Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 1 (2016), с. 12–22
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 1 (2016), pp. 12–22

©Цирлин А. М., 2015

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-1-12-22

УДК 62-50

Продолжение решения на границе разрыва как решение задачи усредненной оптимизации

Цирлин А. М.

получена 15 мая 2015

Аннотация. Движение объекта, характеризующегося обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) с разрывными правыми частями вдоль поверхности разрыва, называют скользящим режимом. Требуется найти связь правой части уравнения скольжения с характеристиками системы (продолжить решение системы на поверхности разрыва). В статье предложено продолжение, базирующееся на решении задачи усредненной оптимизации. Показано, что для известных примеров решение задачи усредненной оптимизации приводит к результатам, совпадающим с методом А.Ф. Филиппова, и позволяет расширить эти методы на широкий класс многомерных задач. Изложены условия оптимальности усредненной задачи нелинейного программирования и примеры их использования для случаев обычного и вырожденного решения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями, скользящие режимы, усредненная оптимизация

Для цитирования: Цирлин А. М., "Продолжение решения на границе разрыва как решение задачи усредненной оптимизации", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:1 (2016), 12–22.

Об авторах: Цирлин Анатолий Михайлович, orcid.org/0000-0002-3637-6160, д-р техн. наук, профессор,

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН

ул. Петра Первого, 4а, с. Веськово, Переславский р-он Ярославская обл. 152020 Россия, e-mail: tsirlin@sarc.botik.ru

Введение

Скользящие режимы в системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ), являются предметом многочисленных и многолетних исследований (см. [1]– [10]). Краткий обзор их проблематики содержится в статье В.И. Уткина [11].

Общие геометрические представления. Для динамических систем вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \quad x \in R^n$$

условия существования и единственности решения для некоторых x, t могут быть не выполнены. В частности потому, что правая часть дифференциального уравнения для этих значений аргумента может принимать не одно, а несколько значений. Эти значения вектора f называют *возможными скоростями.* Их число К в общем случае может быть любым, а тогда, когда в функцию f входит управление, число возможных скоростей может быть бесконечным. Согласно представлениям, развитым в [12], [13], скорость движения такой системы в направлении γ представляет собой вектор, принадлежащий выпуклой оболочке CoF, направление которого совпадает с γ, где F – множество возможных скоростей в точке x, t. Если $K \leq n$, то выпуклая оболочка F представляет собой плоскость или прямую и пересечение ее с вектором γ в неособом случае единственно, что однозначно определяет вектор скорости системы в выбранном направлении. Если К$>n$, то CoF имеет внутренние точки и скорость системы в направлении γ не единственна. Существуют пределы, в которых она может изменяться.

Применительно к задаче доопределения скорости системы вдоль поверхности скольжения возникают три вопроса:

– Как выбрать направление γ?

– Как найти скорость скольжения в том случае, когда она единственна?

– Как найти предельное значение скорости скольжения в том случае, когда она не единственна?

Целью дальнейшего изложения является ответ на эти вопросы.

Постановка задачи. Задача ставится таким образом:

Рассматривается система

$$\dot{x} = f(x, t, u), \quad x, f \in R^n, \quad u \in R^k. \tag{1}$$

Управление u и непрерывная по u функция f испытывают разрыв на поверхностях $x \in S$, характеризующихся условиями

$$s_i(x) = 0, \quad i = 1, ..., m, \quad m \leq n - 1, \tag{2}$$

так что

$$\begin{aligned} f(x,t,u) &= f_+^i(x,t,u), \quad \text{если} \quad s_i > 0, \\ f(x,t,u) &= f_-^i(x,t,u), \quad \text{если} \quad s_i < 0, \quad i = 1, ..., m. \end{aligned} \tag{3}$$

Функции f_+^i, f_-^i дифференцируемы по x, t. Решение уравнений (1) для любой из них существует и единственно, причем

$$\begin{aligned} \tfrac{ds_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{n} \tfrac{\partial s_i}{\partial x_j} f_{j+}(x,t,u) + \tfrac{\partial s_i}{\partial t} < 0, \\ \tfrac{ds_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{n} \tfrac{\partial s_i}{\partial x_j} f_{j-}(x,t,u) + \tfrac{\partial s_i}{\partial t} > 0, \quad i = 1, ..., m. \end{aligned} \tag{4}$$

Условия притяжения к поверхности переключения (4) выполнены для всех $t > 0$ и $x \in S$. В силу условий (4) система, оказавшись на поверхности переключения, движется вдоль этой поверхности в режиме переключения управления с большой частотой (скользящий режим). Задачей, которую ставили перед собой многочисленные исследователи [12]– [18], было выяснение того, какому уравнению подчинено движение системы вдоль поверхности (2):

$$\dot{x} = f_{sm}(x, t), \quad x(0) \in S. \tag{5}$$

Уравнение (5) называют уравнением скольжения.

