Модел. и анализ информ. систем. Т. **19**, № **3** (2012) 73–81

УДК 517.9

Динамика простейших кусочно-линейных разрывных отображений

Кащенко Д. С.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: kasch@mail.ru

получена 20 апреля 2012

Ключевые слова: отображения, бифуркация, цикл, хаос

Исследована динамика одномерного кусочно-линейного отображения с одним разрывом. В пространстве параметров выделены области, соответствующие различным динамическим эффектам.

В работе [1] (см. также [2]) построена общая теория непрерывных одномерных отображений. Установлен универсальный порядок (который называют порядком Шарковского) бифуркаций при изменении параметров отображений. Для приложений важным классом являются кусочно-линейные системы. Как оказалось, они имеют свои бифуркационные особенности.

В настоящей работе рассматривается вопрос о динамике простейших унимодальных кусочно-линейных разрывных отображений $f : [0, 1] \to [0, 1]$:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f_1(x) = lx + a, & x \in [0, b], \\ f_2(x) = px - p, & x \in (b, 1). \end{cases} \tag{1}$$

Параметр ε, определяющий величину разрыва, удовлетворяет соотношению $-1 < \varepsilon < 1$. Числа a и b определяются через l, p по формулам:

$$a = \begin{cases} 1 - l(1 + \frac{1-\varepsilon}{p}), & \varepsilon \geq 0, \\ 1 - l(1 + \frac{1}{p}), & \varepsilon < 0, \end{cases} \qquad b = \begin{cases} 1 + \frac{1-\varepsilon}{p}, & \varepsilon \geq 0, \\ 1 + \frac{1}{p}, & \varepsilon < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Параметры l, p предполагаются принадлежащими области

$$\Pi = \{(l, p) : l \in [0, 1], p \in (-\infty, -1)\}. \tag{3}$$

На рис. 1a приведены графики функции f_ε при $\varepsilon > 0$, а на рис. 1b – при $\varepsilon < 0$.

Анализ непрерывных (при $\varepsilon = 0$) кусочно-линейных отображений приведен в работах [3—4]. Основной результат состоит в том, что если зафиксировать некоторое значение параметра $l \in (0, 1)$ и изменять p от -1 до $-\infty$, то для отображения

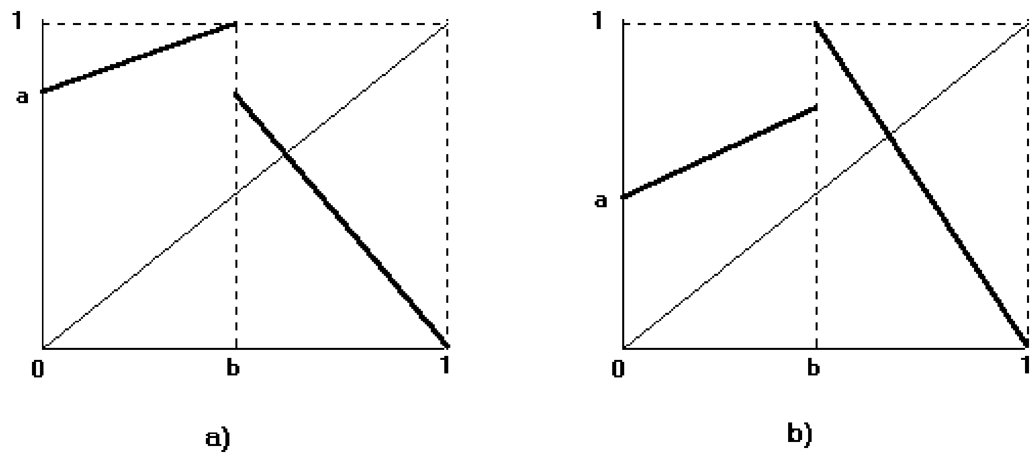

Рис. 1.

