0, \varepsilon) = \left[\frac{\dot{x}_{22}(t^0, \varepsilon)}{x_{22}(t^0, \varepsilon)} - \frac{\dot{x}_{21}(t^0, \varepsilon)}{x_{21}(t^0, \varepsilon)} \right] = \frac{1}{x_{21}(t^0, \varepsilon)x_{22}(t^0, \varepsilon)},$$

$$x^0(t_{21}(\varepsilon), \varepsilon) = - \left[\frac{\dot{x}_{21}(t^0, \varepsilon)}{x_{21}(t^0, \varepsilon)} - \frac{\dot{x}_{01}(t^0, \varepsilon)}{x_{01}(t^0, \varepsilon)} \right] \frac{x_{22}(t_{21}(\varepsilon), \varepsilon)}{x_{22}(t^0, \varepsilon)}$$

и наконец

$$x^0(t_{22}(\varepsilon), \varepsilon) = \left[\frac{\dot{x}_{22}(t^0, \varepsilon)}{x_{22}(t^0, \varepsilon)} - \frac{\dot{x}_{01}(t^0, \varepsilon)}{x_{01}(t^0, \varepsilon)} \right] \frac{x_{21}(t_{22}(\varepsilon), \varepsilon)}{x_{21}(t^0, \varepsilon)}.$$

Отсюда доказательство того факта, что знак левых частей последних трех равенств совпадает, завершается ссылкой на обоснованное выше неравенство (44) и соотношения

$$\begin{aligned} x_{21}(t^0, \varepsilon)x_{22}(t^0, \varepsilon) & \begin{cases} > 0, & \text{если } n_2 \text{ нечетно,} \\ < 0, & \text{если } n_2 \text{ четно,} \end{cases} \\ \frac{x_{22}(t_{21}(\varepsilon), \varepsilon)}{x_{22}(t^0, \varepsilon)} & \begin{cases} > 0, & \text{если } n_2 \text{ нечетно,} \\ < 0, & \text{если } n_2 \text{ четно,} \end{cases} \\ \frac{x_{21}(t_{22}(\varepsilon), \varepsilon)}{x_{21}(t^0, \varepsilon)} & \begin{cases} < 0, & \text{если } n_2 \text{ нечетно,} \\ > 0, & \text{если } n_2 \text{ четно,} \end{cases} \end{aligned}$$

которые выполняются для малых ε .

Суммируя сказанное на последних трех этапах, приходим к выводу, что при достаточно малых ε функция $x_0(t, \varepsilon)$ обращается в нуль на отрезке $[\alpha, t_2 + t_0]$ ровно $k_1 + k_2$ раз.

7. Свойства решений уравнения (32). Шестой этап.

Завершим доказательство леммы для дифференциального уравнения (32).

Обозначим через $x_i^*(t, \varepsilon)$ ($i = 1, \dots, n$) решение уравнения (32), которое совпадает соответственно с функциями $x_i(t, \varepsilon)$ на отрезке $\Delta_i(t_0)$.

Как мы уже показали, функция $x_1^*(t, \varepsilon)$ ($x_1^*(t, \varepsilon) \equiv x_0(t, \varepsilon)$) на отрезке $[\alpha, t_2 + t_0]$ имеет при малых ε ровно $k_1 + k_2$ нулей. При этом выполняется неравенство (50), если $n_2 \leq 0$, и имеет место (52) в противном случае. Последнее обстоятельство сыграет основную роль в дальнейших рассуждениях.

