Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 1 (2016), с. 41–60
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 1 (2016), pp. 41–60

©Кащенко С. А., 2015

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-1-41-60

УДК 517.9

Асимптотические разложения собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота

Кащенко С. А.

получена 15 декабря 2015

Аннотация. Для сингулярно возмущенных уравнений второго порядка исследована зависимость от малого параметра при старшей производной собственных значений первой краевой задачи. Основное предположение состоит в том, что коэффициент при первой производной уравнения является знаком переменной. Это приводит к появлению так называемых точек поворота. В этом случае удалось построить асимптотические разложения по малому параметру всех собственных значений рассматриваемой краевой задачи. Оказалось, что эти разложения определяются поведением коэффициентов только в окрестности точек поворота.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное уравнение, точки поворота, асимптотика, краевая задача, собственные числа

Для цитирования: Кащенко С. А., "Асимптотические разложения собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:1 (2016), 41–60.

Об авторах:

Кащенко Сергей Александрович, orcid.org/0000-0002-8777-4302, доктор физико-математических наук, профессор,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,

ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия,

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,

Каширское ш., 31, 115409, г. Москва, Россия

e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

1. Постановка задачи и формулировка результата

На отрезке $[\alpha, \beta]$ рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$\varepsilon\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = \lambda x \tag{1.1}$$

с малым положительным параметром ε. Будем считать, что коэффициенты $p(t)$ и $q(t)$ дифференцируемы бесконечное число раз. Основное же предположение состоит

в том, что функция $p(t)$ имеет n простых нулей в точках $t_1, \dots, t_n$, принадлежащих интервалу (α, β). Для уравнения (1.1) на отрезке $[\alpha, \beta]$ ставится первая краевая задача. Напомним, что эта задача имеет счетное число простых вещественных собственных чисел $\lambda_j(\varepsilon)$ $(j = 1, 2, \dots)$, которые можно считать занумерованными в порядке убывания. Ранее было установлено [1], что при стремлении ε к нулю существуют пределы собственных чисел $\lambda_j(\varepsilon)$ $(j = 1, 2, \dots)$, и были вычислены соответствующие предельные значения для каждого собственного числа. В настоящей статье будет показано, что функции $\lambda_j(\varepsilon)$ переменного ε бесконечно дифференцируемы в точке $\varepsilon = +0$. Кроме этого, будет дан алгоритм вычисления значений производных этих функций. Отметим, что соответствующие построения опираются на хорошо известные классические результаты теории сингулярно возмущенных уравнений [2]– [7] и специальные методы исследования уравнений второго порядка, связанные с построением "пробных" функций. Особо важны результаты из работ автора [1], [8]– [10].

Введем в рассмотрение числа

$$\nu_{ik} = q(t_k) - \frac{|\dot{p}(t_k)| + \dot{p}(t_k)}{2} - |\dot{p}(t_k)|i, \quad i = 0, 1, \dots; \quad k = 1, \dots, n. \tag{1.2}$$

Расположим их в порядке убывания. Через λ_j обозначим j-ый коэффициент полученного ряда. В [10] было показано, что имеют место предельные равенства

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_j(\varepsilon) = \lambda_j, \quad j = 1, 2, \dots \tag{1.3}$$

Теорема 1. *Имеют место асимптотические представления*

$$\lambda_j(\varepsilon) = \lambda_j + \varepsilon \lambda_j^1 + \varepsilon^2 \lambda_j^2 + \dots, \quad j = 1, 2, \dots \tag{1.4}$$

В (1.4) λ_j^r $(j = 1, 2, \dots; \quad r = 1, 2, \dots)$ – некоторые числа, алгоритм вычисления которых приводится ниже.

Предположим, что для некоторых номеров j_0 и m_1 выполняются соотношения

$$h_1 = \lambda_{j_0} = \dots = \lambda_{j_0 + m_1 - 1}, \tag{1.5}$$

$$\lambda_{j_0 - 1} > h_1 > \lambda_{j_0 + m_1}, \tag{1.6}$$

где положено $\lambda_0 = \infty$. Очевидно, что целое положительное число m_1 не может превзойти числа n. Из определения чисел λ_j и из (1.5) следуют равенства

$$h_1 = \nu_{i_1 k_1} = \dots = \nu_{i_{m_1} k_{m_1}}.$$

Прежде всего введем в рассмотрение функции

$$\varphi(t, \varepsilon) = \frac{1}{|\dot{p}(t_{k_r})|} \left[q(t + t_{k_r}) - h_1 - \frac{1}{2} \dot{p}(t + t_{k_r}) - \frac{\dot{p}(t + t_{k_r})}{4\varepsilon |\dot{p}(t_{k_r})|} \right], \quad r = 1, \dots, m_1. \tag{1.7}$$

Из свойств функций $p(t)$ и $q(t)$ следует, что в окрестности каждой из точек t_{k_r} $(r = 1, \dots, m_1)$ справедливо асимптотическое представление

$$\varphi(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^r(\varepsilon) t^i, \tag{1.8}$$

где коэффициенты $a_i^r(\varepsilon)$ легко вычисляются по значениям в точке $t = 0$ соответствующих производных функций $q(t + t_{k_r})$ и $p(t + t_{k_r})$. Отметим, что имеют место равенства

$$a_0^r = \frac{1}{2} + i_r, \quad r = 1, \dots, m_1, \tag{1.9}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon a_2^r(\varepsilon) = -\frac{1}{4}, \quad r = 1, \dots, m_1. \tag{1.10}$$

Основную роль при реализации алгоритма вычисления коэффициентов ряда (1.4) играют функции

$$f_r(\tau, \varepsilon) = \dot{\psi}_r^2(\tau, \varepsilon)\varphi_r[\psi_r(\tau, \varepsilon), \varepsilon] +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\ddot{\psi}_r(\tau, \varepsilon)}{\dot{\psi}_r(\tau, \varepsilon)} \right) - \frac{\varepsilon \ddot{\psi}_r^2(\tau, \varepsilon)}{4\dot{\psi}_r^2(\tau, \varepsilon)}, \quad r = 1, \dots, m_1. \tag{1.11}$$

Поясним значение величин, входящих в (1.11). Через $\psi_r(\tau, \varepsilon)$ обозначен формальный ряд

$$\psi_r(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^r(\varepsilon)\tau^i, \tag{1.12}$$

где коэффициенты $c_i^r(\varepsilon)$, в свою очередь, также являются формальными рядами вида

$$c_i^r(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j c_{ij}^r. \tag{1.13}$$

Ниже будет изложено правило, с помощью которого определятся коэффициенты последнего ряда. Функция $\varphi_r[\psi_r(\tau, \varepsilon), \varepsilon]$ получается путем формальной подстановки (1.12) вместо переменной t в представлении (1.8).