будут последовательно наблюдаться устойчивые циклы всех натуральных периодов, разделенные областями хаотичности Γ:

$$2 \Rightarrow \Gamma \Rightarrow 3 \Rightarrow \Gamma \Rightarrow 4 \Rightarrow \Gamma \Rightarrow 5 \Rightarrow \Gamma \Rightarrow \ldots \Rightarrow \Gamma \Rightarrow n \Rightarrow \Gamma \Rightarrow n+1 \Rightarrow \Gamma \Rightarrow \ldots.$$

Отметим, что при $l \in (0, \frac{1}{2})$ период цикла растет неограниченно при $p \to -\infty$. Если же зафиксировать некоторое значение параметра $p \in (-\infty, -1)$ и изменять l от 0 до 1, то для отображения также будут последовательно наблюдаться устойчивые циклы натуральных периодов, однако период будет расти только до некоторого конечного значения, зависящего от p. На рис. 2 представлены области существования и устойчивости циклов отображения в плоскости параметров l и $\log_2(-p)$.

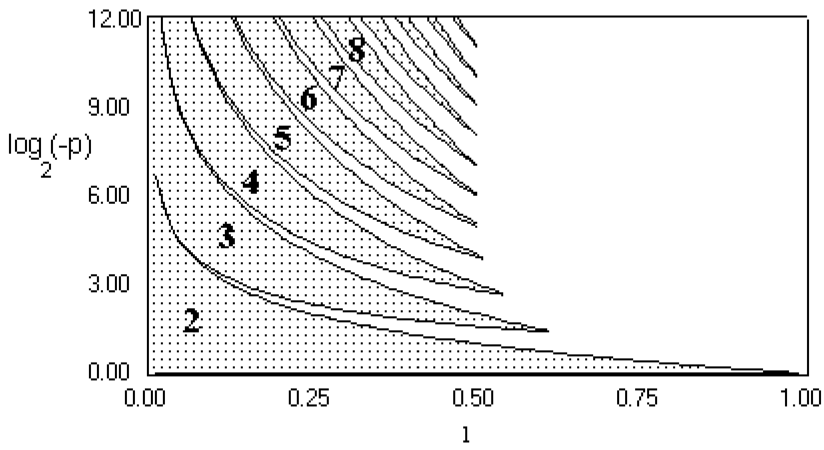

Рис. 2.

Как оказалось, наличие разрыва вносит существенные особенности в бифуркационный анализ, причем бифуркации в случаях 1a и 1b являются существенно различными. Ряд результатов приведен в работах [6—7].

Рассмотрим отдельно каждый из случаев.

1. Случай $\varepsilon > 0$ Для отображения f_ε получим условия существования и устойчивости циклов $\{x_1, \dots, x_n\}$ $n = 2, 3, \dots$ периода n, таких что

$$x_i < x_{i+1},\ f(x_i) = x_{i+1},\ i = 1, \dots, n-1,\ f(x_n) = x_1. \tag{4}$$

Будем обозначать циклы такого типа γ_n. Отметим, что речь идет о таких циклах периода n, у которых $n-1$ последовательных значений монотонно возрастает. По-видимому, другого типа циклов в рассматриваемом случае не существует.

Положим

$$L_n = 1 + l + l^2 + \dots + l^n = \frac{1 - l^{n+1}}{1 - l}.$$

Утверждение 1. *Цикл γ_n существует тогда и только тогда, когда*

$$-\varepsilon^{-1}(1-\varepsilon)\frac{L_{n-1}}{l^{n-1}} \le p \le -(1-\varepsilon)\frac{L_{n-2}}{l^{n-2}}, \tag{5}$$

и является притягивающим тогда и только тогда, когда

$$p > -\frac{1}{l^{n-1}}. \tag{6}$$

Докажем сначала неравенства (5). Для существования цикла γ_n, удовлетворяющего (4), во-первых, $(n-2)$-е итерации точки $x = 0$ должны не превосходить значение $y = b$. Это означает, что должно выполняться неравенство

$$l(\dots l(la + \underbrace{a) + a) \dots) + a}_{n-2} \le b. \tag{7}$$

Во-вторых, должно иметь место неравенство $m > 1 - \varepsilon$, где $m \in [0, b]$ определяется из условия: $(n-1)$-я итерация точки m равна b, т.е.

$$\underbrace{l(\dots l(l}_{n-1} m + a) + a) \dots) + a = b.$$

Доказательство (6) следует из того, что для устойчивости цикла γ_n необходимо и достаточно, чтобы мультипликатор цикла (произведение производных функции $f_\varepsilon(x)$ в точках цикла) не превосходил по модулю 1.