Так же, как и при обосновании соответствующих свойств функции $x_1^*(t, \varepsilon)$, можно доказать существование такого $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon)$ функция $x_2^*(t, \varepsilon)$ имеет ровно $k_2 + k_3$ нулей на отрезке $[t_2 - t_0, t_3 + t_0]$. В этом случае будут справедливы неравенства

$$t_2(\varepsilon) \geq \max(t_{31}(\varepsilon), t_{32}(\varepsilon)), \quad \text{если } n_3 > 0,$$

$$t_2(\varepsilon) \geq t_3^*(\varepsilon), \quad \text{если } n_3 \leq 0.$$

Здесь через $t_2(\varepsilon)$, $t_{31}(\varepsilon)$ и $t_{32}(\varepsilon)$ обозначены крайние левые нули функций $x_2^*(t, \varepsilon)$, $x_{31}(t, \varepsilon)$, $x_{32}(t, \varepsilon)$ на отрезке $[t_3 - t_0, t_3 + t_0]$, а точка $t_3^*(\varepsilon)$ такова, что в ней функция $x_3^*(t, \varepsilon)$ обращается в нуль первый раз на отрезке $[t_3 - t_0, \beta]$ в случае, когда $n_3 \leq 0$. Если же в последнем случае $x_3^*(t, \varepsilon)$ не меняет знак на промежутке $[t_3 - t_0, \beta]$, то на этом отрезке нет нулей и у функции $x_2^*(t, \varepsilon)$. Поскольку нули всех решений разделены, то из (50) и (52) следует, что функция $x_1^*(t, \varepsilon)$ имеет при достаточно малых ε ровно $k_1 + k_2 + k_3$ нулей на отрезке $[\alpha, t_3 + t_0]$.

Рассуждая дальше аналогично, приходим к тому, что функция $x_1^*(t, \varepsilon)$ имеет ровно $k_0 - 1$ нулей на отрезке $[\alpha, \beta]$, когда ε достаточно мало. Отсюда вытекает, что наибольшее число нулей, которое могут иметь решения рассматриваемого уравнения, не превосходит k_0 . Тем самым доказательство леммы для дифференциального уравнения (32) полностью завершено.

8. Обоснование неравенства (37).

Последнее, что нам осталось установить для обоснования леммы в общем случае, является неравенство (37).

Фиксируем такое $t_0 > 0$, чтобы на отрезках $\Delta_i(t_0)$ ($i = 1, \dots, n$) выполнялось неравенство

$$\max_{t \in \Delta_i(t_0)} \left[\frac{2q(t) - \dot{p}(t)}{2} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon} \right] \leq \frac{2[q(t_i) + g_i] - [\dot{p}(t_i) + d_i]}{2} - \frac{[\dot{p}(t_i) + d_i]^2(t - t_i)}{4\varepsilon}. \quad (53)$$

В (53) числа g_i и d_i ($i = 1, \dots, n$) выбраны так, что имеют место неравенства

$$\frac{|d_i|}{2} < \frac{d_i}{|\dot{p}(t_i)|} \dot{p}(t_i) \quad (54)$$

и

$$2g_i - d_i > 0. \quad (55)$$

Ясно, что для каждого d_i и g_i ($i = 1, \dots, n$), обладающих отмеченными в (54) и (55) свойствами, можно указать такое число $t_0 > 0$, не зависящее от ε , чтобы выполнялось неравенство (53).

Положим затем

$$\begin{aligned} a_i &= \dot{p}(t_i) + d_i, & i &= 1, \dots, n, \\ b_i &= q(t_i) + g_i, & i &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Тем самым определены числа ν_i ($i = 1, \dots, n$). Отметим, наконец, что за счет подходящего выбора чисел d_i и g_i можно сделать так, чтобы выполнялись соотношения

$$\nu_i - 1 < \frac{\nu_{01}}{|\dot{p}(t_i)|} < \nu_i < n_i,$$

когда целые числа n_i положительны и

$$\frac{\nu_{0i}}{|\dot{p}(t_i)|} < \nu_i < 0$$

при неположительных n_i . При этом можно добиваться какой угодно близости ν_i к числу, занимающему крайнее правое место в соответствующем из последних двух неравенств. Это замечание важно, поскольку на примере уравнения (32) лемма доказана лишь в предположении, что ν_i достаточно близки к целым неотрицательным числам.

