УДК 517.9

Пакеты импульсов в системе взаимодействующих осцилляторов с запаздыванием и их статистическая обработка¹

Глызин С. Д., Марушкина Е. А.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru, lenochka_s24@mail.ru получена 25 января 2012

Ключевые слова: динамические системы, осцилляторы, энтропия, корреляционный интеграл

Проводится статистический анализ случайных величин, полученных при анализе динамики взаимодействия пары осцилляторов нейронного типа. Удалось установить, что вычисление некоторых статистических характеристик процесса возникновения высокоамплитудных импульсов позволяет с достаточной степенью точности диагностировать два типа режимов, тогда как фазовый портрет, ляпуновская размерность и графики реализации упомянутых режимов различаются слабо.

1. Постановка задачи. Для моделировании электрической активности нервных клеток в [1,2] было предложено использовать следующее дифференциальное уравнение с запаздыванием:

$$\dot{u} = \lambda \left[-1 - f_{\text{Na}}(u) + f_{\text{K}}(u(t-1)) \right] u. \tag{1}$$

3десь u(t) — мембранный потенциал нейрона, функции

$$f_{\text{Na}}(u) = r_1 \exp(-u^2)$$
 и $f_{\text{K}}(u(t-1)) = r_2 \exp(-u^2(t-1))$ (2)

характеризуют проводимости натриевых и калиевых каналов клетки соответственно.

В [3,4] была изучена задача слабого электрического взаимодействия пары одинаковых осцилляторов вида (1)

$$\dot{u}_1 = \lambda \left[-1 - f_{\text{Na}}(u_1) + f_{\text{K}}(u_1(t-1)) \right] u_1 + D(u_2 - u_1),$$

$$\dot{u}_2 = \lambda \left[-1 - f_{\text{Na}}(u_2) + f_{\text{K}}(u_2(t-1)) \right] u_2 + D(u_1 - u_2),$$
(3)

 $^{^1}$ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.G34.31.0053.

малый коэффициент D > 0 характеризует слабую связь нейронов между собой. В более общем случае, когда в цепочке связи между осцилляторами имеется некоторое запаздывание (см. [5]), задача принимает вид

$$\dot{u}_1 = \lambda \left[-1 - f_{\text{Na}}(u_1) + f_{\text{K}}(u_1(t-1)) \right] u_1 + D(u_2(t-h) - u_1),$$

$$\dot{u}_2 = \lambda \left[-1 - f_{\text{Na}}(u_2) + f_{\text{K}}(u_2(t-1)) \right] u_2 + D(u_1(t-h) - u_2),$$
(4)

где $0 \le h < 1$ — величина запаздывания. Легко видеть, что система (4) при h = 0 сводится к системе (3).

На основе анализа нормальной формы (см. [3,4] и существенно более раннюю работу [6]) удалось определить область значений параметров r_1 , r_2 , для которых при подходящим образом выбранном параметре связи D и увеличении λ от критического значения λ_* в системе наблюдаются разномасштабные колебания, причем движения большой амплитуды представляют собой случайную последовательность импульсных пакетов. Следует отметить, что получающиеся колебательные режимы не могут быть исследованы методом большого параметра, поскольку при больших λ динамика системы упрощается и реализуются лишь релаксационные циклы (см. [9–12]).

Возникновение процессов, представляющих собой сочетание колебаний большой и малой амплитуды, характеризуется резким ростом максимальных значений на аттракторе, старший ляпуновский показатель при этом нарастает, однако меняется не столь резко, более того, в области существования режимов с большими и малыми по амплитуде колебаниями он несколько стабилизируется. Такой характер поведения старшего ляпуновского показателя связан с тем, что он вычисляется как среднее по всему колебательному процессу как большой, так и малой амплитуды. Учитывая, что динамические характеристики локальных устойчивых колебаний были изучены ранее в [3], выделим высокоамплитудные составляющие решений и выполним их статистический анализ.

Для разделения колебаний разной амплитуды воспользуемся простейшим и наиболее естественным в данной ситуации пороговым фильтром, то есть будем обнулять те значения функции, которые не превосходят некоторого порога.

В качестве величин, более адекватно характеризующих процесс возникновения импульсов или пачек импульсов, были выбраны статистические характеристики двух случайных величин: дискретной случайной величины количества спайков в пачке импульсов и непрерывной случайной величины расстояния между последовательно идущими пачками.

