©Тимофеев Е.А., 2015

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-723-730

УДК 519.17

Асимптотика моментов сингулярной функции Лебега

Тимофеев Е.А.

получена 10 июля 2015

Напомним определение сингулярной функции Лебега. Пусть в результате бросания несимметричной монеты с вероятностью p выпадает решка, а с вероятностью $q = 1 - p$ – орел. Пусть бинарное разложение $\xi \in [0, 1]$: $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 2^{-k}$ задается бросанием монеты бесконечно много раз, т.е. $c_k = 1$, если результат k -го бросания – решка, и $c_k = 0$, если – орел. Сингулярная функция Лебега $L(t)$ является функцией распределения случайной величины ξ :

$$L(t) = \text{Prob}\{\xi < t\}.$$

Хорошо известно, что $L(t)$ строго возрастает и ее производная равна нулю почти всюду ($p \neq q$).

Моменты сингулярной функции Лебега определяются как

$$M_n = E\xi^n.$$

Основной результат работы – следующая оценка:

$$M_n = O(n^{\log_2 p}).$$

Ключевые слова: моменты, само-подобие, функция Лебега, сингулярная функция, преобразование Меллина, асимптотика

Для цитирования: Тимофеев Е.А., "Асимптотика моментов сингулярной функции Лебега", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22:5** (2015), 723–730.

Об авторах:

Тимофеев Евгений Александрович, orcid.org/0000-0002-0980-2507,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической информатики,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, e-mail: timofeevEA@gmail.com

Напомним определение сингулярной функции Лебега. Пусть в результате бросания несимметричной монеты с вероятностью p выпадает решка, а с вероятностью $q = 1 - p$ – орел. Пусть бинарное разложение $\xi \in [0, 1]$: $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 2^{-k}$ задается бросанием монеты бесконечно много раз, т.е. $c_k = 1$, если результат k -го бросания – решка, и $c_k = 0$, если – орел. Сингулярная функция Лебега $L(t)$ является функцией распределения случайной величины ξ :

$$L(t) = \text{Prob}\{\xi < t\}.$$

Хорошо известно, что $L(t)$ строго возрастает и ее производная равна нулю почти всюду ($p \neq q$).

Эта функция была введена Ломницким и Уламом [2] в 1934 г. Де Рам [4] показал, что $L(t)$ является единственным непрерывным решением функционального уравнения

$$L(t) = \begin{cases} qL(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ q + pL(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (1)$$

где $p + q = 1$. Салем [3] описал геометрическое построение подобных функций. Поэтому функция $L(t)$ также называется сингулярной функцией де Рама, сингулярной функцией Салема, сверткой Бернулли и само-подобной функцией. Примеры этих функций показаны на рис. 1. Изучению различных свойств сингулярных

Рис. 1. Lebesgue's singular functions for $q = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$

распределений на отрезке $[0, 1]$ в последнее время посвящено большое число работ. Полученные результаты находят применение в теории чисел, теории динамических систем.

Нахождение моментов сингулярных распределений является довольно трудной задачей, и в настоящее время асимптотики моментов найдены только для функции Минковского.

Моментами функции $L(t)$ будем называть величины

$$M_n = \int_0^1 t^n dL(t), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Основной результат настоящей работы

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$M_n = O(n^{\log_2 p}).$$

Доказательство. Предварительно докажем ряд лемм.

Лемма 1. *Величины M_n удовлетворяют рекуррентному уравнению*

$$M_n = q2^{-n}M_n + p2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M_k, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Доказательство. Подставив (1) в (2), получим

$$\begin{aligned} M_n &= q \int_0^{1/2} t^n dL(2t) + p \int_{1/2}^1 t^n dL(2t-1) = \\ &= q2^{-n} \int_0^1 t^n dL(t) + p2^{-n} \int_0^1 (t+1)^n dL(t) = \\ &= q2^{-n} \int_0^1 t^n dL(t) + p2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^1 t^k dL(t) = \\ &= q2^{-n}M_n + p2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M_k. \end{aligned}$$

□

Введем величины N_n как решение рекуррентного уравнения

$$N_n = q2^{-n} + p2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N_k, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Лемма 2. *Справедлива оценка*

$$M_n \leq N_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Доказательство. Проведем индукцию по n .