Нам осталось определить в (33) – (35) только число a_0 . Введем его следующим образом:

$$a_0 = \min |p(t)| - d_0, \quad (t \in [\alpha, \beta], \quad t \notin \bigcup_i \Delta_i(t_0)),$$

где положительное число d_0 выбрано так, чтобы выполнялось неравенство

$$a_0 > 0.$$

Нетрудно показать, что при достаточно малых ε неравенство (37) имеет место и для всех $t \in [\alpha, \beta]$, $t \notin \bigcup_i \Delta_i(t_0)$. Тем самым неравенство (37) доказано. Отсюда следует завершение обоснования леммы в общем случае.

4. Обоснование теоремы 1

Покажем сначала, что для каждого j ($j = 1, 2, \dots$) собственное число $\lambda_j(\varepsilon)$ ограничено при стремлении ε к нулю. Предположим противное, т.е. будем считать, что существует такой номер j и такая последовательность $\varepsilon_m \rightarrow 0$, на которой выполняется одно из следующих равенств:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_j(\varepsilon_m) = \infty \quad (56)$$

или

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_j(\varepsilon_m) = -\infty. \quad (57)$$

Пусть, например, имеет место (56). Введем в рассмотрение дифференциальное уравнение

$$\varepsilon_m \ddot{x} + p(t)\dot{x} + [q(t) - \lambda_j(\varepsilon_m)]x = 0. \quad (58)$$

С помощью замены (4) это уравнение преобразуется в уравнение

$$\varepsilon_m \ddot{y} + \left[\frac{2q(t) - 2\lambda_j(\varepsilon_m) - \dot{p}(t)}{2} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon_m} \right] y = 0. \quad (59)$$

Из последнего утверждения видно, что при всех m , для которых

$$\lambda_j(\varepsilon_m) > \max_{t \in [\alpha, \beta]} \left[q(t) - \frac{\dot{p}(t)}{2} \right],$$

решения (59) не осциллируют на отрезке $[\alpha, \beta]$. Но в то же время, как следует из определения $\lambda_j(\varepsilon)$, у уравнения (59) должно существовать решение

$$y_j(t, \varepsilon_m) = x_j(t, \varepsilon_m) \exp \left[\frac{1}{2\varepsilon_m} \int_{\alpha}^t p(\tau) d\tau \right],$$

имеющее на рассматриваемом отрезке не менее двух нулей. Таким образом, мы пришли к противоречию. Отсюда вытекает, что предельное равенство (56) не имеет места.

Предположим затем, что выполняется равенство (57). Из доказательства предыдущей леммы следует, что при этом справедливо следующее утверждение: для любого целого $k > 2$ существует такое $\varepsilon_0 > 0$, при котором для всех $\varepsilon_m \in (0, \varepsilon_0)$ найдется решение уравнения (59), имеющее не менее k нулей. Тем самым показано, что число нулей, которое могут иметь решения этого уравнения на отрезке $[\alpha, \beta]$, возрастает до бесконечности при стремлении ε к нулю. Собственная функция $x_j(t, \varepsilon)$, а значит, и $y_j(t, \varepsilon)$, имеет при всех положительных ε ровно $j + 1$ нулей на $[\alpha, \beta]$. Отсюда приходим к противоречию. Следовательно, равенство (57) тоже не имеет места.

Завершение доказательства теоремы 1 проведем, вновь рассуждая от противного. Предположим, что существует такой номер j и такая последовательность $\varepsilon_m \rightarrow 0$, для которой справедливо равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_j(\varepsilon_m) = \lambda_j + \delta,$$

причем $\delta \neq 0$. Рассмотрим отдельно случаи, когда

$$\delta > 0 \tag{60}$$

и когда

$$\delta < 0. \tag{61}$$

Сначала разберем случай (60). Введем в рассмотрение дифференциальное уравнение

$$\varepsilon_m \ddot{x} + p(t) \dot{x} + \left[q(t) - \left(\lambda_j + \frac{\delta}{2} \right) \right] x = 0. \tag{62}$$

Из определения числа λ_j и из утверждений леммы 2 следует, что при малых ε_m наибольшее число нулей, которое могут иметь решения уравнения (62) на отрезке $[\alpha, \beta]$, не превосходит j . Очевидно, такой же вывод справедлив и для решений дифференциального уравнения (58), когда ε_m достаточно мало. Однако, собственная функция $x_j(t, \varepsilon)$, как мы уже отмечали, имеет на том же отрезке точно $j + 1$ нулей. Получено противоречие. Тем самым показано, что неравенство (60) выполняться не может.