Фиксируем в (4) параметры $r_1=1.5, r_2=2.6,$ при этом критическое значение $\lambda_{\text{\tiny KD}}\approx 2.59729.$ Рассмотрим следующие четыре случая:

- 1. $\lambda = 2.89$, D = 0.055,
- 2. $\lambda = 2.897$, D = 0.074,
- 3. $\lambda = 2.93, D = 0.074,$
- 4. $\lambda = 2.95, D = 0.074,$



Рис. 1. Зависимость u_1 от t при $\lambda = 2.897$

для h=0 и h=0.1 (в случае $\lambda=2.89$ выбирались значения h=0 и h=0.02). Выбор значений параметров 1) и 2) обусловлен близостью значений λ в этом случае к критическому значению, при котором возникают колебания большой амплитуды. Варианты 3) и 4) значений параметров взяты в середине области колебательных режимов большой амплитуды.

Выборка данных для вычисления статистических характеристик осуществлялась следующим образом. Было выбрано пороговое значение амплитуды колебаний равное восьми, при превышении которого считалось, что наблюдается высокоамплитудный импульс. Такое значение было взято в связи с тем, что эмпирически определенная максимальная амплитуда спайка приблизительно равна 30, а колебания малой амплитуды не превышают 1. Средний период колебаний большой амплитуды составляет менее десяти единиц по t, в связи с этим импульсный пакет считаем законченным, если прошло более 15 единиц времени без спайков. Вычисляя решение системы (4), в соответствии с описанными выше правилами по первой его компоненте удается построить два массива данных:

$$\{x_1, \dots, x_N\} \tag{5}$$

для расстояний между пачками импульсов и

$$\{p_1,\ldots,p_N\}\tag{6}$$

для числа спайков в каждой пачке. Время вычислений выбиралось так, чтобы количество данных N имело порядок 10^5-10^6 . Как оказалось, для этого время вычислений достаточно выбрать равным $2\cdot 10^7$. Отметим, что в случае $\lambda=2.897$ при h=0.1 для получения нужного числа отсчетов потребовалось $8\cdot 10^7$ единиц времени.

В процессе получения статистических выборок для случайной величины расстояний между пачками импульсов была обнаружена разница, невидимая на взгляд, по реализации компонент $u_1(t)$, $u_2(t)$ (для сравнения см. графики 1 и 2). Наиболее наглядно её можно продемонстрировать с помощью графика зависимости между предыдущим и последующим отсчетами в (5). Так, при $\lambda=2.89$, D=0.055 и при $\lambda=2.89$ 7, D=0.074, h=0.1 в плоскости $\{x(n),x(n+1)\}$ будет наблюдаться неструктурированное облако точек (см. рис 3). В случаях $\lambda=2.93$, $\lambda=2.95$ зависимость x(n+1) от x(n) имеет очевидную внутреннюю структуру, которая продемонстрирована на рисунках 4а) и 5а). Чтобы отобразить сложную внутреннюю структуру,

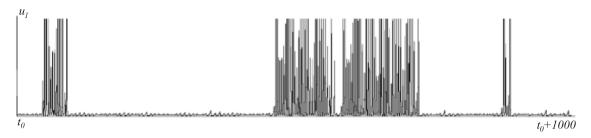


Рис. 2. Зависимость u_1 от t при $\lambda = 2.93$

были построены зависимости x(n+1) от x(n) для более узких промежутков изменения x(n) (см. рис. 4б) и 6), при этом на каждом следующем рисунке отображена область, выделенная на предыдущем рисунке прямоугольником.

Заметим, что внутренняя структура была обнаружена для $\lambda=2.93,\ \lambda=2.95$ как в случае отсутствия запаздывания, так и при h=0.1. Структура, полученная при значении параметра $\lambda=2.897$ и нулевом запаздывании, представляет собой переходный режим между случайным процессом, подчиняющимся показательному распределению, и более сложным законом, проиллюстрированным для $\lambda=2.93$ и $\lambda=2.95$. А именно, при $\lambda=2.897$ и h=0 облако точек в плоскости $\{x(n),x(n+1)\}$ структурировано, но при увеличении масштаба рассмотрения сложного внутреннего устройства обнаружено не было.