В работе А.Ф. Филиппова [12] предложено находить $f_{sm}(x,t)$ для каждого значения x,t как элемент выпуклой оболочки, натянутой на векторы $f_+(x,t)$ и $f_-(x,t)$ и удовлетворяющий условиям скольжения вдоль поверхности разрыва:

$$\frac{ds_i}{dt} = f_{si}(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial s_i}{\partial x_j} f_{sm}^j(x,t) + \frac{\partial s_i}{\partial t} = 0. \tag{6}$$

В статье [11] дано уточнение метода А.Ф. Филиппова и показано, что задачи, вызывавшие сомнения в его справедливости, могут быть решены методом Филиппова с учетом предложенного уточнения. Отметим, что А.Ф. Филипповым рассмотрен только случай, когда вектор скоростей принимает два значения, а поверхность скольжения одномерна, и высказано предположение, что подобный подход можно распространить на многомерные задачи.

Ниже высказана гипотеза, что уравнение скольжения может быть получено как уравнение движения усредненной системы с использованием методов усредненной оптимизации. Это позволяет с использованием стандарных алгоритмов рассмотреть самые разнообразные постановки задач для многомерных систем с разрывными правыми частями.

1. Множество скоростей системы в окрестности поверхности скольжения. Усредненная система

Поверхности $s_i(x) = 0$ разбивают фазовое пространство системы (1) на 2^m подпространств x_r, $r = 1, ..., 2^m$, в каждом из которых может быть свое сочетание знаков s_i, а значит, в каждом из которых может быть свой вектор скоростей $f(x,u,t)$.

Обозначим множество этих векторов через $F(x,u,t)$. В силу (4) множество подпространств x_r и множество скоростей F можно разделить на два подмножества так, что каждому вектору скорости $f_+(x,t,u)$ в одном из подпространств x_r соответствует вектор $f_-(x,t,\ u)$, для которого знаки функций $s_i(x)$ противоположны.

Общее число векторов скоростей системы для фиксированных значений t и $x \in S$ может быть и меньше, чем 2^m. Важно лишь, чтобы в каждом подпространстве x_r были выполнены условия притяжения (4).

Усредненная система

Сопоставим системе (1) усредненную систему уравнений

$$\dot{x} = \overline{f(x,u,t)}^u, \quad x(0) \in S. \tag{7}$$

Здесь

$$\overline{f(x,u,t)}^u = \int\limits_{V_u} f(x,u,t)P(u,x,t)du \tag{8}$$

среднее значение вектора скорости изменения x на множестве возможных управлений $V_u(x,t)$. При этом выбор меры $P(u,x,t)$ ограничен условиями равенства нулю среднего значения скорости изменения каждой из функций $s_i(x,t)$ в силу уравнений (1):

$$\overline{f_{s_i}(x,u,t)}^u = \int\limits_{V_u} f_{s_i}(x,u,t)P(u,x,t)du = 0 \quad i = 1, ..., m. \tag{9}$$

Здесь

$$f_{s_i}(x,u,t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}f_j(x,u,t)+\frac{\partial s_i(x,t)}{\partial t}. \tag{10}$$

Кроме условий (9), функция $P(u,x,t)$ удовлетворяет требованиям:

$$\int\limits_{V_u}P(u,x,t)du=1,\quad P(u,x,t)\ge 0\quad \forall\, u\in V_u. \tag{11}$$

Любая мера $P^0(u,x,t)$, определенная на множестве $V_u(x,t)$ и удовлетворяющая условиям (9), (11), будучи подставлена в уравнения (6), порождает функцию

$$f^0_{sm}(x,t)=\int\limits_{V_u}f(x,u,t)P^0(u,x,t)du, \tag{12}$$

которую назовем скоростью скольжения. Система в скользящем режиме характеризуется уравнениями

$$\dot{x}^0_s=f^0_{sm}(x,t),\quad x_s(0)\in S. \tag{13}$$

Далее покажем, что предложенное доопределение совпадает с доопределением А.Ф. Филиппова для рассмотренных им случаев движения вдоль линии переключения на двумерной фазовой плоскости. Чтобы выяснить, как найти меру $P^0(u,x,t)$, в каком случае она, а значит, и f^0_{sm} единственны и в каком случае таких допустимых мер несколько, остановимся на способах решения усредненных задач оптимизации [19].