Предположим тогда, что выполняется соотношение (61). В этом случае дифференциальное уравнение (62) имеет решение, которое обращается в нуль на интервале (α, β) не менее $j + 1$ раз, если ε_m достаточно мало. То же можно сказать и об уравнении (58). Тем не менее, функция $x_j(t, \varepsilon)$ только в $j - 1$ точках интервала (α, β) принимает значение, равное нулю. Доказательство того факта, что неравенство (61) не имеет места, получим, если вновь воспользуемся теоремой о разделении нулей решений уравнения (58). Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

5. Обобщение результата

В этом пункте мы сформулируем сначала несколько более общее утверждение, обоснование которого будет следовать из доказательства леммы 2 и теоремы 1.

Как и ранее, обозначим через $t_1, \dots, t_n$ все нули функции $p(t)$, принадлежащие интервалу (α, β) . Основное отличие настоящего пункта от разобранного выше случая состоит в том, что здесь мы допускаем существование у этой функции нулей в одном или обоих концах отрезка $[\alpha, \beta]$.

Предположим, что $p(\alpha) = 0$. Величины ν_i^α ($i = 0, 1, \dots$) введем по следующему правилу:

$$\nu_i^\alpha = \left[q(\alpha) - \frac{|\dot{p}(\alpha)| + \dot{p}(\alpha)}{2} \right] - |\dot{p}(\alpha)|(1 + 2i).$$

В случае, когда $p(\beta) = 0$, положим

$$\nu_i^\beta = \left[q(\beta) - \frac{|\dot{p}(\beta)| + \dot{p}(\beta)}{2} \right] - |\dot{p}(\beta)|(1 + 2i).$$

Наконец, числа ν_{ik} ($i = 0, 1, \dots; k = 1, \dots, n$) определим, как и ранее, формулами (1). Затем все числа вида $\nu_i^\alpha, \nu_i^\beta$, если они определены, а также величины ν_{ik} ($i = 0, 1, \dots; k = 1, \dots, n$) расположим в ряд в порядке убывания. Через λ_j ($j = 1, 2, \dots$) обозначим соответственно j -ый член этого ряда. Тогда имеют место предельные равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_j(\varepsilon) = \lambda_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Выше мы всегда предполагали, что все нули функции $p(t)$ простые. Пределы собственных значений рассматриваемой краевой задачи можно вычислить и тогда, когда у функции $p(t)$ есть кратные нули. Покажем, как это можно сделать. Предположим, что функция $p(t)$ имеет лишь конечное число $t_1, \dots, t_n$ простых нулей на отрезке $[\alpha, \beta]$ и, кроме того, эта функция обращается в нуль вместе со своей производной на некотором множестве точек $M \subset [\alpha, \beta]$.

Положим

$$\nu_0 = \max_{t \in M} q(t), \quad t \in M.$$

Будем затем рассматривать только те из чисел ν_{ik} ($i = 0, 1, \dots; k = 1, \dots, n$), для которых выполнено неравенство

$$\nu_0 < \nu_{ik}.$$

Отметим, что при $t_k \in (\alpha, \beta)$ соответствующие ν_{ik} ($i = 0, 1, \dots$) определяются формулой (1), а в случае, когда t_k совпадает с одним из концов отрезка $[\alpha, \beta]$, считаем, что для каждого номера $i = 0, 1, \dots$

$$\nu_{ik} = \begin{cases} \nu_i^\alpha, & \text{если } t_k = \alpha, \\ \nu_i^\beta, & \text{если } t_k = \beta. \end{cases}$$

Расположим теперь такие числа ν_{ik} в ряд в порядке убывания. Очевидно, число членов этого ряда конечно. Пусть оно равно N . Обозначим через λ_j ($j = 1, \dots, N$) соответственно j -ый член полученного ряда.