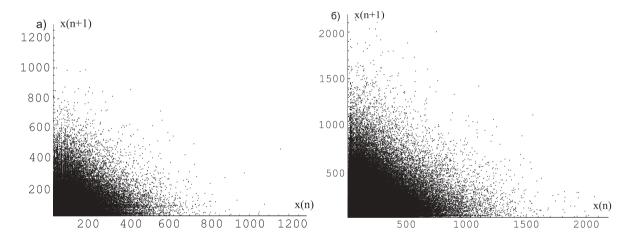


Рис. 3. Зависимость x(n+1) от x(n): a) $\lambda=2.89,\,h=0;$ б) $\lambda=2.897,\,h=0.1$

Тем самым, при рассмотрении зависимости x(n+1) от x(n) было выявлено два различных класса режимов, характеризующихся наличием или отсутствием структуры на плоскости $\{x(n), x(n+1)\}$. Далее будем рассматривать различные численные характеристики массивов данных (5) и (6), обосновывающие эту классификацию.

2. Основные статистические характеристики. Для того, чтобы идентифицировать различные классы режимов, определим сначала для рассматриваемых

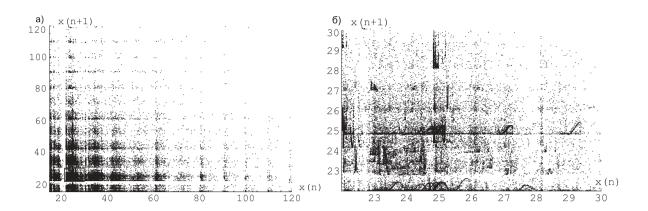


Рис. 4. Зависимость x(n+1) от x(n), $\lambda = 2.93$, h = 0.1 (на рис. б) увеличен выделенный на рис. а) участок)

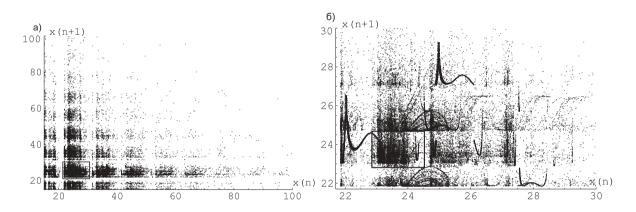


Рис. 5. Зависимость x(n+1) от x(n), $\lambda = 2.95$, h = 0.1 (на рис. 6) увеличен выделенный на рис. а) участок)

случайных величин основные статистические характеристики, сравнение которых представлено в таблице 1. В первых трех столбцах таблицы указаны рассматриваемые значения параметров λ , D и h, при которых производились вычисления, а в четвертом столбце — время вычисления. Пятый столбец содержит количество импульсных пакетов, то есть размер статистической выборки. Далее, для каждого набора параметров λ , D и h в первой строке указаны основные статистические характеристики непрерывной случайной величины расстояния между пачками импульсов, а во второй — аналогичные характеристики для дискретной случайной величины количества спайков в пачке. Седьмой столбец содержит максимальное значение выборки, восьмой — среднее значение её элементов, в девятом столбце представлено среднеквадратичное отклонение σ , в десятом — третий центральный момент m_3 . Отметим, что при значении $\lambda = 2.89$ выбор запаздывания равным h = 0.1 приводит к выходу за границы области разномасштабных колебаний, именно поэтому запаздывание выбрано меньшим (h = 0.02).

Легко видеть, что по основным статистическим характеристикам случайной ве-

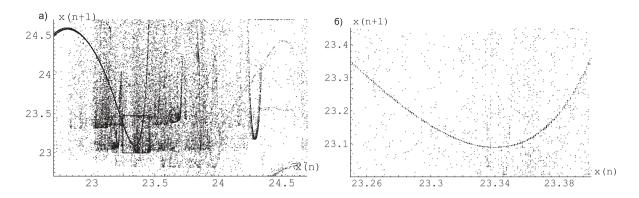


Рис. 6. Зависимость x(n+1) от x(n), $\lambda=2.95$, h=0.1 (на рис. a) увеличен выделенный на рис. 5б) участок, на рис. б) увеличен выделенный на рис. а) участок)

личины расстояний между пачками импульсов выборки для различных значений параметра λ можно разделить на два класса, для каждого из которых величины, указанные в последних четырех столбцах таблицы, имеют одинаковый порядок.