В плоскости параметров рассмотрим области существования и устойчивости цикла γ_n:

$$\Pi_n = \{(l, p) : \max\{-\frac{1}{l^{n-1}}, -\varepsilon^{-1}(1-\varepsilon)\frac{L_{n-1}}{l^{n-1}}\} \le p \le -(1-\varepsilon)\frac{L_{n-2}}{l^{n-2}}\}. \tag{8}$$

Верхняя граница каждой из областей Π_n образована кривой "существования", обозначим ее $E_n(l)$, нижняя – определяется "кривой устойчивости", обозначим ее $S_n(l)$ и "кривой несуществования", обозначим ее $Q_n(l)$. Кривые пересекаются в точке

$O_n = (l_n, p_n),\ n = 2, 3, \dots,$ где $l = l_n$ – принадлежащий интервалу $(\frac{1}{2-\varepsilon}, 1)$ корень алгебраического уравнения

$$l(1-\varepsilon)L_{n-2} \qquad \Big((1-\varepsilon)l^n - (2-\varepsilon)l + 1 = 0\Big),$$

вторая координата точки O_n определяется как $p_n = -l_n^{-(n-1)}$. Точки O_n лежат на гиперболе

$$p = (1-\varepsilon)\frac{l_n}{1-(2-\varepsilon)l_n}$$

и обладают асимптотическим свойством:

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \frac{1}{2-\varepsilon}, \quad \lim_{n\to\infty} p_n = -\infty.$$

Заметим, что кривые $E_n(l)$, $S_n(l)$, $Q_n(l)$ лежат выше соответственно $E_{n+1}(l)$, $S_{n+1}(l)$, $Q_{n+1}(l)$.

Основное отличие от непрерывного (при $\varepsilon = 0$) случая заключается в том, что при $\varepsilon > 0$ области Π_n могут перекрываться, следовательно, могут существовать одновременно два устойчивых цикла. Условием для этого является выполнение неравенств:

$$E_{n+1}(l) > Q_n(l) \quad \text{и} \quad E_{n+1}(l) > S_n(l).$$

Первое из них выполняется при любых значениях l, n, ε, а второе – при

$$1 > (1-\varepsilon)L_{n-1}. \tag{9}$$

Учитывая, что $L_{n-1} < L_n$ для любых l, n, и переходя к пределу в (9) по n, получаем следующий результат:

Утверждение 2. *При $l < \varepsilon$ в плоскости параметров l, p существует бесконечно много областей устойчивости одновременно двух циклов, причем периоды этих циклов отличаются на 1.*

Покажем, что не существует областей, в которых существовали и были устойчивыми одновременно три и более циклов. Для того, чтобы существовали три цикла, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$E_{n+2}(l) > Q_n(l) \quad \text{и} \quad E_{n+2}(l) > S_n(l). \tag{10}$$

Используя формулы (5) и (6), получаем неравенства, эквивалентные (10):

$$(1-\varepsilon)L_n l^{-1} < 1 < (1-\varepsilon)L_n,$$

которые являются противоречивыми в области (3).

На рис. 3 представлены области существования и устойчивости циклов отображения f_ε в плоскости параметров l и $\log_2(-p)$ при $\varepsilon = 0.5$.

Таким образом, наличие разрыва, указанного на рис. 1а, приводит, в частности, к появлению следующей закономерности при изменении параметра p от -1 до $-\infty$ при $l < \varepsilon$:

$$2 \Rightarrow 2,3 \Rightarrow 3 \Rightarrow 3,4 \Rightarrow 4 \Rightarrow \dots \Rightarrow n \Rightarrow n, n+1 \Rightarrow n+1 \Rightarrow \dots .$$