2. Решение задач усредненной оптимизации

Напомним, как находят решение $P^*(u)$ усредненной задачи нелинейного программирования:

$$\overline{f_0(u)}\longrightarrow \max\Big/\overline{f_i(u)}=0,\quad i=1,...,m,\quad u\in V_u. \tag{14}$$

Оптимальное решение этой задачи сосредоточено в дискретных точках

$$P^*(u)=\sum_{\nu=0}^{m}\mu_\nu\delta(u-u^\nu), \tag{15}$$

где δ — функция Дирака, u^ν — называют базовыми значениями вектора u.

Базовые значения управления u, размерность которого может быть любой, определяют из решения минимаксной задачи:

$$L(\lambda,u)=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(u)\longrightarrow \min_{\lambda}\max_{u\in V_u}. \tag{16}$$

Множители λ_i не равны нулю одновременно. На оптимальном решении значения функции Лагранжа $L(\lambda^*,u^\nu)$ одинаковы для всех ν. Подчеркнем, что для существования множителей Лагранжа не требуется гладкости функций $f_i(u)$. Достаточно, чтобы они были непрерывны и ограничены. Множество V_u может состоять и из отдельных изолированных точек.

Весовые множители $\mu_\nu \geq 0$ в (15) находят из условий

$$\sum_{\nu=0}^{m} \mu_\nu f_i(u^\nu) = 0, \quad \sum_{\nu=0}^{m} \mu_\nu = 1, \quad i = \overline{1, m}. \tag{17}$$

В ряде задач число базовых значений u заведомо меньше, чем $(m+1)$. В частности, если множество V_u может быть разбито на $r < (m+1)$ подмножеств так, чтобы для каждого из них задача (16) имела единственное решение u^ν, то ν меняется от 1 до r (см. [20]).

Таким образом, решение усредненной задачи состоит из двух этапов. На первом из них находят базовые значения $u = u^\nu$ из решения минимаксной задачи (16), на втором этапе для фиксированных u^ν находят весовые коэффициенты μ_ν по условиям (17).

Подчеркнем, что число базовых значений u не связано с размерностью этого вектора, а зависит только от числа усредненных условий m в задаче (14). Если в задаче (14) вместо требования максимума фигурирует требование минимума, то в (16) max и min меняются местами.

Вырожденный случай. Как и в задаче нелинейного программирования, в усредненной задаче (14) наряду с регулярными могут быть и вырожденные решения. Для вырожденных решений множитель λ_0 в функции Лагранжа равен нулю. Это соответствует случаю, когда система ограничений полностью определяет решение, а следовательно, целевая функция на него не влияет. Такая ситуация имеет место, когда множество $V_u(x, t)$ состоит из дискретных значений вектора u и число этих значений равно $m+1$. В этом случае задача (4) вырождена, в функции Лагранжа $L(\lambda, u)$ множитель $\lambda_0 = 0$, базовые значения известны, а их веса μ_ν определяют из системы линейных уравнений (17), если соответствующая этой системе матрица имеет полный ранг.

Когда число допустимых значений $u \in V_u$ меньше, чем $m+1$, то уравнения (17) в общем случае решения не имеют, а значит, не имеет решения и усредненная задача. Если число допустимых значений $u \in V_u$ больше $(m+1)$, то базовые значения u^ν находят из числа допустимых по условиям (16) с учетом вида целевой функции.

Покажем, к чему приводит доопределение скорости скольжения в форме (12) на некоторых известных примерах.