Определим сначала несколько коэффициентов из (1.13). А именно, будем считать, что

$$c_{10}^r = 1, \quad r = 1, \dots, m_1. \tag{1.14}$$

Равенства (1.14) дают нам возможность представить функции (1.11) в виде формального ряда по степеням переменной τ. Тем самым, приняв во внимание (1.9), (1.10) и (1.14), имеем

$$f_r(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{2} + i_r - \frac{\tau^2}{4\varepsilon} + \sum_{i=0}^{\infty} d_i^r(\varepsilon)\tau^i. \tag{1.15}$$

Коэффициенты рядов (1.13) будем искать методом неопределенных коэффициентов, исходя из тождеств

$$d_i^r(\varepsilon) \equiv 0, \quad i = 2, 3, \dots; r = 1, \dots, m_1. \tag{1.16}$$

Как будет показано ниже, отсюда числа c_{ij}^r однозначно определяются.

Приступим, наконец, непосредственно к определению коэффициентов рядов (1.4). Предварительно введем еще одно обозначение. Положим

$$g_r(\varepsilon) = d_0^r(\varepsilon) + \varepsilon(d_1^r(\varepsilon))^2, \quad r = 1, \dots, m_1. \tag{1.17}$$

Из свойств функций, входящих в определение $g_r(\varepsilon)$, следует, что справедливо представление

$$g_r(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i g_i^r, \quad r = 1, \dots, m_1. \tag{1.18}$$

Отметим, что ряд (1.18), как и все предыдущие ряды, является формальным.

После этого описание алгоритма завершается без труда. Сначала покажем, как определить числа λ_{j+i}^1 $(i = 0, \dots, m_1 - 1)$. Расположим числа g_1^r $(r = 1, \dots, m_1)$ в ряд в порядке убывания. Через $\lambda_{j_0+i}^1$ $(i = 0, \dots, m_1 - 1)$ обозначим соответственно $(i+1)$-ый член полученного ряда.

Для определения остальных коэффициентов рядов (1.4) поступаем следующим образом. Предположим, что наряду с (1.5) и (1.6) выполняются соотношения

$$h_i = \lambda_{j_0+r_i}^i = \dots = \lambda_{j_0+m_i-1}^i, \quad i = 1, \dots, i_0, \tag{1.19}$$

$$\lambda_{j_0+r_{i_0}-1}^{i_0} > h_{i_0} > \lambda_{j_0+m_{i_0}}^{i_0}. \tag{1.20}$$

Отметим, что имеют место неравенства

$$r_{i-1} \le r_i \le m_i \le m_{i-1}.$$

На заключительной стадии поступаем, как и ранее. Расположим в ряд в порядке убывания числа $g_{j_0+r_{i_0}+i}$ $(i = 0, \dots, m_1 - 1)$. Положим затем $\lambda_{j_0+r_{i_0}+i}^{i_0}$ равным соответственно $(i+1)$-му коэффициенту этого ряда. Таким образом, описание алгоритма завершено.

Выпишем в качестве примера значения чисел λ_j^1 и λ_j^2 $(j = 1, 2, \dots)$.

Основную трудность представляет здесь вычисление коэффициентов ряда (1.18). Приведем здесь значения первых двух членов этого ряда. Предварительно введем для краткости записи несколько обозначений. Поскольку вычисления носят независимый характер, то индекс r в (1.18), (1.12) и (1.13) мы в некоторых случаях будем опускать. Положим, далее,

$$b_i = \frac{1}{|\dot{p}(t_{i_r})|} \left[q^{(i)}(t_{i_r}) - \frac{1}{2} p^{(i+1)}(t_{i_r}) \right], \quad i = 1, 2, \dots,$$

а через a_i обозначим значение i-ой производной функции

$$\frac{p^2(t + t_{i_r})}{(t - t_{i_r})^2 |\dot{p}(t_{i_r})|^2}$$

в точке $t = t_{i_r}$.

Для чисел $d_0^r(\varepsilon)$ и $d_1^r(\varepsilon)$, фигурирующих в (1.17), имеют место формулы (в которых опущен индекс r)

$$d_0(\varepsilon) = \left(\frac{1}{2} + i_r\right) c_1^2(\varepsilon) + 3\varepsilon \frac{c_1(\varepsilon)c_3(\varepsilon) - c_2^2(\varepsilon)}{c_1^2(\varepsilon)} - \left(\frac{1}{2} + i_r\right),$$

$$d_1(\varepsilon) = b_1 c_1^3(\varepsilon) + 2c_1(\varepsilon)c_2(\varepsilon) + 4i_r c_1(\varepsilon)c_2(\varepsilon) +$$
$$+ \frac{12\varepsilon}{c_1^3(\varepsilon)} \left(c_1^2(\varepsilon)c_4(\varepsilon) - 2c_1(\varepsilon)c_2(\varepsilon)c_3(\varepsilon) + c_2^3(\varepsilon) \right).$$