								Таблица 1.			
λ	D	h	t	Количество импульсных пакетов		Максимум	Среднее	Среднекв. отклонение	Третий момент		
2.89	0.055	0	2×10^7	153332	$\{x_j\}$	1289.104	115.146	95.125	1.655×10^6		
					$ \{p_j\}$	28	4.025	2.327	18.488		
2.89	0.055	0.02	2×10^7	128079	$\{x_j\}$	1777.96	146.703	122.234	3.656×10^6		
					$\{p_j\}$	18	2.861	1.626	5.623		
2.897	0.074	0	8×10^7	1494841	$\{x_j\}$	372.283	46.03	25.671	32272.837		
2.001					$\{p_j\}$	17	2.536	1.199	3.455		
2.897	0.074	0.1	8×10^7	322924	$\{x_j\}$	2186.977	207.988	185.074	1.26×10^{7}		
					$\{p_j\}$	451	9.79	19.772	30504.263		
2.93	0.074	0	2×10^7	505785	$\{x_j\}$	235.708	33.947	15.04	6677.153		
					$\{p_j\}$	14	2.058	1.11	2.28		
2.93	0.074	0.1	2×10^7	389990	$\{x_j\}$	387.021	30.621	16.423	13185.536		
					$\{p_j\}$	59	5.446	4.277	145.912		
2.95	0.074	0	2×10^7	563171	$\{x_j\}$	233.875	30.324	14.963	8788.86		
					$\{p_j\}$	17	2.003	1.091	2.528		
2.95	0.074	0.1	2×10^7	465154	$\{x_j\}$	168.12	26.957	9.361	2293.234		
					$\{p_i\}$	53	4.101	3.556	97.065		

Данное деление совпадает с выявленными при рассмотрении облака точек на плоскости $\{x(n), x(n+1)\}$ различиями, в частности, к первому классу относятся выборки

с параметрами $\lambda=2.89$ и $\lambda=2.897$ при h=0, остальные значения λ принадлежат второму классу. Отметим, что соответствующие статистические характеристики, вычисленные по массивам данных, принадлежащих разным классам, отличаются друг от друга в 5-10 раз.

3. Функции плотности вероятности. Следующими характеристиками, использованными для подтверждения отнесения динамики системы (4) к одному из двух классов, являются функции плотности вероятности. По выборкам (5) и (6) для соответствующих случайных величин был проведен регрессионный анализ, с помощью которого определено наилучшее приближение эмпирической функции плотности распределения в смысле наименьших квадратов. В качестве приближающей функции статистической выборки для расстояний между пачками было выбрано показательное распределение, данные для количества спайков в пачке наилучшим образом приближает распределение Пуассона.

На рисунках 7-14 ступенчатой функцией изображена эмпирическая функция плотности распределения, а пунктиром — функция распределения плотности вероятности наилучшего приближения. В левой части рисунков изображены функции плотности распределения для расстояний между пачками импульсов (в этом случае приближающей является функция плотности показательного распределения $f(x) = ae^{ax}$), в правой части — функции плотности распределения для количества спайков (наилучшее приближение — функция плотности распределения Пуассона $f(n) = e^{-b}b^n/n!$). Среднеквадратичное отклонение графика построенной по статистическим данным функции плотности вероятности от её наилучшего приближения, а также значения параметров a и b для конкретного выбора параметров системы указаны в таблице 2.

Таблица 2.

							1
λ	D	h	t	a	Среднекв.	b	Среднекв.
					отклонение		отклонение
2.89	0.055	0	2×10^7	0.0078736	0.000362	3.69319	0.016447
2.89	0.055	0.02	2×10^7	0.0062003	0.00019	2.56434	0.010064
2.897	0.074	0	8×10^{7}	0.0173445	0.00112	2.33201	0.087077
2.897	0.074	0.1	8×10^{7}	0.0045122	0.000111	1.76465	0.014614
2.93	0.074	0	2×10^7	0.0225499	0.002082	1.74257	0.041653
2.93	0.074	0.1	2×10^7	0.0256214	0.001764	4.03563	0.015985
2.95	0.074	0	2×10^7	0.0254257	0.002863	1.69036	0.053034
2.95	0.074	0.1	2×10^7	0.0274837	0.002765	2.56419	0.015794

Анализируя графики плотности вероятности и её приближения для случайной величины расстояний между пачками импульсов, можно судить, к какому из двух классов относится наблюдаемый режим. Если закон плотности показательного распределения хорошо согласуется с построенной эмпирической функцией плотности вероятности (см. рис. 7, 8, 10), то в плоскости $\{x(n), x(n+1)\}$ будет наблюдаться неоформленное облако точек. Если же закон плотности распределения более сложен и недостаточно адекватно приближается функцией плотности показательного распределения (см. рис. 11-14), то в проекции на плоскость $\{x(n), x(n+1)\}$ будет

видна сложная структура. Случай $\lambda = 2.897$, D = 0.074, h = 0 представляет собой переходный процесс между двумя различными типами режимов (см. рис. 9).