При $n = 0$ имеем $M_0 = N_0 = 1$.

Предположим, что неравенство справедливо для всех $k < n$.

Из (3) имеем

$$(1 - 2^{-n})M_n = p2^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} M_k \leq p2^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} N_k.$$

Подставляя (4), получим

$$(1 - 2^{-n})M_n \leq -q2^{-n} + (1 - p2^{-n})N_n = -q2^{-n}(1 - N_n) + (1 - 2^{-n})N_n \leq (1 - 2^{-n})N_n.$$

Последнее неравенство следует из неравенства $N_n \leq 1$, которое аналогично доказывается индукцией по n . $\square$

Лемма 3. *Справедливо неравенство*

$$M_n \geq pN_n, \quad \forall n > 0.$$

Доказательство. Проведем индукцию по n .

При $n = 1$ имеем $M_1 = p$, $N_1 = \frac{1}{2-p}$, $M_1 = p \geq \frac{p}{2-p}$.

Предположим, что неравенство справедливо для всех $0 < k < n$.

Из (3) и предположения индукции имеем

$$(1 - 2^{-n})M_n = p2^{-n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} M_k + p2^{-n} \geq p^2 2^{-n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} N_k + p2^{-n}.$$

Подставляя (4), получим

$$\begin{aligned} (1 - 2^{-n})M_n &\geq \\ &\geq p(N_n - p2^{-n}N_n - 2^{-n}) + p2^{-n} = \\ &= p(1 - p2^{-n})N_n \geq \\ &\geq p(1 - 2^{-n})N_n. \end{aligned}$$

$\square$

Введем функцию $N(x)$, положив

$$N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - N_n) \frac{x^n}{n!} e^{-x}. \quad (5)$$

Лемма 4.

$$N(x) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{q\Gamma(z_k)}{p^2 \ln 2} x^{-z_k} + O(x^{-\alpha}), \quad \forall \alpha > 0, \quad (6)$$

где

$$z_k = -\frac{\ln p}{\ln 2} + \frac{2\pi i k}{\ln 2}. \quad (7)$$

Доказательство. Подставляя (4) в (5), получим

$$\begin{aligned}
 N(x) &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} N_n \frac{x^n}{n!} e^{-x} = \\
 &= 1 - q \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{x^n}{n!} e^{-x} - p \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{x^n}{n!} e^{-x} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N_k = \\
 &= 1 - q e^{-\frac{x}{2}} - p \sum_{k=0}^{\infty} N_k \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} \frac{x^n}{(n-k)!} e^{-x} = \\
 &= q - q e^{-\frac{x}{2}} + p \sum_{k=0}^{\infty} (1 - N_k) 2^{-k} \frac{x^k}{k!} e^{-\frac{x}{2}} = \\
 &= q - q e^{-\frac{x}{2}} + p N\left(\frac{x}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Решая это рекуррентное уравнение, получим

$$N(x) = q \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} \left(1 - e^{-\frac{x}{2^k}}\right). \quad (8)$$

Полученный ряд является гармонической суммой. Для нахождения гармонических сумм обычно применяется преобразование Меллина.

$$\tilde{N}(z) = \int_0^{\infty} N(x) x^{z-1} dx. \quad (9)$$

Вычисляя интегралы через гамма-функцию, получим, что в полосе $-1 < \Re z < 0$

$$\tilde{N}(z) = -q \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} 2^{kz} \Gamma(z) = -\frac{q \Gamma(z) 2^z}{1 - p 2^z}. \quad (10)$$

Функцию $\tilde{N}(z)$ можно продолжить на всю комплексную плоскость, в которой она будет иметь простые полюса:

- 1) в точках $z = -n$, от функции $\Gamma(z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$;
- 2) в точках $z = z_k$, от функции $\frac{1}{1 - p 2^z}$, где z_k заданы в (7).

Применяя обратное преобразование Меллина, получим

$$N(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \tilde{N}(z) x^{-z} dz, \quad (11)$$

где $0 < \sigma < 1$.

Для нахождения $N(x)$ по формуле (11) применим теорему о вычетах.

Вычеты функции $\tilde{N}(z)$:

- 1) -1 , в точке $z = 0$;
- 2) $\frac{q \Gamma(z_k) 2^{z_k}}{p^2 \ln 2}$ в точках $z = z_k$.