Таким образом, первые два коэффициента ряда (1.18) представим в следующем виде:

$$g_1 = (1+2i_r)c_{11} + b_1 + (2+4i_r)c_{20} + 3c_{30} - 3c_{20}^2,$$

$$g_2 = (1+2i_r)c_{12} + \left(\frac{1}{2} + i_r\right)c_{11}^2 - 3c_{11}c_{30} + 3c_{31} - 6c_{20}c_{21} +$$

$$+c_{20}c_{11} + 6b_1c_{11} + 4c_{11}c_{20} + 4c_{21} + 8i_rc_{11}c_{20} + 8i_rc_{21} +$$

$$+24c_{40} - 48c_{20}c_{30} + 24c_{20}^3.$$

Производя соответствующие вычисления, получим такие значения интересующих нас величин:

$$c_{20} = -\frac{a_2}{3}, \quad c_{30} = \frac{1}{12}\left[a_2^2 - 3a_3\right],$$

$$c_{40} = \frac{a_2}{10}\left[\frac{4}{3}a_2 + \frac{7}{2}a_3 - \frac{59}{18}a_2^2\right],$$

$$c_{50} = -\frac{1}{12}\left[22c_{30}^2 + 26a_2^2c_{20}^2 + a_3 + 20a_3c_{30} + 18a_2a_3c_{20} +\right.$$

$$42c_{20}c_{40} + 50a_2c_{20}^3 + 88a_2c_{20}c_{30} + 40a_3c_{20}^2 + 10a_4c_{20} +$$

$$\left.4c_{20}^4 + 22a_2c_{40} + 10a_2^2c_{30} + 2a_2a_4 + 2a_5 + 46c_{20}^2c_{30}\right],$$

$$c_{11} = \frac{4}{3}\left[2c_{20}^2 + 4i_rc_{20}^2 + 6i_rc_{30} + 5b_1c_{20} + b_2\right],$$

$$c_{21} = \frac{2}{3}\left[6c_{20}c_{30} + 4c_{40} + 12i_rc_{20}c_{30} + 8i_rc_{40} + 7b_1c_{30} +\right.$$

$$\left.8b_1c_{20}^2 + 6b_2c_{20} + b_3 - \frac{5}{2}a_2c_{11} - \frac{9}{2}c_{11}c_{20}\right],$$

$$c_{31} = \frac{1}{2}\left[\frac{9}{2}c_{30}^2 + 8c_{20}c_{40} + 5c_{50} + 9i_rc_{30}^2 + 16i_rc_{20}c_{40} +\right.$$

$$10i_rc_{50} + 9b_1c_{40} + 13b^2c_{20}^2 + 8b_2c_{30} + 7b_3c_{20} +$$

$$22b_1c_{20}c_{30} + b_4 + 4b_1c_{20}^3 - \frac{13}{2}c_{11}c_{20} - \frac{13}{2}c_{21} -$$

$$\left.\frac{7}{2}a_2c_{21} - 14a_2c_{11}c_{20} - \frac{3}{2}a_2^2c_{11} - 3a_3c_{11} - 6c_{11}c_{30}\right],$$

$$c_{12} = \frac{4}{3}\left[4c_{20}c_{21} + 4i_rc_{20}c_{21} + 3c_{11}c_{30} + 3c_{31} + 6i_rc_{11}c_{30} +\right.$$

$$6i_rc_{31} + 5b_1c_{21} + 10b_1c_{11}c_{20} + 4b_2c_{11} - \frac{3}{4}c_{11}^2 + 30c_{50} -$$

$$\left.60c_{20}c_{40} - 36c_{30}^2 + 102c_{20}^2c_{30} - 36c_{20}^4\right].$$

2. Вспомогательные утверждения

В данном разделе мы докажем промежуточные утверждения, которые будут играть основную роль при доказательстве теоремы 1. Сначала введем необходимые обозначения. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\varepsilon\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0. \tag{2.1}$$

В статье [10] было подсчитано наибольшее число нулей, которое могут иметь решения этого уравнения на отрезке $[\alpha, \beta]$, когда ε достаточно мало, и выполнены неравенства

$$\frac{\nu_{0k}}{|\dot{p}(t_k)|} \neq j, \quad j = 0, 1, \ldots, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Покажем, как можно определить такое число нулей, когда для некоторых номеров k $(1 \leq k \leq n)$ неравенство (2.2) не имеет места.

Рассмотрим сначала частный случай. Предположим, что функция $p(t)$ лишь один раз на $[\alpha, \beta]$ обращается в нуль в точке $t_1 \in (\alpha, \beta)$. По правилу, изложенному в первом разделе настоящей работы, вычислим числа g_i^1 $(i = 1, 2, \ldots, r)$, фигурирующие в (1.18). Пусть имеют место соотношения

$$\frac{\nu_{01}}{|\dot{p}(t_1)|} = p, \quad p - \quad \text{целое} \quad \text{неотрицательное}, \tag{2.3}$$

$$g_i^1 = 0, \quad i = 1, \ldots, r-1, \tag{2.4}$$

$$g_r^1 \neq 0. \tag{2.5}$$

Лемма 1. *При условиях (2.3), (2.4) и (2.5) существует такое $\varepsilon_0 > 0$ и такое решение $x_0(t, \varepsilon)$ уравнения (2.1), что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ функция $x_0(t, \varepsilon)$ обращается в нуль на отрезке $[\alpha, \beta]$ ровно $p + 1$ раз, если*

$$g_r^1 < 0, \tag{2.6}$$

и имеет ровно $p_1 + 2$ нулей, если

$$g_r^1 > 0. \tag{2.7}$$

При этом число нулей любого другого решения не превосходит числа нулей функции $x_0(t, \varepsilon)$.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $\alpha < 0 < \beta$ и $t_1 = 0$. В уравнении (2.1) произведем замену

$$x = y \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon|\dot{p}(0)|} \int\limits_{\alpha}^{t} p(s)ds\right). \tag{2.8}$$