О степени близости эмпирической функции плотности распределения и её приближения можно судить по величине среднеквадратичного отклонения, указанного в шестом столбце таблицы 2. Обратим внимание, что для различных классов режимов его величина может отличаться более, чем на порядок.

Заметим, что принадлежность выборки к определенному классу режимов можно определить также по величине параметра a приближающей функции плотности показательного распределения. Для случая облака точек со сложной внутренней структурой значение параметра a в среднем в три раза превышает аналогичное значение для другого класса режимов (см. пятый столбец таблицы 2).

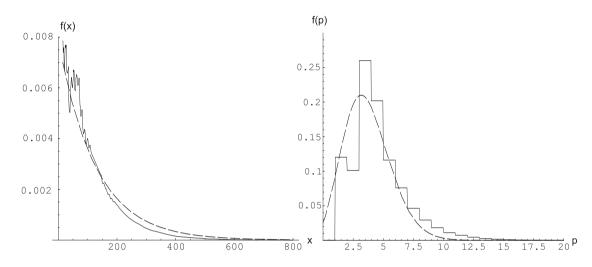


Рис. 7. Функции плотности вероятности при $\lambda = 2.89, \, h = 0$

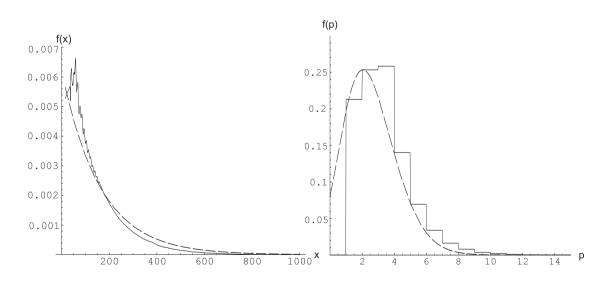


Рис. 8. Функции плотности вероятности при $\lambda = 2.89, h = 0.02$

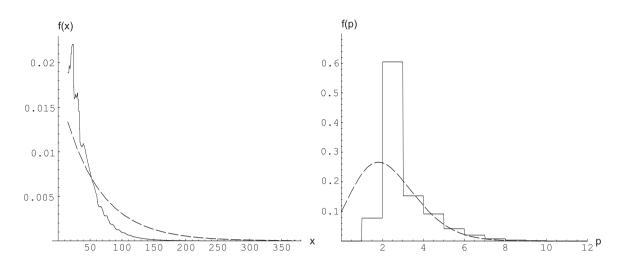


Рис. 9. Функции плотности вероятности при $\lambda=2.897,\,h=0$

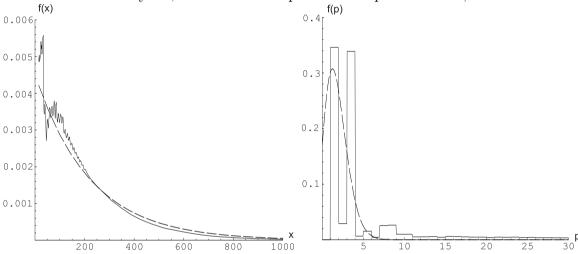


Рис. 10. Функции плотности вероятности при $\lambda = 2.897,\, h = 0.1$

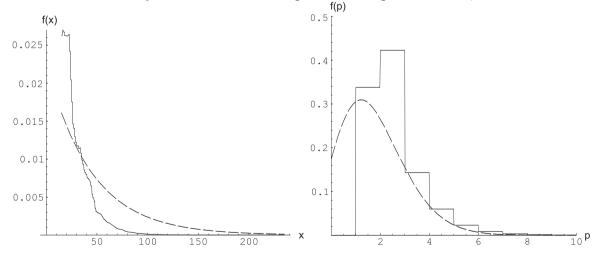


Рис. 11. Функции плотности вероятности при $\lambda = 2.93, \, h = 0$

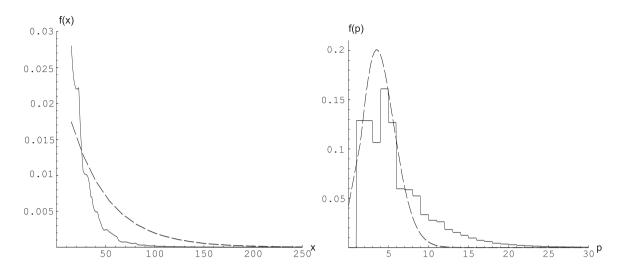


Рис. 12. Функции плотности вероятности при $\lambda = 2.93, \, h = 0.1$

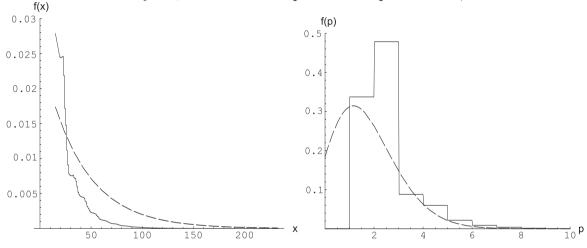


Рис. 13. Функции плотности вероятности при $\lambda = 2.95, \, h = 0$

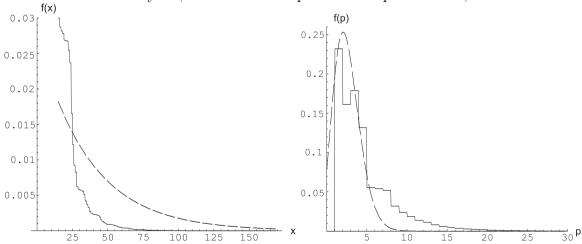


Рис. 14. Функции плотности вероятности при $\lambda = 2.95, \, h = 0.1$

4. Корреляционный интеграл и корреляционная размерность. В качестве дополнительных характеристик, при помощи которых возможно разделить два типа режимов, наблюдаемых в системе (4), были использованы корреляционный интеграл и корреляционная размерность. По выборке (5) был построен набор m-мерных векторов ξ_i , каждый из которых содержит значения из выборки (5) от $x_{(i-1)*m+1}$ до x_{i*m} . Напомним, что корреляционный интеграл можно оценить при помощи корреляционной суммы (см., например, [8])

