Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 1 (2016), с. 5–11
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 1 (2016), pp. 5–11

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-1-5-11

УДК 519.17

Асимптотика моментов функции Такаги

Тимофеев Е.А.

получена 20 декабря 2015

Аннотация. Функция Такаги является простым примером непрерывной нигде не дифференцируемой функции и определяется как

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-n} \rho(2^n x),$$

где

$$\rho(x) = \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - k|.$$

Моменты функции Такаги задаются как

$$M_n = \int_0^1 x^n T(x)\, dx.$$

Основной результат работы – следующая оценка:

$$M_n = \frac{\ln n - \Gamma'(1) - \ln \pi}{n^2 \ln 2} + \frac{1}{2n^2} + \frac{2}{n^2 \ln 2} \phi(n) + \mathcal{O}(n^{-2.99}),$$

где функция

$$\phi(x) = \sum_{k \neq 0} \Gamma\left(\frac{2\pi i k}{\ln 2}\right) \zeta\left(\frac{2\pi i k}{\ln 2}\right) x^{-\frac{2\pi i k}{\ln 2}}$$

является периодической от $\log_2 x$, а через $\Gamma(x)$ и $\zeta(x)$ обозначаются гамма и дзета-функции.

Ключевые слова: моменты, само-подобие, функция Такаги, сингулярная функция, преобразование Меллина, асимптотика

Для цитирования: Тимофеев Е.А., "Асимптотика моментов функции Такаги", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:1 (2016), 5–11.

Об авторах:
Тимофеев Евгений Александрович, orcid.org/0000-0002-0980-2507,
доктор. физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической информатики,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, e-mail: timofeevEA@gmail.com

Функция Такаги определяется на единичном отрезке следующим образом:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho(2^n x)}{2^n}, \tag{1}$$

где $\rho(x)$ задается как $\rho(x) = \min_{n\in\mathbf{Z}} |x-n|$, т.е. $\rho(x)$ – расстояние от x до ближайшего целого числа. График функции $T(x)$ показан на рис. 1.