3. Некоторые примеры [11]

Пример 1. Линейная система второго порядка с релейным управлением.

$$\begin{aligned} &\dot{x_1} = x_2, \quad \dot{x_2} = u, \\ &u = -u_0 \operatorname{sign}(s), \quad s = cx_1 + x_2, \\ &u_0, c > 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Для этой системы выполнены условия притяжения (4) к линии скольжения $s(x_1, x_2) = 0$, $m = 1$. Множество V_u состоит из двух $(m+1)$ элементов, так что эти векторы и являются базовыми. Уравнение скольжения

$$\dot{x_2} = f_{2sm}(x) = u_0\Big[\mu\,\mathrm{sign}\,(cx_1 + x_2) + \\ +(1-\mu)(-\mathrm{sign}(cx_1 + x_2))\Big] = -u_0(2\mu - 1). \tag{19}$$

Весовой множитель μ определен условием

$$\dot{s} = cx_2 + f_{2sm}(x_1, x_2) = 0,$$

откуда

$$\mu = 0,5\left(\frac{cx_2}{u_0} + 1\right).$$

Уравнение скольжения примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= -cx_2. \end{aligned} \tag{20}$$

Пример 2. Наличие малого внешнего воздействия.

$$\dot{x} = Ax + Bu_1 + du_2,$$

$$u_1 = -M_1\,\mathrm{sign}(s); \quad u_2 = -M_2\,\mathrm{sign}(s).$$

$$s(x) = cx = 0.$$

«Управление» u_2 реализовано с использованием реле с гистерезисом и $M_2 << M_1$. Благодаря малости M_2 и гистерезису управление u_2 постоянно по знаку и его знак зависит от начальных условий. В любом случае, как и в примере 1, базовые значения вектора скоростей определены управлением u_1 и таких базовых значений u_1^ν два. От знака u_2, которое правильнее было бы назвать малым по величине внешним фактором, зависят только весовые множители μ_1 и $\mu_2 = 1 - \mu_1$. Причем, при стремлении величины M_2 к нулю, к нулю стремится и различие этих множителей для $u_2 = M_2$ и $u_2 = -M_2$.

В [14] предложен для определения $f_{sm}(x,t)$ метод эквивалентного управления, согласно которому $f_{sm}(x,t) = f(x,t,u_{eq})$. Эквивалентное управление для каждого $t, x \in S$ определяют из условий

$$f_{si}(x,t,u_{eq}) = 0, \quad i = 1, ..., m. \tag{21}$$

В [11] приведен пример, который показывает, что функции $f_{sm}(x,t)$, найденные методом Филиппова и методом эквивалентного управления, различны. Это естественно, ведь эквивалентное управление предполагает подбор такого управления, при котором движение реализуется вдоль поверхности переключения, а метод Филиппова — усреднение зависящих от u скоростей. Скорости движения системы для найденного эквивалентного управления могут быть и не определены. Результаты совпадают, если векторы скорости определены для $u = u_{eq}$ и правые части уравнений движения линейно зависят от u. Между тем в примере, приведенном в [11], одна из скоростей зависит от u^3.

4. Многомерный случай

Доопределение скорости скольжения в усредненной интерпретации нетрудно распространить на случай $x \in R^n$, $s \in R^m$, $m < n$. Множество $V_u(x,t)$ включает конечное либо бесконечное число значений вектора u, из которых можно выбрать $K \leq 2^m$ значений, обеспечивающих выполнение условий притяжения (4).

Остановимся на определении скорости в скользящем режиме движения системы f_{sm} для разных соотношений между n, m и K.

Пусть $K = (m+1)$. В этом случае усредненная задача вырождена, первый этап ее решения о выборе базовых значений векторов скоростей $f^\nu(x,t) = f(x,t,u^\nu)$ отпадает и нужно найти только весовые коэффициенты μ_j по условиям

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial s_i(x,t)}{\partial x_j} f_j(x,t,u^\nu) + \frac{\partial s_i}{\partial t} \right] \mu_\nu = 0, \\ &\sum_{\nu=0}^{m} \mu_\nu(x,t) = 1, \quad \mu_\nu(x,t) \geq 0, \quad i = 1,...,m. \end{aligned} \tag{22}$$

Вектор скорости скольжения

$$f_{sm}(x,t) = \sum_{\nu=0}^{m} \mu_\nu(x,t) f^\nu(x,t). \tag{23}$$

Число векторов скоростей K может быть меньше $(m+1)$. Например, этих векторов может быть два $f^+(x,t)$ и $f^-(x,t)$, а поверхностей скольжения $s_i(x) = 0$ больше единицы. В этом случае переключение между векторами f^+ и f^- определяется знаком лишь одной из функций $s_1(x,t)$, а условия притяжения к другим поверхностям скольжения обеспечены динамическими свойствами системы. Поверхность $s_1(x,t) = 0$ естественно назвать поверхностью переключения. n–мерный вектор скорости системы

$$f_{sm}(x,t) = \mu_0(x,t) f^+(x,t) + \mu_1(x,t) f^-(x,t), \tag{24}$$

где μ_0 и μ_1 определяют из условий (22) для $i = 1$ и при суммировании по ν от нуля до единицы.