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} \Theta(\varepsilon - \|\xi_i - \xi_j\|), \tag{7}$$

где N — объем выборки, Θ — функция Хевисайда, $\|\cdot\|$ — некоторая норма (нами использовалась евклидова норма $\|x\|^2 = \sum x_l$), ε — некоторое пороговое значение, ξ_i — построенные m—мерные векторы, m — размерность пространства вложения.

Корреляционную размерность d_C можно определить как

$$d_C = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \varepsilon}.$$
 (8)

В случае эмпирического вычисления корреляционная размерность d_C берется равной углу наклона прямой наилучшего приближения в смысле наименьших квадратов к наиболее линейной части графика, построенного по узлам $\{\log C(\varepsilon), \log \varepsilon\}$.

Были проведены вычисления корреляционного интеграла для различных размерностей пространства вложения, при этом построенная оценка корреляционной размерности d_C для всех рассмотренных значений параметров возрастала с увеличением m.

Вычисления корреляционного интеграла показали, что в случае, когда проекция зависимости x(n) от x(n+1) представляет собой неструктурированное облако точек, кривая имеет достаточно резкий наклон и корреляционная размерность оценивается числом порядка восьми. Вычисление корреляционного интеграла в случае сложной внутренней структуры, наблюдаемой на плоскости $\{x(n), x(n+1)\}$, приводит к тому, что наклон кривой становится значительно ниже (оценка корреляционной размерности равна шести или менее), а также можно выделить части кривой с различными наклонами. В этом случае размерность аттрактора определить не удается, и, по всей видимости, наблюдается сочетание нескольких аттракторов различной размерности.

5. Энтропия. В статье [7] предложены статистические оценки нового инварианта мер, названного β -статэнтропией, которая аналогична таким характеристикам, как энтропия и HP-спектр размерностей. Доказано, что указанные оценки являются состоятельными, несмещенными и при $\beta=0$ совпадают с величиной энтропии.