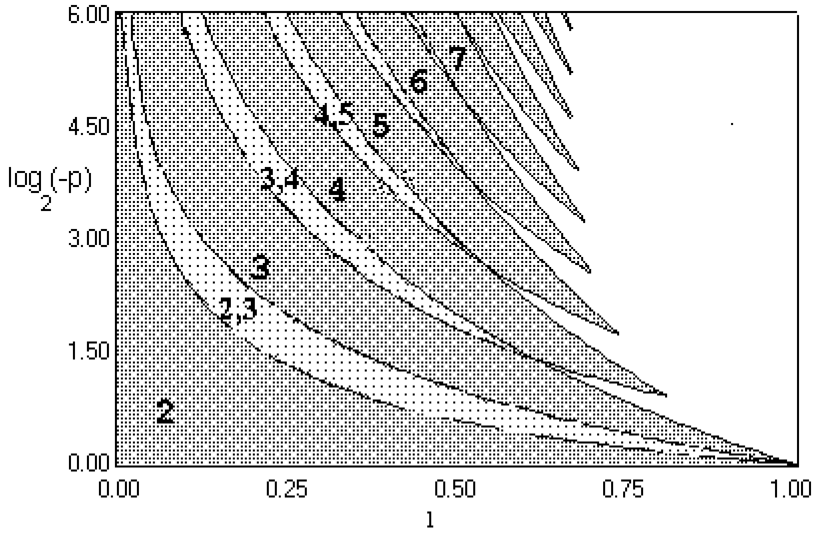

Рис. 3.

Еще раз подчеркнем, что в рассматриваемом случае (как и в [3]) обнаружены только циклы типа γ_n.

2. Случай $\varepsilon < 0$**.** Данный случай является более сложным, поскольку аналитических результатов получить практически не удается. Поэтому большее внимание здесь уделено численным методам исследования.

Отметим, что при $p < \varepsilon^{-1}$ отображение имеет глобально устойчивое состояние равновесия.

Утверждение 3. *При* $\varepsilon < -0.25$ *отображение не имеет циклов типа* γ_n*. При* $-0.25 \le \varepsilon < 0$ *циклы* γ_n *существуют при выполнении неравенств*

$$\max\{\varepsilon^{-1}, (1+\sqrt{1+4\varepsilon})(2\varepsilon)^{-1}\} \le p \le \min\{-1, (1-\sqrt{1+4\varepsilon})(2\varepsilon)^{-1}\} \tag{11}$$

и

$$p \le \frac{L_{n-2}}{-l^{n-2} + \varepsilon L_{n-3}}. \tag{12}$$

Докажем сначала (11). Для существования цикла γ_n необходимо, чтобы параметр p принадлежал интервалу $(\varepsilon^{-1}, -1)$ и выполнялось условие $f_2(1+\varepsilon) > b$. А неравенство (12) есть следствие неравенства (7).

На рис. 4 приведены области существования и устойчивости циклов периодов от 1 до 4 при $\varepsilon = -0.2$.

Отметим, что циклы периода 4 могут быть разной структуры: фазовые портреты циклов из области $\{4a\}$ и $\{4b\}$ (рис. 4) приведены соответственно на рисунках 5a и 5b.

Обозначим через $\lambda(x)$ определенную на отрезке $[0, 1]$ функцию, которая указывает наименьший период цикла, к которому сходится итерационный процесс $y_{n+1} = f_\varepsilon(y_n)$ при $y_0 = x$. Тем самым, $\lambda(x)$ определяет область притяжения соответствующего цикла. В отличие от случая $\varepsilon > 0$, здесь поведение $\lambda(x)$ может быть нерегулярным: неограниченно нарастает степень осцилляции при стремлении x к некоторому

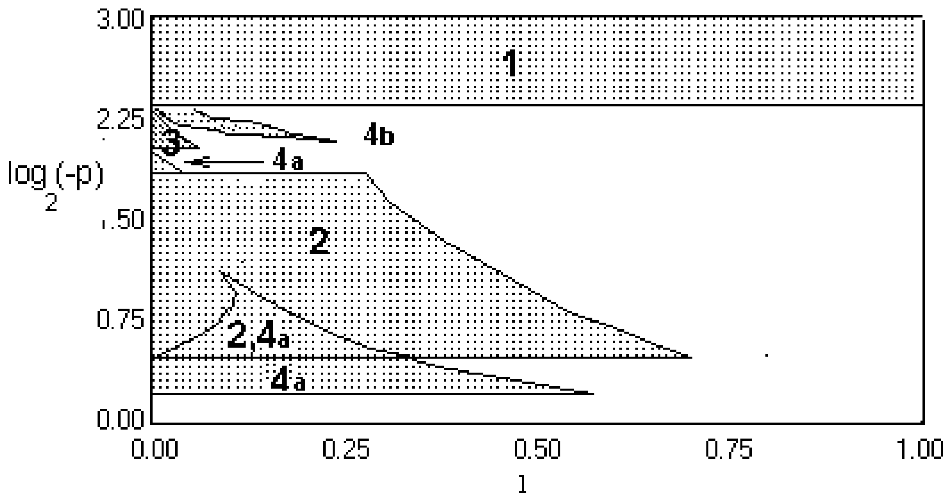
3.00
2.25
1.50
0.75
0.00
log2(-p)
1
2
3
4b
4a
2,4a
4a
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
l

Рис. 4.