В том случае, когда множество допустимых скоростей, обеспечивающих выполнение условий притяжения (4), для всех или для некоторых значений $x \in s, t$ содержит $K > m+1$ элементов, скорость скольжения $f_{sm}(x,t)$ для этих x, t не определена однозначно и набор базовых векторов $f^\nu(x,t) \quad \nu = 1,...,(m+1)$ нужно найти из решения усредненной задачи нелинейного программирования на множестве скоростей. Например, может быть поставлена задача определения максимума скорости скольжения в направлении выбранного вектора $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$, нормированного так, что $\sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_j^2 = 1$:

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \overline{f_j(x,t,u)}^u \longrightarrow \max, \tag{25}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} \overline{f_j(x,t,u)}^u + \frac{\partial s_i}{\partial t} \right) = 0, \quad i = 1,...,m. \tag{26}$$

Здесь усреднение по u производится на множестве скоростей, соответствующих допустимым значениям управления. Так как движение происходит вдоль пересечения поверхностей переключения, вектор γ должен отвечать требованиям:

$$\left(\gamma^T, \frac{\partial s_i}{\partial x}\right) = 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Множество допустимых скоростей может удовлетворять условиям типа

$$f(x,t,u) = \begin{cases} f_+(x,t,u) & \text{при} \quad s(x,t) > 0 \\ f_-(x,t,u) & \text{при} \quad s(x,t) < 0. \end{cases}$$

В этом случае скорость движения системы в скользящем режиме определяется после нахождения базовых значений управления $u^\nu(x,t)$ и соответствующих им векторов скоростей $f^\nu(x,t) = f(x,t,u^\nu)$ из решения усредненной задачи нелинейного программирования. Число этих базовых значений не превосходит $m+1$.

Решению задачи (25), (26) соответствует минимум по λ максимума по u функции Лагранжа

$$L = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j f_j(x,t,u) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial s_i}{\partial x_j} f_j(x,t,u) + \frac{\partial s_i}{\partial t} \right) \longrightarrow \min_{\lambda} \max_{u}. \tag{27}$$

В этой задаче значение λ_0 не равно нулю, а значит, его можно считать равным единице. На оптимальном решении для базовых значений вектора скоростей $f^\nu = f(x,t,u^\nu)$ выражение

$$L^* = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j f_j(x,t,u^\nu) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial s_i}{\partial x_j} f_j(x,t,u^\nu) + \frac{\partial s_i}{\partial t} \right), \tag{28}$$

максимально, а значит, одинаково для всех значений $\nu = 0, ..., m$. Ясно, что базовые скорости f^ν, являющиеся решением усредненной задачи (25), (26), различны для различных направлений γ.

В заключение подчеркнем, что размерность вектора управлений прямо не связана с определением $f_{sm}(x,t)$, так как усреднение производится по скоростям, а не по управлениям. Выбор управлений должен обеспечить лишь выполнение условий притяжения к пересечению поверхностей скольжения $s_i(x) = 0$.

Пример. Система третьего порядка

$$\begin{cases} \dot{x_1} = u_1 & u_1 = -\text{sign}\,(x_1) \\ \dot{x_2} = u_2 & u_2 = -\text{sign}\,(x_2) \\ \dot{x_3} = u_1 u_2. \end{cases} \tag{29}$$

В данном случае $m = 2(s_1 = x_1, s_2 = x_2)$, а число векторов скоростей $K = 4$:

$$f^1 = (1;1;1); \quad f^2 = (1;-1;-1);$$

$$f^3 = (-1;1;-1); \quad f^4 = (-1;-1;1).$$

определена неоднозначно.

Найдем максимальную проекцию f_{sm} на ось x_3.