В результате получим уравнение

$$\varepsilon\ddot{y} + \varphi_1(t, \varepsilon)y = 0, \tag{2.9}$$

где $\varphi_1(t,\varepsilon)$ определяется формулой (1.7). В первую очередь нас будет интересовать поведение решений (2.9) в некоторой достаточно малой окрестности нуля. По аналогии с рассуждениями, приведенными в статье [10], казалось бы естественным вместо рассмотрения свойств решений уравнения (2.9) перейти к изучению „близкого“ к (2.9) и в то же время более простого уравнения

$$\varepsilon\ddot{y} + [\sum_{i=1}^{l} a_i(\varepsilon)t^i]y = 0, \tag{2.10}$$

в котором, по мере надобности, следовало бы распорядиться выбором номера $l > 0$. Однако, в отличие от случая, рассматриваемого в [10], исследование поведения решений уравнения (2.10) здесь затруднено тем, что мы не знаем явного вида общего решения такого уравнения. Чтобы устранить эту трудность, сначала произведем в уравнении (2.9) замену времени

$$t = \psi_1(\tau,\varepsilon), \tag{2.11}$$

где функция $\psi_1(\tau,\varepsilon)$ определяется формулами (1.12) и (1.13). Вопрос о сходимости рядов, фигурирующих в определении $\psi_1(\tau,\varepsilon)$, нас интересовать не будет, поскольку в конечном итоге нам понадобятся лишь их частичные суммы. После того, как мы по некоторому правилу определим коэффициенты $c_i(\varepsilon)$ в (2.11), выберем число $t_0 > 0$ так, чтобы замена времени была обратимой на $\Delta(t_0) = [-t_0, t_0]$. Итак, после преобразования (2.11) получим уравнение

$$\varepsilon\ddot{y} - \varepsilon\frac{\ddot{\psi}_1(\tau,\varepsilon)}{\dot{\psi}_1(\tau,\varepsilon)}\dot{y} + \dot{\psi}_1^2(\tau,\varepsilon)\varphi_1(\psi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)y = 0. \tag{2.12}$$

В результате следующей замены

$$y = \sqrt{\dot{\psi}(\tau,\varepsilon)}z \tag{2.13}$$

от уравнения (2.12) перейдем к уравнению

$$\varepsilon\ddot{z} + f_1(\tau,\varepsilon)z = 0, \tag{2.14}$$

где $f_1(\tau,\varepsilon)$ определяется формулой (1.11). Из свойств функций, фигурирующих в определении $f_1(\tau,\varepsilon)$, а также из (1.9), (1.14) и (1.15) следует, что уравнение (2.14) можно записать в виде

$$\varepsilon\ddot{z} + \left[\frac{1}{2} + p - \frac{\tau^2}{4\varepsilon} + \sum_{i=0}^{l(r)} d_i(\varepsilon)\tau^i + \omega(\tau,\varepsilon)\right] z = 0. \tag{2.15}$$

В (2.15) положено

$$\omega(\tau,\varepsilon) = f_1(\tau,\varepsilon) - \frac{1}{2} - p + \frac{\tau^2}{4\varepsilon} - \sum_{i=0}^{l(r)} d_i(\varepsilon)\tau^i, \tag{2.16}$$

а номер $l(r)$ следует определить как наименьший из тех, для которых

$$\lim_{\tau\to 0}\tau^{(-2r-\delta)}\omega(\tau,\varepsilon)=0,\quad \delta\in(0,1). \tag{2.17}$$

Важную роль в приводимых ниже рассуждениях будет играть тот факт, что для коэффициентов $d_i(\varepsilon)$ $(i=2,\dots,l(r))$ справедливо следующее представление:

$$d_i(\varepsilon)=\frac{\gamma_i}{\varepsilon}c_{i-1}(\varepsilon)+\frac{a_i}{\varepsilon}+\omega(\varepsilon,c_1(\varepsilon),\dots,c_{l_i}(\varepsilon)). \tag{2.18}$$

Отметим, что при выводе (2.18) было учтено первое из равенств (1.14). Поясним значения величин, входящих в (2.18). Прежде всего отметим, что ни одно γ_i не обращается в нуль. Числа a_i $(i=3,\dots,l(r))$ не зависят явно от ε и являются алгебраическими функциями $c_1(\varepsilon),\dots,c_{i-2}(\varepsilon)$ $(a_2=0)$, а $\omega_i(\varepsilon,c_1(\varepsilon),\dots,c_{l_i}(\varepsilon))$ содержат все входящие туда параметры только как сомножители. Формулу (2.18) нетрудно доказать, рассуждая по индукции.

Положим затем в (1.12) и (1.13)

$$c_i^1(\varepsilon)=0,\quad i=l(r)+1,l(r)+2,\dots, \tag{2.19}$$

$$c_{ij}^1=0,\quad i=l(r)+1,l(r)+2,\dots,\quad j=0,1,\dots \tag{2.20}$$

Представление (2.18) и равенства (2.19) и (2.20) дают возможность применить теорему о неявной функции для определения коэффициентов $c_i(\varepsilon)$ $(i=1,\dots,l(r))$ из уравнений

$$\varepsilon d_i(\varepsilon)=0,\quad i=2,\dots,l(r). \tag{2.21}$$

Ясно, что величины $c_i(\varepsilon)$ можно искать в виде (1.13) по методу неопределенных коэффициентов. Нам потребуется лишь знание первых r и $r-1$ коэффициентов $d_0(\varepsilon)$ и $d_1(\varepsilon)$ соответственно. Будем считать, что эти коэффициенты нами определены. Остальные члены рядов (1.13) положим равными нулю.

Итак, функция $\psi_1(\tau,\varepsilon)$ определена. Теперь нужно выбрать число $t_0>0$, чтобы на отрезке $\Delta(t_0)$ замена (2.11) была обратимой. Будем пока изучать решения (2.1) лишь на этом отрезке.

В уравнении (2.15) произведем замену времени

$$\tau=\sqrt{\varepsilon}\xi, \tag{2.22}$$

в результате которой это уравнение запишется так:

$$\ddot z+\left[\frac12+p-\frac{\xi^2}{4}+d_0(\varepsilon)+\sqrt{\varepsilon}d_1(\varepsilon)\xi+\varepsilon^r\omega_0(\xi,\varepsilon)\right]z=0, \tag{2.23}$$

где непрерывная функция $\omega_0(\xi,\varepsilon)$ такова, что она стремится к нулю при стремлении ε к нулю равномерно относительно ξ, удовлетворяющих неравенству

$$|\xi|\le c|\ln\varepsilon|, \tag{2.24}$$

в котором c – произвольное положительное число.