Теорема 2. *Имеют место следующие предельные равенства:*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_j(\varepsilon) = \lambda_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_j(\varepsilon) = \nu_0, \quad j = N + 1, N + 2, \dots$$

Сначала докажем ряд вспомогательных утверждений. Рассмотрим дифференциальное уравнение (2). Пусть функция $p(t)$ обращается в нуль только в точках некоторого множества $M_0 \subset [\alpha, \beta]$, причем все нули кратные. Тогда имеют место следующие утверждения, которые будут играть основную роль при доказательстве теоремы 2.

Лемма 3. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, при котором для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решения уравнения (2) не осциллируют на отрезке $[\alpha, \beta]$, если

$$\nu_0 = \max q(t) < 0, \quad t \in M_0.$$

Лемма 4. Пусть $\nu_0 > 0$. Тогда для любого натурального k существует такое $\varepsilon_k > 0$, при котором для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_k)$ найдется решение уравнения (2), имеющее не менее k нулей на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Доказательство. Сначала докажем лемму 3. Ясно, что достаточно доказать неосцилляцию решений уравнения (31), получающегося из (2) с помощью замены (4). Фиксируем такое замкнутое множество $M_1 \subset [\alpha, \beta]$, чтобы выполнялось неравенство

$$\max \left[q(t) - \frac{1}{2} \dot{p}(t) \right] < 0, \quad t \in M_1, \quad (63)$$

причем $M_1 \supset M_0$ выберем так, чтобы каждая точка множества M_0 , исключая, может быть, лишь точки α и β , являлась внутренней точкой M_1 . Отметим, что этого всегда можно достигнуть, поскольку $q(t) \leq \nu_0 < 0$ и $\dot{p}(t) = 0$ при $t \in M_0$. Лемма 3 будет доказана, если мы покажем, что функция $[q(t) - \frac{1}{2} \dot{p}(t) - \frac{1}{4\varepsilon} p^2(t)]$ отрицательна, когда ε мало. Для этого достаточно установить, что наряду с (63) имеет место неравенство

$$\max \left[4\varepsilon(q(t) - \frac{1}{2} \dot{p}(t)) - p^2(t) \right] < 0, \quad t \in [\alpha, \beta], t \notin M_1.$$

Последнее неравенство выполняется при достаточно малых ε очевидным образом. Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Пусть для некоторой точки $t_0 \in M_0$ имеем

$$q(t_0) = \nu_0 > 0.$$

Без потери общности можно считать, что $t_0 = 0$. В уравнении (31) произведем замену времени

$$t = \sqrt{\varepsilon} \tau.$$

Тогда это уравнение можно представить в виде

$$\ddot{x} + [\nu_0 + \omega(\tau, \varepsilon)]x = 0, \quad (64)$$

где непрерывная функция $\omega(\tau, \varepsilon)$ стремится к нулю при стремлении ε к нулю равномерно по τ из каждого конечного промежутка. Рассмотрим более простое уравнение

$$\ddot{u} + \nu_0 u = 0. \quad (65)$$

Одним из решений последнего уравнения является функция $\cos(\sqrt{\nu_0} \tau)$. Для каждого номера k ($k = 1, 2, \dots$) можно указать такой отрезок $[-\tau_k, \tau_k]$, на котором функция $\cos(\sqrt{\nu_0} \tau)$ имела не менее k нулей. Если один из концов отрезка $[\alpha, \beta]$ совпадает с точкой $t_0 = 0$, то вместо отрезка $[-\tau_k, \tau_k]$ следует выбрать отрезок $[0, 2\tau_k]$, либо $[-2\tau_k, 0]$. Далее будем рассматривать только те значения параметра ε , для которых

$$[\alpha, \beta] \supset [-\sqrt{\varepsilon} \tau_k, \sqrt{\varepsilon} \tau_k]$$

$$\begin{aligned} &(\text{или } [\alpha, \beta] \supset [0, 2\sqrt{\varepsilon}\tau_k] \\ &\text{или } [\alpha, \beta] \supset [-2\sqrt{\varepsilon}\tau_k, 0]). \end{aligned}$$

Тогда на последнем отрезке определены коэффициенты уравнения (64), которые на нем равномерно сходятся к коэффициентам уравнения (65) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому у (64), а значит, и у уравнения (2), при малых ε существует решение, имеющее не менее k нулей на рассматриваемом отрезке. Таким образом, лемма 4 доказана.