Для определения величины β -статэнтропии в [7] предлагается статистическая оценка $\eta_n^{(k)}(\beta,\rho)$

$$\eta_n^{(k)}(\rho) = \frac{k(r_n^{(k)} - r_n^{(k+1)})}{\ln \theta},\tag{9}$$

где β — заданное вещественное число, k $(1 \le k \ll n)$ — натуральное число.

Вспомогательная величина $r_n^{(k)}(\rho)$ определяется соотношением

$$r_n^{(k)}(\rho) = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln\left(\min_{i:i \neq j} {}^{(k)}\rho(\xi_i, \xi_j)\right).$$
 (10)

Здесь ξ_1, \ldots, ξ_n — точки метрического пространства Ω , на котором определена метрика $\rho = \rho(x,y); \min^{(k)} \{\xi_1, \ldots, \xi_n\} = \xi_k,$ если $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \ldots \leq \xi_n.$

Основным отличием предложенных в [7] оценок от ранее известных является степенной порядок $\mathcal{O}(n^{-c})$ точности дисперсии и смещения, где c — некоторая константа. С вычислительной точки зрения оценка $\eta_n^{(k)}(\beta,\rho)$ также является удобной, так как трудоёмкость её вычисления оценивается как $\mathcal{O}(n^2)$.

Вычислим предложенную статистическую оценку $\eta_n^{(k)}(\beta,\rho)$ при $\beta=0$, то есть оценим энтропию исследуемой нами системы. Отметим, что определение указанных оценок не содержится в известных программных комплексах и было реализовано самостоятельно.

Поскольку для определения статистической оценки β -статэнтропии используется несколько коротких траекторий ξ_1, \ldots, ξ_n , то необходимо разбить имеющуюся одну длинную траекторию (5). Проведем преобразование следующим образом: выберем Q — количество элементов алфавита и переведем отсчеты x_i в элементы этого алфавита

$$x_i \to Q\left(\left[\frac{x_i}{Q}\right] + 1\right),$$

где $[\ \cdot\]$ — целая часть. Затем проведем прореживание данных и сформируем m-мерные векторы ξ_i — элементы метрического пространства Ω

$$\xi_i = \{x_{2m(i-1)+1}, \dots, x_{2m(i-1)+m}\},\$$

по которым и будем определять оценку 0-статэнтропии $\eta_n^{(k)}(0,\rho)$.

Для вычисления данной оценки использовались значения k от 1 до 4, в качестве метрики ρ была выбрана евклидова норма

$$\rho(\xi_i, \xi_j) = \sum_{s=1}^{n} (1 - \delta_{\xi_{is}, \xi_{js}}) \theta^{-s}.$$

Таблица 3.

	m=10	m=15	m=20	m=25
$\lambda = 2.89$ $D = 0.055$ $h = 0$	60.49	83.02	99.47	117.86
$\lambda = 2.89$ $D = 0.055$ $h = 0.02$	62.41	84.83	102.1	122.8
$\lambda = 2.897 \ D = 0.074 \ h = 0.1$	67.03	89.53	113.0	127.91
$\lambda = 2.897 \ D = 0.074 \ h = 0$	50.52	70.65	88.07	104.59
$\lambda = 2.93$ $D = 0.074$ $h = 0$	42.02	59.82	76.5	92.14
$\lambda = 2.93$ $D = 0.074$ $h = 0.1$	50.8	69.38	84.47	96.28
$\lambda = 2.95$ $D = 0.074$ $h = 0$	39.06	56.29	69.36	82.37
$\lambda = 2.95$ $D = 0.074$ $h = 0.1$	37.41	54.64	67.94	76.49

В таблице 3 приведены результаты вычислений статистической оценки энтропии при изучаемых значениях параметров и различной величине размерности пространства вложения m при k=2. Из данных таблицы видно, что с увеличением размерности пространства вложения оценка энтропии для конкретного выбора параметров возрастает.

Указанная в таблице 3 оценка позволяет идентифицировать, к какому классу режимов принадлежит исследуемый процесс. Так, для режима, характеризующегося наличием структуры в проекции зависимости x(n) от x(n+1), оценка энтропии при m=10 не превышает 50. Напомним, что данный случай реализуется при и $\lambda=2.95$ как при ненулевом запаздывании, так и при h=0.1. При остальных рассмотренных значениях параметра λ и m=10 оценка энтропии была значительно больше и составляла порядка 65.