Приведем уравнение (2.23) к более удобному для нас виду. Для этого воспользуемся преобразованием

$$z = u \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} + \sqrt{\varepsilon} d_1(\varepsilon)\xi\right). \tag{2.25}$$

В результате получим уравнение

$$\ddot{u} - s\dot{u} + \left[\varepsilon(d_1(\varepsilon))^2 + d_0(\varepsilon) + p + \varepsilon^2\omega_1(s,\varepsilon)\right] u = 0, \tag{2.26}$$

в котором

$$s = \xi - 2\sqrt{\varepsilon} d_1(\varepsilon),$$
$$\omega_1(s,\varepsilon) = \omega_0\left(s + 2\sqrt{\varepsilon} d_1(\varepsilon), \varepsilon\right).$$

Из определения чисел g_i^1 $(i = 0, \dots, r)$, а также из соотношений (2.4) и (2.5) следует, что

$$g^1(\varepsilon) = \varepsilon^r g_r^1 + O(\varepsilon^{r+\delta}), \quad \delta \in (0,1). \tag{2.27}$$

Используя последнее равенство, рассмотрим наряду с (2.26) более простое уравнение

$$\ddot{u} - s\dot{u} - b(\varepsilon)u = 0, \tag{2.28}$$

где положено для краткости

$$b(\varepsilon) = -p + b_1(\varepsilon), \quad b_1(\varepsilon) = -\varepsilon^r g_r^1.$$

Линейно независимыми решениями уравнения (2.28) являются функции

$$u_r(s,\varepsilon) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b(\varepsilon)(2 + b(\varepsilon)) \dots (2j - 2 + b(\varepsilon))}{(2j)!} s^{2j}, \tag{2.29}$$

$$u_H(s,\varepsilon) = s + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(b(\varepsilon) + 1) \dots (b(\varepsilon) + 2j - 1)}{(2j+1)!} s^{2j+1}. \tag{2.30}$$

Предположим сначала, что выполнено неравенство (2.7). Покажем, что в этом случае у уравнения (2.26) существует решение, имеющее на рассматриваемом промежутке изменения s не менее $p + 2$ нулей, когда ε достаточно мало.

Как ясно из результатов, представленных в [10], одна из функций (2.29) или (2.30) обращается в нуль на всей числовой прямой ровно $p + 2$ раз, а другая $p + 1$ раз. Отметим, что в случае четного p функция $u_r(s,\varepsilon)$ будет иметь $p + 2$ нулей, а при нечетном p решение $u_H(s,\varepsilon)$ будет обращаться в нуль $p + 2$ раз. Обозначим через $s_0(\varepsilon)$ наибольший из всех нулей функций (2.29) и (2.30). Предположим, что справедлива оценка

$$s_0(\varepsilon) \le c|\ln\varepsilon|, \tag{2.31}$$

где положительная постоянная c не зависит от ε, когда ε достаточно мало. Будем, далее, рассматривать только те значения ε, при которых

$$\left[-c\varepsilon^{\frac{1}{2}}|\ln\varepsilon|, c\varepsilon^{\frac{1}{2}}|\ln\varepsilon|\right] \subset \Delta_\tau(t_0),$$

где

$$\Delta_\tau(t_0) = \left[\psi_1^{-1}(-t_0,\varepsilon), \psi_1^{-1}(t_0,\varepsilon)\right].$$

Тогда на отрезке $\left[-c\varepsilon^{\frac{1}{2}}|\ln\varepsilon|, c\varepsilon^{\frac{1}{2}}|\ln\varepsilon|\right]$ определены коэффициенты уравнения (2.26), которые на нем равномерно сходятся к коэффициентам уравнения (2.28) при стремлении ε к нулю. Тем самым мы показали, что при малых ε у уравнения (2.26) найдется решение, имеющее не менее $p+2$ нулей. Очевидно, что такой же вывод справедлив и для уравнения (2.1). Как ясно из [10], большего числа, чем $p+2$, их быть не может. Таким образом, при условии (2.7) лемма будет полностью доказана, если мы обоснуем оценку (2.31).

Разберем случай, когда p четно. Соответствующее утверждение для нечетного p доказывается аналогично, поэтому мы его приводить не будем.

При четном p число $s_0(\varepsilon)$ является наибольшим нулем функции $u_r(s,\varepsilon)$. Нам удобно эту функцию представить следующим образом:

$$u_r(s,\varepsilon) = D(s,\varepsilon) + b_1(\varepsilon)c(\varepsilon)\left[\frac{s^{p+2}}{(p+2)!}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{(2+b_1(\varepsilon))\dots(2i-2+b_1(\varepsilon))}{(p+2i)!}s^{p+2i}\right]. \tag{2.32}$$

В (2.32) положено

$$D(s,\varepsilon) = 1+\sum_{i=1}^{\frac{p}{2}}\frac{b(\varepsilon)(2+b(\varepsilon))\dots(2i-2+b(\varepsilon))}{(2i)!}s^{2i},$$

$$c(\varepsilon) = \frac{b(\varepsilon)(b(\varepsilon)+2)\dots(b(\varepsilon)+p-2)}{p!}.$$

Оценим затем функцию $u_r(s,\varepsilon)$ сверху и снизу через более простые функции. В качестве таких функций возьмем функции, имеющие следующий вид:

$$u(s,\varepsilon,b) = D_b(s,\varepsilon) + b_1(\varepsilon)c(\varepsilon)\exp\left(bs^2\right),$$

где $D_b(s,\varepsilon)$ есть многочлен степени p, аналитически зависящий от ε. Покажем, как можно определить такие числа b_1 и b_2, что выполняются соотношения

$$u(s,\varepsilon,b_1) \le u_r(s,\varepsilon) \le u(s,\varepsilon,b_2), \quad s\in[0,\infty). \tag{2.33}$$

Исходя из (2.32), существование таких b_1 и b_2 будет доказано, если удастся для некоторых значений $\overline{b}_1$ и $\overline{b}_2$ установить неравенства

$$\frac{s^{p+2}}{(p+2)!}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{(2+b_1(\varepsilon))\dots(2i-2+b_1(\varepsilon))}{(p+2i)!}s^{p+2i} \le \exp\left(\overline{b}_2, s^2\right) \tag{2.34}$$