Нам потребуется еще одно промежуточное утверждение, относящееся к уравнению (2). Пусть, как и ранее, $t_1, \dots, t_n$ – все те нули функции $p(t)$, в которых $\dot{p}(t)$ отлична от нуля. Пусть выполняются неравенства

$$\nu_0 < 0, \quad (66)$$

$$\frac{\nu_{0i}}{|\dot{p}(t_i)|} \neq j, \quad j = 0, 1, \dots; \quad i = 1, \dots, n. \quad (67)$$

Обозначим через Δ_i ($i = 1, \dots, n$) отрезки, принадлежащие $[\alpha, \beta]$, с центром соответственно в точках t_i ($i = 1, \dots, n$). Будем считать эти отрезки выбранными так, что в каждом из них находится лишь один нуль функции $p(t)$. Из леммы 1 тогда следует, что наименьшее число нулей, которое могут иметь решения уравнения (2) на Δ_i , не зависит от ε , когда ε достаточно мало. Обозначим такое число, как и ранее, через k_i .

Лемма 5. Пусть выполняются неравенства (66) и (67). Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ найдется решение уравнения (2), имеющее на $[\alpha, \beta]$ ровно k_0 нулей, где

$$k_0 = 1 + \sum_{i=1}^n k_i.$$

При этом любое другое решение того же уравнения обращается в нуль не более k_0 раз.

Доказательство этой леммы, а также завершение обоснования теоремы 2, проводятся аналогично доказательству соответственно леммы 2 и рассуждениям пункта 8 раздела 3, поэтому мы их здесь не приводим.

6. Заключение

Сформулируем кратко основные выводы. Найдены предельные значения всех собственных чисел первой краевой задачи. Эти значения принципиальным образом отличаются от тех, которые имеют место в уравнении без точек поворота. Как оказалось, существенное значение для нахождения асимптотики собственных чисел имеет поведение функций $p(t)$ и $q(t)$ только в достаточно малых окрестностях точек поворота.