Усредненная задача (25), (26) примет форму

$$\overline{\sum_{K=1}^{4} f_3^K(x,t)} = \overline{(u_1, u_2)}^K,$$

при условиях

$$\overline{u_1}^K = 0, \quad \overline{u_2}^K = 0.$$

Задача выбора трех базовых значений вектора скоростей из четырех сводится к минимуму по λ от максимума по

$$L = f_3^1 + f_3^2 + f_3^3 = f_3^4 + \lambda_1(f_1^1 + f_1^2 + f_1^3 + f_1^4) + \\ \lambda_2(f_2^1 + f_2^2 + f_2^3 + f_2^4) \longrightarrow \min\nolimits_\lambda \max\nolimits_K . \tag{30}$$

Для $K = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{array}{l} L^1 = 1 + \lambda_1 + \lambda_2 \\ L^2 = -1 + \lambda_1 - \lambda_2 \\ L^3 = -1 - \lambda_1 + \lambda_2 \\ L^4 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2. \end{array}$$

Выберем λ_1 и λ_2 по условию равенства $L^* = L^2 = L^4$

$$1 + \lambda_1 + \lambda_2 = -1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2.$$

Из первого равенства

$$2 + 2\lambda_2 = 0 \longrightarrow \lambda_2 = -1.$$

Из второго равенства

$$2\lambda_1 = 1 - \lambda_1 + 1 \longrightarrow \lambda_1 = 1.$$

Значение $L^* = 1$. Аналогично по условию

$$L^1 = L^3 = L^4,$$

$$1 + \lambda_1 + \lambda_2 = -1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2,$$

получим

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad L^* = 1.$$

По условию $L^2 = L^3 = L^4$ имеем

$$-1 + \lambda_1 - \lambda_2 = -1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2.$$

Откуда

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \quad L^* = -1.$$

Таким образом, из 4-х векторов f^K базовыми являются f^1, f^2 и f^4 или f^1, f^3, f^4.

Максимум скорости скольжения вдоль x_3

$$f_{sm} = \mu_1 f_3^1 + \mu_2 f_3^2 + \mu_4 f_3^4 = \mu_1 - \mu_2 + \mu_4. \tag{31}$$

При этом

$$\mu_1 f_1^1 + \mu_2 f_1^2 + \mu_4 f_1^4 = \mu_1 + \mu_2 - \mu_4 = 0$$

$$\mu_1 f_2^1 + \mu_2 f_2^2 + \mu_3 f_2^4 = +\mu_1 - \mu_2 - \mu_4 = 0$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_4 = 1.$$

Откуда $\mu_1 = \mu_4 = 0,5$, $\mu_2 = 0$. После подстановки весовых множителей в (31) получим

$$f_{sm}^{\max} = 1.$$

Аналогично для минимальной скорости вдоль оси x_3 имеем базовые вектора f^2, f^3, f^4, соответствующие им веса $\mu_2 = \mu_3 = 0,5, \mu_4 = 0$, а $f_{sm}^{\min} = -1$, что полностью совпадает с результатом рассмотрения этого примера в [11].

5. Заключение

Переход к усредненной системе уравнений и доопределение скорости скольжения как средней скорости движения системы, полученной при условии, что средняя скорость изменения всех функций $s_i(x)$, определяющих поверхности переключения, равна нулю, позволяет с использованием чисто формальных процедур усредненной оптимизации выяснить, в каких случаях скорость скольжения может быть найдена однозначно, когда и как могут быть найдены ее предельные значения. Решение задачи не зависит от того, является ли разрывность правых частей уравнения следствием разрыва управления или изменения вида зависимости $f(x, u, t)$ при изменении знака s. Метод эквивалентного управления справедлив только для систем, у которых правые части уравнений движения аффинны по управлению.

Список литературы / References

[1] Bernardo M. di, Kowalczyk P., Nordmark A., “Sliding bifurcations: a novel mechanism for the sudden onset 0f of chaos in dry friction oscillators”, *Int. J. Bif.Chaos*, 2003, № 10, 2935–2948.

[2] Edwards C., Spurgeon S. K., *Sliding Mode Control*, Teylor and Francis, 1998.

[3] Haek O., “Discontinuous differential equations”, *J. Differential Equations*, 1979, № 2, 149–170.

[4] Jefrrey M. R., “Dynamics at a switcing intersection hierarchy,isonomy, and multiple-sliding”, *Physica D*, 2014, № 1, 34–45.

[5] Jefrrey M. R., “Dynamimics at a switching intersection: hierarchy, isonomy, and multiple–sliding”, *SIADS*, 2014, № 3, 1082–1105.