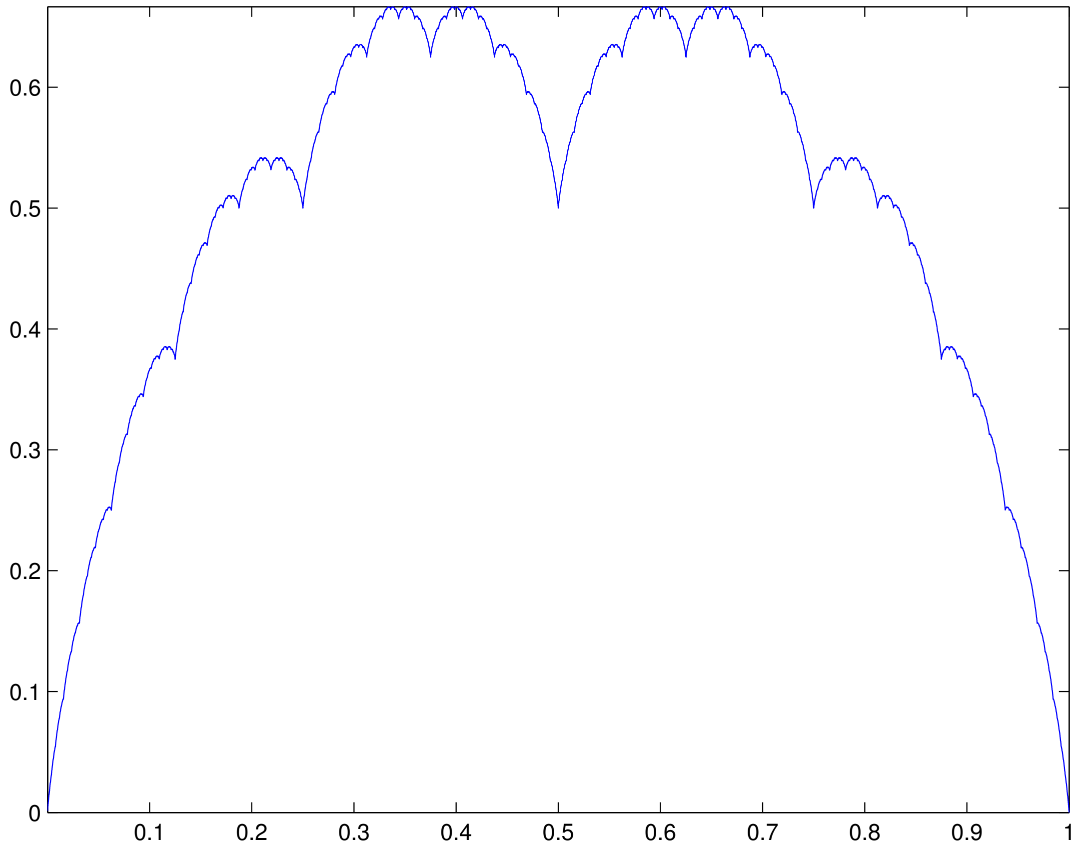

Рис. 1. График функции Такаги
Fig. 1. Graph of the Takagi function

Функция Такаги появляется в различных областях математики (см. обзоры [3, 4]). Изучению свойств функции Такаги посвящены сотни работ. В [4,6] найдено рекуррентное уравнение для моментов этой функции. В настоящей работе находятся асимптотики моментов этой функции.

Моментами функции $T(x)$ будем называть величины

$$M_n = \int_0^1 x^n T(x)\, dx. \tag{2}$$

Де Рам [5] показал, что $T(x)$ является единственным непрерывным решением функционального уравнения

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}T(2x) + x, & 0 \le x \le 1/2, \\ \frac{1}{2}T(2x-1) + 1 - x, & 1/2 \le x \le 1. \end{cases} \tag{3}$$

Рекуррентное уравнение для моментов M_n функции, которая удовлетворяет (3), имеет следующий вид (см. [4,6]):

$$M_0 = \frac{1}{2}, \quad M_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2(2^{n+1}-1)} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} M_k. \tag{4}$$

Основной результат настоящей работы

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$M_n = \frac{\ln n - \Gamma'(1) - \ln \pi}{n^2 \ln 2} + \frac{1}{2n^2} + \frac{2}{n^2 \ln 2}\phi(n) + \mathcal{O}(n^{-3}),$$

где функция

$$\phi(x) = \sum_{k \neq 0} \Gamma\left(\frac{2\pi i k}{\ln 2}\right) \zeta\left(\frac{2\pi i k}{\ln 2}\right) x^{-\frac{2\pi i k}{\ln 2}}$$

является периодической от $\log_2 x$*, а через* $\Gamma(x)$ *и* $\zeta(x)$ *обозначаются гамма и дзета-функции.*

Отметим, что приближение

$$M_n \approx \frac{\ln n - \Gamma'(1) - \ln \pi}{n^2 \ln 2} + \frac{1}{2n^2}$$

справедливо для достаточно больших n, поскольку коэффициенты периодической функции $\phi(x)$ очень малы

$$\frac{2}{\ln 2}\phi(n) \approx -1.6453 * 10^{-6} \cos(2\pi \log_2 n) - 1.9520 * 10^{-6} \sin(2\pi \log_2 n),$$

а следующие слагаемые (при $k = 2$) имеют значение порядка 10^{-12}. Моменты M_n и их приближение показаны на рис. 2.

Доказательство. Приведем доказательство теоремы, которое основано на применении пуассонизации и преобразования Меллина.