Рассмотрим в комплексной области прямоугольник

$$R(\beta, \alpha) = \{z : -\sigma \leq \Re z \leq \alpha; |\Im z| \leq \frac{\pi i(2\beta + 1)}{\ln 2}\},$$

где $\alpha > -\frac{\ln p}{\ln 2}$, β – целое число.

По теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial R(\beta, \alpha)} -\frac{q\Gamma(z)2^z}{1-p2^z} dz = \sum_{z_m \in R(\beta, \alpha)} \operatorname{Res} \left(-\frac{q\Gamma(z)2^z}{1-p2^z}, z_m \right). \quad (12)$$

Здесь интеграл по контуру берется в направлении против часовой стрелки.

Интегралы по верхней и нижней границе прямоугольника оцениваются как $O(e^{-\beta})$, поскольку гамма-функция убывает по мнимой оси экспоненциально быстро [6, 8.328.1],

$$|\Gamma(x + iy)| \leq C e^{-\pi|y|/2} |y|^{-x+1/2}.$$

Интеграл по вертикальному отрезку $\Re z = \alpha$ равен $O(x^{-\alpha})$. Полное доказательство этих утверждений проводится аналогично доказательству в [7]

Подставляя вычеты в (12), $\beta \rightarrow \infty$ получим (6). □

Перейдем к доказательству теоремы.

Из (6) имеем

$$1 - N(x) = \phi(x)x^{-\log_2 p} + O(x^{-\alpha}),$$

где

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{q\Gamma(z_k)}{p^2 \ln 2} x^{-\frac{2\pi i k}{\ln 2}}$$

является периодической, следовательно, ограниченной функцией от x .

Поскольку величина $1 - N(x)$ получена усреднением величин N_n (пуассонизацией), то $N_n \approx N(n)$ (см. [1, 5]).

Применяя леммы 2, 3, получим оценку теоремы. □

Список литературы / References

- [1] Flajolet P., Sedgewick R., *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, 2008.
- [2] Lomnicki Z., Ulam S. E., “Sur la theorie de la mesure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilites. I. Variables independantes”, *Fundamenta Mathematicae*, **23**:1 (1934), 237–278.
- [3] Salem R., “On some singular monotonic functions which are strictly increasing,” , *Trans. Amer. Math. Soc.*, **53**:3 (1943), 427–439.
- [4] De Rham G., “On Some Curves Defined by Functional Equations”, *Classics on Fractals*, ed. Gerald A. Edgar (Ed.), Addison-Wesley, 1993, 285–298.
- [5] Szpankowski W., *Average Case Analysis of Algorithms on Sequences*, John Wiley & Sons, New York, 2001.
- [6] Gradstein I. S., Ryzhik I. M., *Table of integrals, Series, and Products*, Academic Press, 1994.
- [7] Timofeev E. A., “Bias of a nonparametric entropy estimator for Markov measures” , *Journal of Mathematical Sciences*, **176**:2 (2011), 255–269.

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-723-730

Asymptotic Formula for the Moments of Lebesgue's Singular Function

Timofeev E. A.

Received July 10, 2015

Recall Lebesgue's singular function. Imagine flipping a biased coin with probability p of heads and probability $q = 1 - p$ of tails. Let the binary expansion of $\xi \in [0, 1]$: $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 2^{-k}$ be determined by flipping the coin infinitely many times, that is, $c_k = 1$ if the k -th toss is heads and $c_k = 0$ if it is tails. We define Lebesgue's singular function $L(t)$ as the distribution function of the random variable ξ :

$$L(t) = \text{Prob}\{\xi < t\}.$$

It is well-known that $L(t)$ is strictly increasing and its derivative is zero almost everywhere ($p \neq q$). The moments of Lebesgue's singular function are defined as

$$M_n = \mathbb{E}\xi^n.$$

The main result of this paper is the following:

$$M_n = O(n^{\log_2 p}).$$

Keywords: moments, self-similar, Lebesgue's function, singular, Mellin transform, asymptotic

For citation: Timofeev E. A., "Asymptotic Formula for the Moments of Lebesgue's Singular Function", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:5 (2015), 723–730.

On the authors:

Timofeev Evgeniy Alexandrovich, orcid.org/0000-0002-0980-2507, ScD, professor
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: timofeevEA@gmail.com