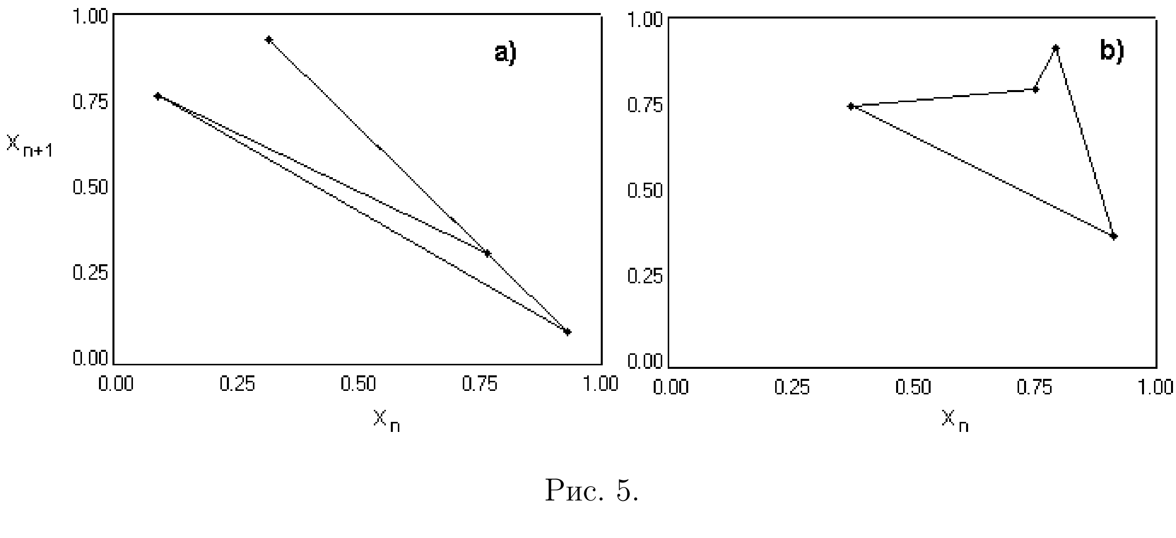
a)
b)
X n+1
X n
X n
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00

Рис. 5.

x_0. На рис. 6 показано расположение областей притяжения циклов периода 2 и 4 (l и p принадлежат области {2,4a}).