Рекуррентное уравнение (4) перепишем в следующем виде:

$$M_n = 2^{-n-2} M_n + 2^{-n-2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M_k + \frac{1 - 2^{-n-1}}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

Введем функцию $M(x)$, положив

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}. \tag{6}$$

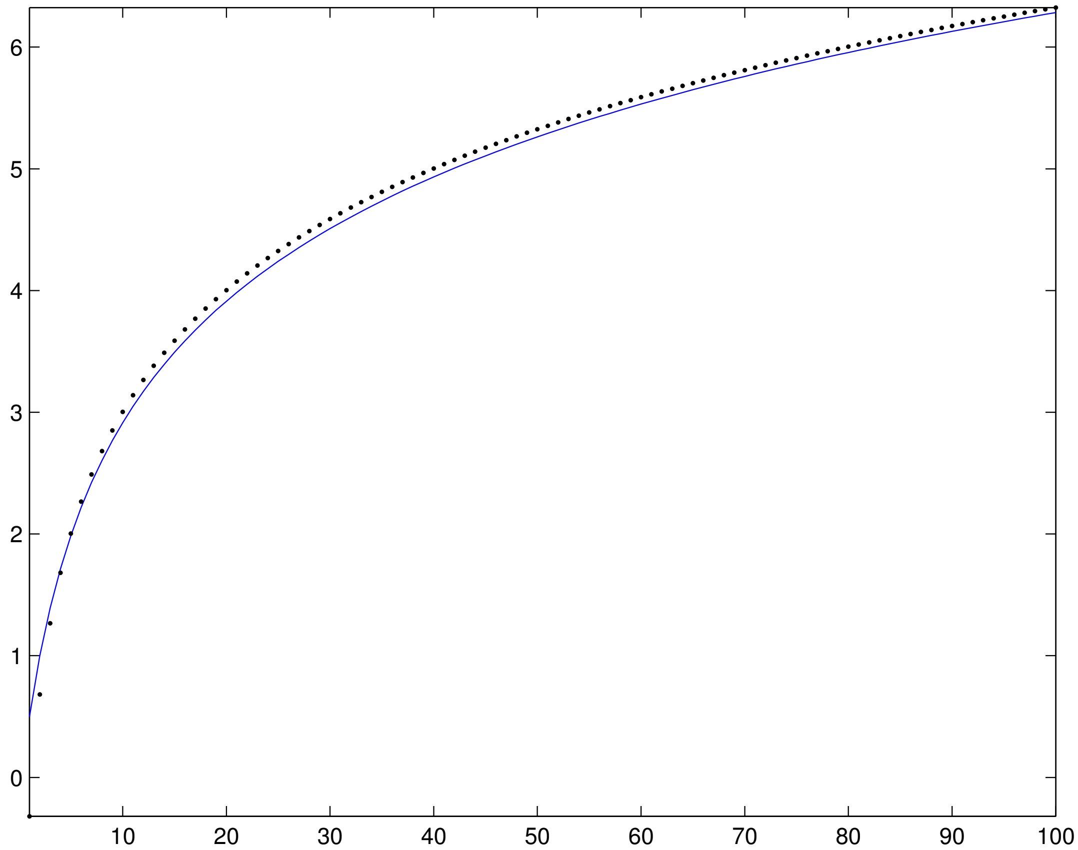

Рис. 2. График величин $n^2 M_n$ и приближения, умноженного на n^2 (точки)
Fig. 2. The graphs of $n^2 M_n$ and its approximation multiplied by n^2 (dotted)

Подставляя (5) в (6), получим

$$M(x) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} M_n \frac{x^n}{n!} e^{-x} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\frac{x^n}{n!} e^{-x} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} M_k + \\ + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} e^{-x} \frac{1-2^{-n-1}}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{4} M\left(\frac{x}{2}\right) e^{-x/2} + \frac{1}{4} M\left(\frac{x}{2}\right) + x^{-2} e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\left(1 - 2^{-n+1}\right) = \\ = \frac{1}{4}\left(1 + e^{-x/2}\right) M\left(\frac{x}{2}\right) + x^{-2}\left(1 - e^{-x/2}\right)^2. \quad (7)$$