и

$$\frac{s^{p+2}}{(p+2)!}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{(2+b_1(\varepsilon))\dots(2i-2+b_1(\varepsilon))}{(p+2i)!}s^{p+2i} \ge \exp\left(\overline{b}, s^2\right) - \sum_{i=2}^{\frac{p}{2}}\frac{(\overline{b})^i s^{2i}}{i!}. \tag{2.35}$$

Неравенство (2.34) будет выполнено, например, при $\overline{b}_2 = 1$ и малых ε, поскольку оно является следствием более грубого неравенства

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{(2i)!!}{(p+2i)!}-\frac{1}{i!}\right)s^{2i+p}\le 0,$$

которое легко установить, применив метод математической индукции. В (2.35) можно положить $\overline{b}_1 = \frac{1}{(p+2i)!}$, поскольку, заменив $b_1(\varepsilon)$ на 1, будем иметь оценку

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(2i-1)!!}{(p+2i)!}s^{2i+p}\ge\sum_{i=\frac{p}{2}+1}^{\infty}\frac{1}{i![(p+2)!]^i}s^{2i}.$$

Таким образом, (2.33) будет иметь место, если b_1 и b_2 определить так:

$$b_1=\begin{cases}\overline{b}_1, & \text{если} \quad c(\varepsilon)<0,\\ \overline{b}_2, & \text{если} \quad c(\varepsilon)>0,\end{cases}$$

$$b_2=\begin{cases}\overline{b}_2, & \text{если} \quad c(\varepsilon)<0,\\ \overline{b}_1, & \text{если} \quad c(\varepsilon)>0,\end{cases}$$

а через $D_{b_1}(s,\varepsilon)$ и $D_{b_2}(s,\varepsilon)$ обозначить многочлены

$$D_{b_j}(s,\varepsilon)=D(s,\varepsilon)+b_1(\varepsilon)c(\varepsilon)\sum_{i=0}^{p/2}\frac{b_j^i}{i!}s^{2i},\quad j=1,2.$$

Заметим, что все функции, фигурирующие в неравенствах (2.33), при стремлении s к бесконечности одновременно стремятся либо к ∞, либо к $-\infty$. На основании этого и из (2.33) следует, что значение $s_0(\varepsilon)$ не превосходит числа $\overline{s}_0(\varepsilon)$, являющегося наибольшим из всех нулей функций $u(s,\varepsilon,b_1)$ и $u(s,\varepsilon,b_2)$. Покажем, что для некоторого $c>0$ имеет место неравенство

$$\overline{s}_0(\varepsilon)\le c|\ln\varepsilon|, \tag{2.36}$$

из которого, очевидно, будет следовать оценка (2.31). В точке $\overline{s}_0(\varepsilon)$ имеем

$$D_{b_j}(\overline{s}_0(\varepsilon),\varepsilon)+b_1(\varepsilon)c(\varepsilon)\exp\left(b_j(\overline{s}_0(\varepsilon))^2\right)=0,$$

где либо $j=1$, либо $j=2$. Отсюда вытекает новое равенство

$$(\overline{s}_0(\varepsilon))^2=\frac{1}{b_j}\ln|D_{b_j}(\overline{s}_0(\varepsilon),\varepsilon)|-\ln|b_1(\varepsilon)|-\ln|c(\varepsilon)|.$$

Оценка (2.31) непосредственно следует из последнего равенства. Итак, лемма 1 при условии (2.7) доказана.

Пусть имеет место неравенство (2.6). Доказательство соответствующего утверждения проведем в три этапа.

Первый этап. На этом этапе мы обоснуем два неравенства, носящие вспомогательный характер. Введем сначала в рассмотрение функцию

$$u(s,\varepsilon,g)=\begin{cases}1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\overline{b}(\varepsilon)(2+\overline{b}(\varepsilon))\ldots(2i-2+\overline{b}(\varepsilon))}{(2i)!}s^{2i}, & \text{если} \quad p \quad \text{четно},\\ s+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\overline{b}(\varepsilon)+1)\ldots(\overline{b}(\varepsilon)+2i-1)}{(2i+1)!}s^{2i+1}, & \text{если} \quad p \quad \text{нечетно},\end{cases} \tag{2.37}$$

где положено

$$-\overline{b}(\varepsilon) = p + \varepsilon^r g. \tag{2.38}$$

Параметр g, фигурирующий в (2.38), таков, что $g \in (g_r^1, 0)$. Обозначим через $s(g, \varepsilon)$ наибольший нуль (если таковые вообще существуют) функции $u(s, \varepsilon, g)$. Покажем, что имеет место неравенство

$$s(g, \varepsilon) \le c, \tag{2.39}$$

в котором c не зависит от ε. Отметим, что функция $u(s, \varepsilon, g)$ является решением дифференциального уравнения

$$\ddot{u} - s\dot{u} - \overline{b}(\varepsilon)u = 0. \tag{2.40}$$

Отсюда следует, что функция

$$v(s, \varepsilon, g) = \frac{s}{2} - \frac{\dot{u}(s, \varepsilon, g)}{u(s, \varepsilon, g)} \tag{2.41}$$

есть решение уравнения Риккати

$$\dot{v} = v^2 + \frac{1}{2} - b(\varepsilon) - \frac{s^2}{4}. \tag{2.42}$$

Функция (2.41) изучалась в [10]. Используя полученные там результаты, легко показать, что непрерывная на интервале $(s(g, \varepsilon), \infty)$ функция $v(s, \varepsilon, g)$ обращается в нуль в двух точках $\underline{s}(g, \varepsilon)$ и $\overline{s}(g, \varepsilon)$, причем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{s}(g, \varepsilon) = \infty. \tag{2.43}$$

Неравенство (2.39) будет установлено, если мы покажем, что для некоторого $c > 0$

$$\underline{s}(g, \varepsilon) \le c.$$

Последнее неравенство вытекает непосредственно из (2.42) и того, что

$$\dot{v}(\underline{s}(g, \varepsilon), \varepsilon, g) > 0.$$

Установим, далее, справедливость оценки

$$\overline{s}(g, \varepsilon) \le c_0 |\ln \varepsilon|. \tag{2.44}$$

Доказательство (2.44) проведем в предположении, что p четно. При нечетном p доказательство проводится аналогично, поэтому мы его опустим.