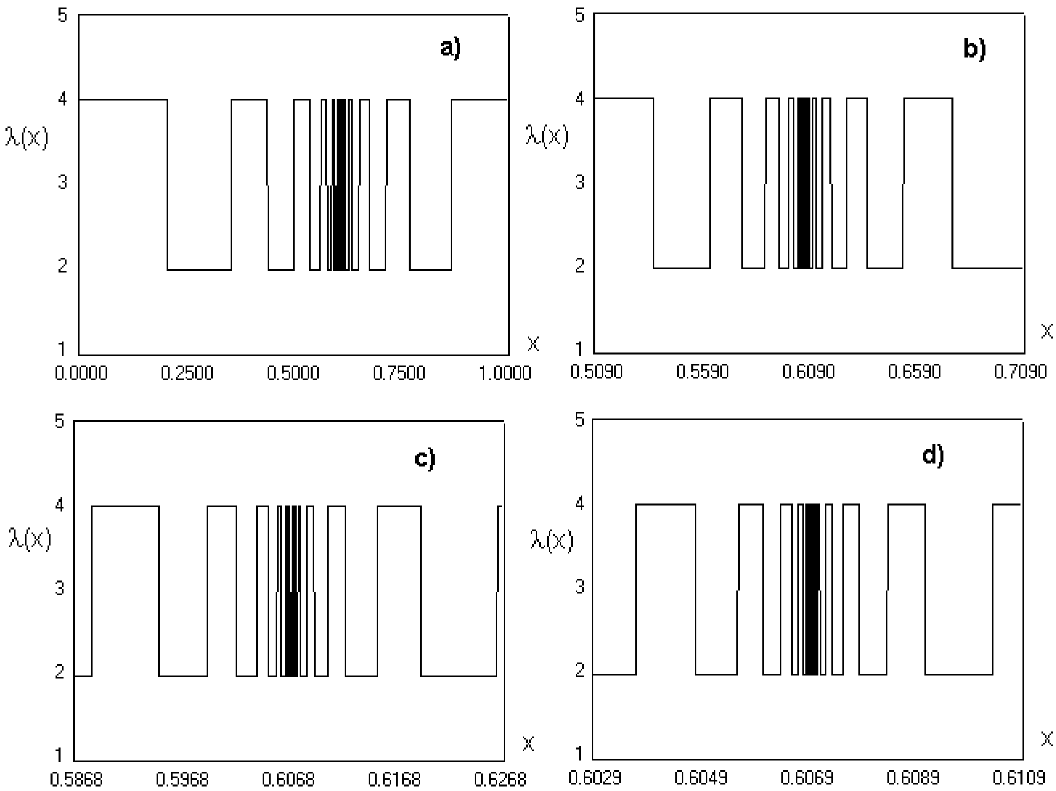

Рис. 6.

Общей закономерности бифуркаций выявить не удалось, однако численными методами установлено, что одновременно может существовать только хаос, только один цикл, 2 цикла, периоды которых отличаются на 2. При приближении p к -1 при малых значениях l растет период циклов. На рис. 7 приведены диаграммы, показывающие зависимость периода цикла от $\log_2(-p)$ при трех различных фиксированных значениях l (при $\varepsilon = -0.2$).

На рис. 8 изображены различные виды аттракторов: хаотический (см. рис. 8a) и интервальный цикл периода 4 (рис. 8b).

Список литературы

1. Шарковский А.Н. Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. мат. журн. 1964. №1. С. 61—71.

2. Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1981.