Введем вспомогательную функцию $G(x)$, положив

$$G(x) = \frac{x^2}{1 - e^{-x}} M(x). \quad (8)$$

Подставив в (7), получим

$$G(x) = G\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{th}\left(\frac{x}{4}\right). \quad (9)$$

Для нахождения функции $G(x)$ применим преобразование Меллина

$$\tilde{G}(z) = \int_0^\infty G(x)x^{z-1}dx, \tag{10}$$

в результате получим

$$\tilde{G}(z) = 2^z\tilde{G}(z) + \int_0^\infty x^{z-1}\operatorname{th}\left(\frac{x}{4}\right)\,dx.$$

Последний интеграл вычисляется через гамма-функцию и дзета-функцию [7, 1.6.3]. Поэтому в полосе $-1 < \Re z < 0$ имеем

$$\tilde{G}(z) = \frac{(4-2^{z+1})\Gamma(z)\zeta(z)}{1-2^z}. \tag{11}$$

Функцию $\tilde{G}(z)$ можно продолжить на всю комплексную плоскость, в которой она будет иметь полюса:

1) простые — в точках $z=-n$, от функции $\Gamma(z)$, $n=1,2,\ldots$;

2) простые — в точках $z=z_k$, от функции $\frac{1}{1-2^z}$, где

$$z_k = \frac{2\pi i k}{\ln 2}, \quad k \neq 0; \tag{12}$$

3) двойной — в точке $z=0$.

Отметим, что дзета-функция имеет простой полюс в точке $z=1$, но функция $\tilde{G}(z)$ определена при $z=1$.

Применяя обратное преобразование Меллина, получим

$$G(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty}\tilde{G}(z)x^{-z}\,dz, \tag{13}$$

где $0<\sigma<1$.

Для нахождения $G(x)$ по формуле (13) применим теорему о вычетах.

Найдем вычеты функции $\tilde{G}(z)x^{-z}$.

$$\operatorname{Res}\left(\tilde{G}(z)x^{-z},0\right) = \\ -\frac{\left(x^{-z}(4-2^{z+1})\Gamma(z+1)\zeta(z)\right)'_{z=0}}{\ln 2} + \zeta(0) = \\ = \frac{2\zeta(0)\ln x + 2\zeta(0)\ln 2 - 2\zeta(0)\Gamma'(1) - 2\zeta'(0)}{\ln 2} - \frac{1}{2}.$$

Подставляя значения $\zeta(0) = -\dfrac{1}{2}$ [9, 9.535.2], $\zeta'(0) = -\dfrac{1}{2}\ln 2\pi$ [9, 9.542.4], получим

$$\operatorname{Res}\left(\tilde{G}(z)x^{-z},0\right) = -\frac{\ln x - \Gamma'(1) - \ln\pi}{\ln 2} - \frac{1}{2}.$$

$$\operatorname{Res}\left(\tilde{G}(z)x^{-z},z_k\right) = -\frac{2x^{z_k}\Gamma(z_k)\zeta(z_k)}{\ln 2}.$$

Применяя теорему 4 и следствие 1 из работы [2], получим асимптотику $G(x)$ при $x \to \infty$ в следующем виде:

$$G(x) = \frac{\ln x - \Gamma'(1) - \ln \pi}{\ln 2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\ln 2} \sum_{k \neq 0} \Gamma(z_k)\zeta(z_k)x^{-z_k} + \mathcal{O}(x^{-\gamma}), \tag{14}$$

для любого $\gamma > 0$.

Возьмем $\gamma = 2$.