Прежде всего отметим формулу

$$sw(s, \varepsilon) \equiv v(s, \varepsilon, g)u(s, \varepsilon, g) = s \left[\frac{1}{2} - b(\varepsilon) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overline{b}(\varepsilon)(2 + \overline{b}(\varepsilon)) \dots (\overline{b}(\varepsilon) + 2i - 2)}{(2i)!} \left(\frac{1}{2} + \frac{\overline{b}(\varepsilon) - 1}{2i + 1} \right) \right]. \tag{2.45}$$

Очевидно, что все нули функции $v(s,\varepsilon,g)$, кроме $s=0$, и только они являются в то же время нулями функции $w(s,\varepsilon)$. Нам будет удобно работать с последней функцией. При доказательстве нужной оценки для наибольшего нуля функции $w(s,\varepsilon)$ поступаем так же, как и при доказательстве неравенства (2.31). Укажем такие положительные значения b_1 и b_2, чтобы выполнялись соотношения

$$D_1(s,\varepsilon)+b_1(\varepsilon)c(\varepsilon)\exp\left(b_1s^2\right)\le w(s,\varepsilon)\le$$

$$D_2(s,\varepsilon)+b_1(\varepsilon)c(\varepsilon)\exp\left(b_2s^2\right), \tag{2.46}$$

где $D_i(s,\varepsilon)$ $(i=1,2)$ – некоторые многочлены, аналитически зависящие от ε, явный вид которых нас не интересует. В (2.46) коэффициент $c(\varepsilon)$ таков, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}c(\varepsilon)=c^0\ne 0.$$

Неравенства (2.46) будут доказаны, если найдутся такие положительные $\overline{b}_1$ и $\overline{b}_2$, при которых

$$\sum_{i=\frac{p}{2}+1}^{\infty}\frac{\overline{b}_1^{\,i}}{i!}s^{2i}\le\sum_{i=\frac{p}{2}+1}^{\infty}\frac{(2i-p+\overline{b}(\varepsilon))\dots(2-p+\overline{b}(\varepsilon))}{(2i)!}\left(\frac{\overline{b}(\varepsilon)-1}{2i+1}+\frac{1}{2}\right)s^{2i} \tag{2.47}$$

и

$$\overline{w}(s,\varepsilon)\le\sum_{i=\frac{p}{2}+1}^{\infty}\frac{(\overline{b}_2)^i}{i!}s^{2i}, \tag{2.48}$$

где через $\overline{w}(s,\varepsilon)$ обозначена правая часть неравенства (2.47). Соотношение (2.47) будет иметь место, например, при $\overline{b}_1=(24(p+2)!)^{-1}$, поскольку,

$$\overline{w}(s,\varepsilon)\ge\frac{1}{3}\sum_{i=\frac{p}{2}+1}^{\infty}\frac{(2i-p-1)!!}{(2i)!}s^{2i}\ge\sum_{i=\frac{p}{2}+1}^{\infty}\frac{1}{i!(24(p+2)!)^i}s^{2i}.$$

Неравенство (2.48) легко проверить для $\overline{b}_2=1$, если воспользоваться соотношением

$$\overline{w}(s,\varepsilon)\le\sum_{i=\frac{p}{2}+1}^{\infty}\frac{(2i-2)!!}{(2i)!}s^{2i}.$$

Для завершения доказательства оценки (2.44) следует воспользоваться рассуждениями, уже проводившимися ранее при обосновании неравенства (2.31).

Второй этап. Введем в рассмотрение отрезки

$$\Delta(t_0,\varepsilon)=\left[\left(-t_0+\tau_1(\varepsilon)+2\sqrt{\varepsilon}d_1(\varepsilon)\right)\varepsilon^{-\frac{1}{2}},\left(t_0+\tau_2(\varepsilon)+2\sqrt{\varepsilon}d_1(\varepsilon)\right)\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Функции $\tau_i(\varepsilon)$ $(i=1,2)$ параметра ε, фигурирующие в определении $\Delta(t_0,\varepsilon)$, являются соответственно решениями уравнений

$$\psi(-t_0+\tau_1(\varepsilon),\varepsilon)=-t_0,\quad \psi(t_0+\tau_2(\varepsilon),\varepsilon)=t_0.$$

В силу определения функции $\psi(\tau,\varepsilon)$ эти уравнения однозначно разрешимы, если t_0 и ε достаточно малы. Численные значения $\tau_1(\varepsilon)$ и $\tau_2(\varepsilon)$ нас не будут интересовать. Отметим только, что $\tau_i(\varepsilon)$ гладко зависит от ε и, выполняются равенства

$$\lim_{\varepsilon,t_0\to 0}\frac{\tau_i(\varepsilon)}{t_0}=0,\quad i=1,2. \tag{2.49}$$

Целью настоящего этапа является обоснование того факта, что при малых ε у уравнения (2.26) найдется решение, имеющее на отрезке $\Delta(t_0,\varepsilon)$ ровно p нулей.