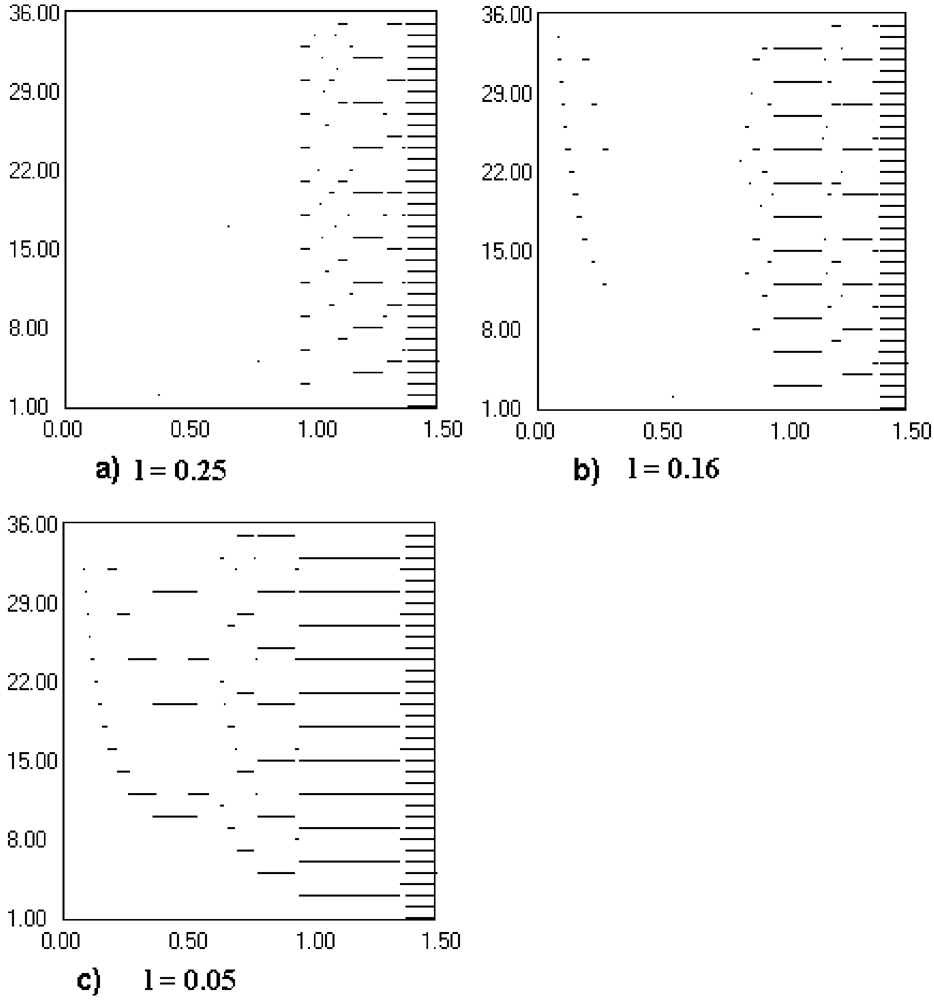

Рис. 7.

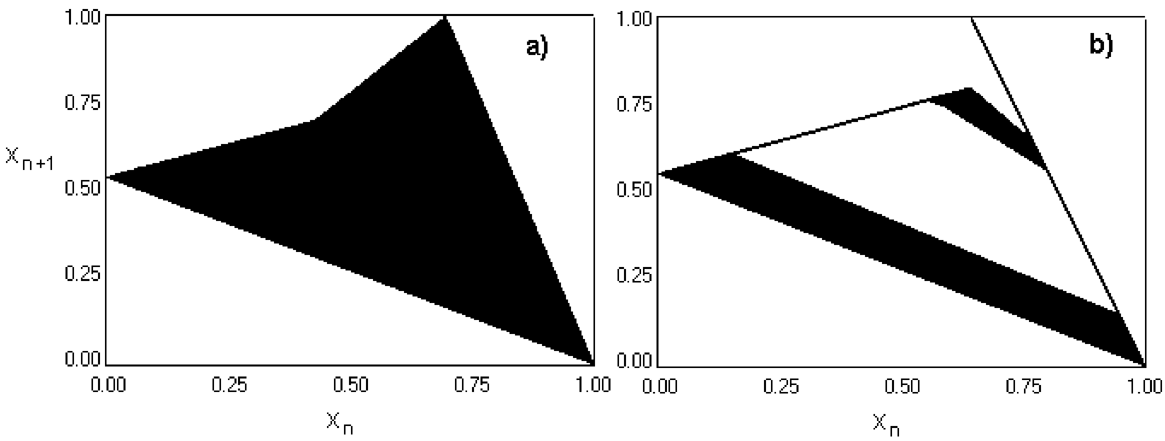

Рис. 8.

3. Майстренко В.Л., Майстренко Ю.Л., Сушко И.М. Бифуркационные явления в генераторах с линиями задержки // Радиотехника и электроника. 1994. Вып. 8—9. С. 1367—1380.

4. Maistrenko Yu.L., Maistrenko V.L., Chua L.O. Cycles of Chaotic Intervals in a Time-Delayed Chua's Circuit // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1993. Vol. 3, № 6. P. 1557—1572.

5. Кияшко С.В., Пиковский А.С., Рабинович М.И. Автогенератор радиодиапазона со стохастическим поведением // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25, №2. С. 336—343.

6. Kaschenko D.S. Dynamics of the simplest piecewise linear discontinuous mappings // NDES'97 (Nonlinear dynamics of Electronic Systems) June 26—27, 1997, Moscow, Russia. P. 458—463.

7. Kaschenko D.S. Dynamics of piecewise linear discontinuous mapping // Proceedings International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA'98), Crans-Montana, Switzerland, 14—17 September, 1998. P. 959—962.

Dynamics of the Simplest Piecewise Linear Discontinuous Mappings

Kaschenko D. S.

Keywords: mappings, bifurcation, cycle, chaos

The dynamics of one-dimensional piecewise linear mapping with one rupture is investigated. In the space of parameters we defined regions with different dynamical effects.

Сведения об авторе:
Кащенко Дмитрий Сергеевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
кандидат физико-математических наук, доцент