6. Заключение. Таким образом, при изучении динамики пар взаимодействующих осцилляторов были получены аттракторы различной природы, для которых фазовый портрет, ляпуновская размерность и графики реализации режимов отличаются слабо (для сравнения см. рис. 1 для $\lambda = 2.897$ и рис. 2 для $\lambda = 2.93$, графики проекций фазового портрета и зависимости величины старшего ляпуновского показателя от λ приведены в [4,5]). Проведенный статистический анализ выборки (5) зависимости предыдущего отсчета от последующего показал, что можно выделить два класса режимов, существенно отличающихся наличием в одном из случаев внутренней структуры. Для обоснования этой классификации были рассмотрены статистические характеристики для разных типов режимов. Выяснилось, что наибольшей информативностью обладает эмпирическая функция плотности вероятности, по величине среднеквадратичного отклонения которой от функции плотности показательного распределения можно точно определить, к какому из классов относится режим. Как оказалось, в случае отсутствия внутренней структуры функция плотности вероятности может быть смоделирована экспоненциальной, а в другом случае значительно от неё отличается. Из других часто вычисляемых показателей были использованы корреляционный интеграл и энтропия. Величина корреляционного интеграла, определенная по формуле (7), не позволяет надежно диагностировать режимы, в то время как оценка энтропии, предложенная в статье [7], напротив, позволяет. Данная оценка наилучшим образом зарекомендовала себя и с точки зрения вычислительного процесса, так как по скорости вычисления эта величина существенно превосходит определение корреляционного интеграла.

Список литературы

- Майоров В. В., Мышкин И. Ю. Математическое моделирование нейронов сети на основе уравнений с запаздыванием // Математическое моделирование. 1990. Т. 2, № 11. С. 64–76.
- 2. *Кащенко С. А., Майоров В. В.* Об одном дифференциально-разностном уравнении, моделирующем импульсную активность нейрона // Математическое моделирование. 1993. Т. 5, № 12. С. 13–25.

- 3. Глызин С. Д., Киселева Е. О. Динамика взаимодействия пары осцилляторов нейронного типа // Моделирование и анализ информационных систем. 2008. Т. 15, № 2. С. 75–88.
- 4. Глызин С. Д., Овсянникова Е. О. Двухчастотные колебания обобщенного уравнения импульсного нейрона с двумя запаздываниями // Моделирование и анализ информационных систем. 2011. Т. 18, № 1. С. 86–105.
- 5. Глызин С. Д., Киселева Е. О. Учет запаздывания в цепочке связи между осцилляторами // Моделирование и анализ информационных систем. 2010. Т. 17, № 2. С. 140–150.
- 6. Глызин С.Д. Сценарии фазовых перестроек одной конечноразностной модели уравнения «реакция-диффузия» // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 6. С. 805–811.
- 7. *Тимофеев Е. А.* Статистически оцениваемые инварианты мер // Алгебра и анализ. 2005. Т. 17, № 3. С. 204–236.
- 8. Шустер Г. Детерминированный хаос: введение. М.: Мир, 1988.
- 9. Глызин С. Д. Релаксационные колебания электрически связанных нейроподобных осцилляторов с запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. 2010. Т. 17, № 2. С. 28–47.
- 10. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные автоколебания в нейронных системах. І // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 919-932.
- 11. *Глызин С. Д.*, *Колесов А. Ю.*, *Розов Н. Х.* Релаксационные автоколебания в ней-ронных системах. II // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 12. С. 1675-1692.
- 12. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Релаксационные автоколебания в ней-ронных системах. III // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 2. С. 155—170.

Bursting Behavior in the System of Coupled Oscillators with Delay and its Statistical Analysis

Glyzin S. D., Marushkina E. A.

Keywords: dynamical systems, oscillators, entropy, correlation integral

The statistical analysis of random quantities derived from the dynamics of interaction of a pair of neuron-type oscillators are presented. It is shown that computation of some statistical characteristics of the process allows, with enough precision, to distinguish two types of orbits, while their phase portraits, Lyapunov dimension and time plots are slightly different.

Сведения об авторах: Глызин Сергей Дмитриевич,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей; Марушкина Елена Александровна, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, аспирант