Список литературы / References

- [1] Тихонов А. Н., “Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных”, *Мат. сборник*, **31**:3 (1952), 575–586; [Tikhonov A. N., “Sistemy differentsial’nykh uravneniy, soderzhashchikh malye parametry pri proizvodnykh”, *Mat. sbornik*, **31**:3 (1952), 575–586, (in Russian).]
- [2] Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Федорюк М. В., “Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Сер. Математика. Мат. анализ*, ВИНТИ, М., 1969, 5–73; English transl.: Butuzov V. F., Vasil’eva A. B., Fedoryuk M. V., “Asymptotic Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations”, **8**, 1970, 1–82.
- [3] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., “Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений”, 1973; [Vasil’eva A. B., Butuzov V. F., “Asimptoticheskie razlozheniya resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy”, 1973, (in Russian).]
- [4] Дородницын А. А., “Асимптотическое решение уравнения Ван-дер-Поля”, *ПММ*, **11** (1947), 313–328; [Dorodnitsyn A. A., “Asimptoticheskoe reshenie uravneniya Van-der-Polya”, *ПММ*, **11** (1947), 313–328, (in Russian).]
- [5] Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., “Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным”, *ДАН СССР*, **102**:5 (1955), 889–891; [Mishchenko E. F., Pontryagin L. S., “Periodicheskie resheniya sistem differentsial’nykh uravneniy, blizkie k razryvnym”, *DAN SSSR*, **102**:5 (1955), 889–891, (in Russian).]
- [6] Коул Дж., *Методы возмущений в прикладной математике*, Мир, М., 1970; English transl.: Cole J., *Perturbation methods in applied mathematics*, Blaisdell Publishing Company, London, 1968.
- [7] Вишик М. И., Люстерник Л. А., “Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром”, *УМН*, **12**:5 (1957), 3–122; [Vishik M. I., Lyusternik L. A., “Regulyarnoe vyrozhdenie i pogranichnyy sloy dlya lineynykh differentsial’nykh uravneniy s malym parametrom”, *UMN*, **12**:5 (1957), 3–122, (in Russian).]
- [8] Вишик М. И., Люстерник Л. А., “Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамопряженных дифференциальных уравнений. I”, *УМН*, **15**:3 (1960), 3–80; English transl.: Vishik M. I., Lusternik L. A., “The solution of some perturbation problems for matrices and selfadjoint or non-selfadjoint differential equations. I”, *Russian Mathematical Surveys*, **15**:3 (1960), 1–73.
- [9] Колесов Ю. С., Чаплыгин В. Ф., “О неосцилляции решений сингулярно возмущенных уравнений второго порядка”, *ДАН СССР*, **199**:6 (1971), 1240–1242; [Kolesov Yu. S., Chaplygin V. F., “O neostsilyatsii resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy vtorogo poriyadka”, *DAN SSSR*, **199**:6 (1971), 1240–1242, (in Russian).]
- [10] Кащенко С. А., “Предельные значения собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота”, *Вест. Ярослав. ун-та*, **10**, 1974, 3–39; [Kashchenko S. A., “Predel’nye znacheniya sobstvennykh chisel pervoy kraevoy zadachi dlya singulyarno vozmushchennogo differentsial’nogo uravneniya vtorogo poriyadka s tochkami povorota”, *Vest. Yarosl. un-ta*, **10**, 1974, 3–39, (in Russian).]
- [11] Коддингтон Э., Левинсон И., *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1958; English transl.: Coddington E., Levinson N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill Book Company, London, 1955.
- [12] Якубович В. А., Старжинский В. М., *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами*, Наука, М., 1972; [Yakubovich V. A., Starzhinskiy V. M., *Lineynye differentsial’nye uravneniya s periodicheskimi koeffitsientami*, Nauka, M., 1972, (in Russian).]
- [13] Кащенко С. А., *Устойчивость уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами*, Ярославль, 2006; [Kashchenko S. A., *Ustoychivost uravneniy vtorogo poriyadka s periodicheskimi koeffitsientami*, Yaroslavl, 2006, (in Russian).]

- [14] Камке Е., *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1965; [Kamke E., *Spravochnik po obyknovennym differentsialnym uravneniyam*, Nauka, М., 1965, (in Russian).]
- [15] Ch. J. de la Vallie-Poussin, “Sur l’équation différentielle lineaire du second ordre. Determination d’une integrale par deux valeurs assignees. Extension aux equations d’ordre n ”, *J. Math. Pure et Appl.*, **8**:1 (1929), 125–144.

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-682-710

Asymptotics of Eigenvalues of First Boundary Value Problem for Singularly Perturbed Second-order Differential Equation with Turning Points

Kaschenko S. A.

Received September 4, 2015

We consider a linear differential equation of second order with a small factor at the highest derivative. We study the problem of the asymptotic behavior of the eigenvalues of the first boundary value problem (task Dirichlet) in situation when the turning points (points where the coefficient at the first derivative equals to zero) exist. It is shown that only the behavior of coefficients of the equation in a small neighborhood of the turning points is essential. The main result is a theorem on the limit values of the eigenvalues of the first boundary value problem.

Keywords: singularly perturbed equation, turning points, asymptotic, boundary value problem, eigenvalues

For citation: Kaschenko S. A., "Asymptotics of Eigenvalues of First Boundary Value Problem for Singularly Perturbed Second-order Differential Equation with Turning Points", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:5 (2015), 682–710.

On the authors:

Kaschenko Sergey Alexandrovich, orcid.org/0000-0002-8777-4302, doctor of science, professor,

P.G. Demidov Yaroslavl State University,

Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: kasch@uniyar.ac.ru