[6] Piltz S. H. , Porter M. A., Maini P. K., “Prey switching with a linear preference trade-off”, *SIAM J. Appl. Math.*, 2014, № 2, 658–682.

[7] Sotomayor J., Teixeira M. A., “Regularization of diskontinuos vector fields”, Proceedings of the International Conference on Differential Equations (Lisboa), 1996, 207–223.

[8] Teixeira M. A., Silva P. R. da, “Regularization and singular perturbation techniques for non-smooth systems”, *Physica D*, 2012, № 22, 1948–1955.

[9] Kuznetsiv Yu. A., Rinaldi S., Gragani A., “One-parametr bifurcations in planar Filippov systems”, *Int. J. Bif. Chaos*, 2003, № 13, 2157–2188.

[10] Varius A., "Special issue on dynamics and bifurcations of nonsmooth systems", *Physica*, 2012, № 22, 1825–2082.

[11] Уткин В. И., "Короткий комментарий к методу А.Ф. Филиппова продолжения решения на границе разрыва", *AuT*, 2015, № 5, 165–174; Utkin V. I., "Brief Comments for the Continuation Method by A.F. Filippov for Solution Continuation on a Discontinuity Set", *Autom. Remote Control*, 2015, № 5, 933–942.

[12] Филиппов А. Ф., "Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью", *Мат. сборник*, 1960, 99–128; [Filippov A. F., "Differentsialnye uravneniya s razryvnoy pravoy chastyu", *Mat. sbornik*, 1960, 99–128, (in Russian).]

[13] Filippov A. F., *Differential Equations with Discontinuous Righhand Sides*, Kluwer Academic Publ., Dortrecht, 1988, (Russian, 1985).

[14] Уткин В. И., *Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления*, Наука, М., 1981; [Utkin V. I., *Skolzyashchie rezhimy v zadachakh optimizatsii i upravleniya*, Nauka, M., 1981, (in Russian).]

[15] Utkin V. I., "Variable structure systems with sliding modes", *IEEE Tras. Automat. Contr.*, 1977, № 22.

[16] Utkin V. I., *Sliding modes in control and optimization*, Springer–Verlag, 1992.

[17] Неймарк Ю. И., "О скользящем режиме релейных систем автоматического регулирования", *AuT*, 1957, № 1; [Neymark J. I., "O skolzjashem regime releynix sistem avtomatisheskogo regulirovanija", *Avtomatika i telemekhanika*, 1957, № 1, (in Russian).]

[18] Цыпкин Я. З., *Теория систем автоматического регулирования*, Гостехиздат, М., 1955; [Zipkin J. Z., *Teorija sistem avtomatisheskogo regulirovanija*, Gostexizdat, M., 1955, (in Russian).]

[19] Цирлин А. М., *Методы усредненной оптимизации и их приложения*, Физматлит, М., 1977; [Tsirlin A. M., *Metody usrednennoy optimizatsii i ikh prilozheniya*, Fizmatlit, M., 1977, (in Russian).]

[20] Розоноэр Л. И., Цирлин А. М., "Оптимальное управление термодинамическими системами", *AuT*, 1983, № 1–3; Rozonoer L. I., Tsirlin A. M., "Optimal control of thermodynamic systems", *Autom. Remote Control.*, 1983, № 1–3.

Tsirlin A. M., "Solution Continuation on a Discontinuity Set", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:1 (2016), 12–22.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-1-12-22

Abstract. The movement of an object characterized by ordinary differential equations (ODE) with discontinuous right-hand sides along the surface of a gap is called a sliding mode. It is required to find the connection of the right-slip characteristics of the system (the system to continue the solution on the surface of the gap). The article prompted a sequel based on the solution of the averaged optimization. It is shown that for the known examples of methods for solving optimization averaged lead to results coinciding with the method of A.F. Filippov and allow to extend these techniques to a wide class of multidimensional problems. Optimality conditions set forth averaged nonlinear programming and examples of their use in the case of ordinary and degenerate solutions.

Keywords: differential equations with discontinuous velocity, sliding modes, averaged optimization

On the authors:

Tsirlin Anatoly Michailovich, orcid.org/0000-0002-3637-6160, Prof,

Program Systems Institute of RAS

Petra 1 str., 4a, Veskovo Jaroslavskoy, 152020, Russia, e-mail: tsirlin@sarc.botik.ru