Из (14) и (8) получаем асимптотику функции $M(x)$

$$M(x) = \frac{\ln x - \Gamma'(1) - \ln \pi}{x^2 \ln 2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x^2 \ln 2} \sum_{k \neq 0} \Gamma(z_k)\zeta(z_k)x^{-z_k} + \mathcal{O}(x^{-4}).$$

Поскольку величина $M(x)$ получена усреднением величин M_n (пуассонизацией) и функция $M(x)$ удовлетворяет рекуррентному уравнению (7), то для нахождения величин M_n можно применить теорему 10.5 из [8]. Условия этой теоремы состоят в нахождении числа β, для которого верны следующие пять неравенств для достаточно больших по модулю чисел $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}2^{-\beta} + \frac{1}{4}|e^{-z/2}| &\leq 1 - \eta; \\ |z^{-2}(1 - e^{-z/2})| &\leq B\eta z^{\beta}; \end{aligned}$$

в конусе $S_\theta = \{z \ : \ |\Im z| \leq \theta \Re z\}$, где $0 < \eta < 1$, $0 < \theta < \pi/2$, $B > 0$ – некоторые константы;

и неравенств

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}e^{x/2} &\leq \frac{1}{3}e^{\alpha|z|/2}; \\ \frac{1}{4}|e^{-z/2}|e^{x/2} &\leq \frac{1}{3}e^{\alpha|z|/2}; \\ |z^{-2}(1 - e^{-z/2})|e^{x} &\leq \frac{1}{3}e^{\alpha|z|}; \end{aligned}$$

вне конуса S_θ, где $\alpha < 1$ – некоторая константа.

Нетрудно видеть, что эти неравенства выполняются при любом $\beta > -2$. Следовательно, теорема 10.5 из [8] применима и выполняется оценка

$$M_n = M(n) + \mathcal{O}(n^{-2.99})$$

при $\beta = -1.99$. □

Список литературы / References

[1] Flajolet P., Sedgewick R., *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, 2008.

[2] Flajolet P., Gourdon X., Dumas P., “Mellin transforms and asymptotics: Harmonic sums”, *Theoretical Computer Science*, **144**:1–2 (1995), 3–58.

[3] Jeffrey C. Lagarias, “The Takagi function and its properties”, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B34** (2012), 153–189.

[4] Pieter C. Allaart, Kiko Kawamura, “The Takagi Function: a Survey”, *Real Anal. Exchange*, **37**:1 (2011), 1–54.

[5] De Rham G., “On Some Curves Defined by Functional Equations”, *Classics on Fractals*, ed. Gerald A. Edgar, Addison-Wesley, 1993, 285–298.

[6] Kairies H.-H., Darsow W. F., Frank M. J., “Functional equations for a function of van der Waerden type”, *Rad. Mat.*, **4**:2 (1988), 361–374.

[7] Oberhettinger F., *Tables of Mellin Transforms*, Springer–Verlag, New York, 1974.

[8] Szpankowski W., *Average Case Analysis of Algorithms on Sequences*, John Wiley & Sons, New York, 2001.

[9] Gradstein I. S., Ryzhik I. M., *Table of integrals, Series, and Products*, Academic Press, 1994.

Timofeev E. A., "Asymptotic Formula for the Moments of Takagi Function", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:1 (2016), 5–11.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-1-5-11

Abstract. Takagi function is a simple example of a continuous but nowhere differentiable function. It is defined by

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-n}\rho(2^n x),$$

where

$$\rho(x) = \min_{k\in\mathbb{Z}} |x-k|.$$

The moments of Takagi function are defined as

$$M_n = \int_0^1 x^n T(x)\,dx.$$

The main result of this paper is the following:

$$M_n = \frac{\ln n - \Gamma'(1) - \ln\pi}{n^2\ln 2} + \frac{1}{2n^2} + \frac{2}{n^2\ln 2}\phi(n) + \mathcal{O}(n^{-2.99}),$$

where

$$\phi(x) = \sum_{k\neq 0} \Gamma\left(\frac{2\pi i k}{\ln 2}\right)\zeta\left(\frac{2\pi i k}{\ln 2}\right) x^{-\frac{2\pi i k}{\ln 2}}.$$

Keywords: moments, self-similar, Takagi function, singular, Mellin transform, asymptotic

On the authors:
Timofeev Evgeniy Alexandrovich, orcid.org/0000-0002-0980-2507, ScD, professor
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: timofeevEA@gmail.com