Обозначим через $u(s,\varepsilon)$ решение уравнения (2.26), начальные условия которого при $s=0$ совпадают с начальными условиями функции $u(s,\varepsilon,g)$, определенной равенством (2.37) при $g=g_r^1$. Из результатов статьи [10] следует, что $u(s,\varepsilon,g_r^1)$ обращается в нуль ровно p раз. Отметим, что функция $u(s,\varepsilon)$ сходится к $u(s,\varepsilon,g_r^1)$ при стремлении ε к нулю равномерно на каждом конечном промежутке и, далее, выполняется оценка (2.39). Отсюда следует, что при малых ε функция $u(s,\varepsilon)$ обращается в нуль ровно p раз на отрезке $[-c,c]$. Обозначим самый левый нуль $u(s,\varepsilon)$ на этом отрезке, если таковые существуют, через $\underline{s}(\varepsilon)$, а самый правый – через $\overline{s}(\varepsilon)$. Введем, наконец, в рассмотрение отрезки

$$\Delta_1(\varepsilon)=\left[\left(-t_0+\tau_1(\varepsilon)+2\sqrt{\varepsilon}d_1(\varepsilon)\right)\varepsilon^{-\frac{1}{2}},\underline{s}(\varepsilon)\right],$$

$$\Delta_2(\varepsilon)=\left[\overline{s}(\varepsilon),\left(t_0+\tau_2(\varepsilon)+2\sqrt{\varepsilon}d_1(\varepsilon)\right)\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Если $p=0$, то положим

$$\Delta_1(\varepsilon)=\Delta_2(\varepsilon)=\Delta(t_0,\varepsilon).$$

Последующие рассуждения будут посвящены обоснованию того факта, что решения уравнения (2.26) не осциллируют на отрезках $\Delta_1(\varepsilon)$ и $\Delta_2(\varepsilon)$, когда ε достаточно мало. Очевидно, тем самым будет доказано, что функция $u(s,\varepsilon)$ обращается в нуль ровно p раз на $\Delta(t_0,\varepsilon)$ при малых ε. Для доказательства неосцилляции воспользуемся вариантом критерия Валле–Пуссена [7]. Построим такую функцию $z_0(s,\varepsilon)$, которая обладала бы следующими свойствами.

Во-первых, она непрерывна на отрезках $\Delta_1(\varepsilon)$ и $\Delta_2(\varepsilon)$, когда $p\neq 1$, и непрерывна лишь на полуинтервалах

$$\left[\left(-t_0+\tau_1(\varepsilon)+2\sqrt{\varepsilon}d_1(\varepsilon)\right)\varepsilon^{-\frac{1}{2}},\underline{s}(\varepsilon)\right),\left(\overline{s}(\varepsilon),\left(t_0+\tau_2(\varepsilon)+2\sqrt{\varepsilon}d_1(\varepsilon)\right)\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right],$$

когда $p=1$, причем в последнем случае будут иметь место предельные равенства

$$\lim_{s\to\underline{s}(\varepsilon)-0}z_0(s,\varepsilon)=\infty,\qquad \lim_{s\to\overline{s}(\varepsilon)-0}z_0(s,\varepsilon)=-\infty. \tag{2.50}$$

Отметим сразу же, что при $p=1$ выполняются равенства

$$\underline{s}(\varepsilon)\equiv\overline{s}(\varepsilon)\equiv 0.$$

Во-вторых, для значений, принадлежащих $\Delta_1(\varepsilon)\bigcup\Delta_2(\varepsilon)$, будет выполняться дифференциальное неравенство

$$D^*z_0(s,\varepsilon)\geq z_0^2(s,\varepsilon)+\frac{1}{2}-b(\varepsilon)-\frac{s^2}{4}+\overline{w}(s,\varepsilon), \tag{2.51}$$

где $\overline{w}(s,\varepsilon) = w_1(s,\varepsilon) + g(\varepsilon) - \varepsilon^r g_r^1$, а через $D^* z_0(s,\varepsilon)$ обозначено правое верхнее производное число функции $z_0(s,\varepsilon)$.

Функцию $z_0(s,\varepsilon)$ определим следующим образом:

$$z_0(s,\varepsilon) = \begin{cases} v(s,\varepsilon,g), & \text{при} \quad |s| \le \overline{s}(g,\varepsilon), \quad s \in \Delta_1(\varepsilon) \bigcup \Delta_2(\varepsilon), \\ 0, & \text{при} \quad |s| > \overline{s}(g,\varepsilon), \quad s \in \Delta_1(\varepsilon) \bigcup \Delta_2(\varepsilon), \end{cases} \tag{2.52}$$

где $v(s,\varepsilon,g)$ и $\overline{s}(g,\varepsilon)$ определены по правилу, изложенному на предыдущем этапе. Покажем, что функция (2.52) удовлетворяет дифференциальному неравенству (2.51), когда ε достаточно мало. Остальные требования, наложенные на $z_0(s,\varepsilon)$, выполняются очевидным образом.

При $s \in \Delta_1(\varepsilon) \bigcup \Delta_2(\varepsilon)$ и $|s| \le \overline{s}(g,\varepsilon)$ неравенство (2.51) будет выполнено, если

$$g - g_r^1 \ge \max \overline{w}(s,\varepsilon), \quad |s| \le \overline{s}(g,\varepsilon).$$

Справедливость этого неравенства вытекает из определения $\overline{w}(s,\varepsilon)$ и g, а также из соотношений (2.24), (2.27) и (2.44). Прежде чем обосновывать (2.51) для $s \in \Delta_1(\varepsilon) \bigcup \Delta_2(\varepsilon)$ и $|s| > \overline{s}(g,\varepsilon)$, введем несколько обозначений. Будем считать, что

$$\min |\dot{\psi}_1(\tau,\varepsilon)| \ge c_0 > 0 \tag{2.53}$$

для всех рассматриваемых значений τ и $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, где ε_0 достаточно мало. Этого всегда можно добиться за счет уменьшения t_0. Далее, положим

$$l_0 \ge \frac{1}{c_0} \max_{\tau} [4 f_1(\tau,\varepsilon) - \frac{\dot{\psi}_1^2(\tau,\varepsilon) p^2(\psi_1(\tau,\varepsilon))}{\varepsilon}].$$

В последнем неравенстве функция $f_1(\tau,\varepsilon)$ определяется формулой (1.15).

Таким образом, неравенство (2.51) для указанных значений s будет выполнено, если

$$|p(\psi_0(s,\varepsilon))| > \sqrt{l_0 \varepsilon}, \tag{2.54}$$

где через $\psi_0(s,\varepsilon)$ обозначена функция $\psi_0(s,\varepsilon) = \psi_1(\sqrt{\varepsilon} s + 2\varepsilon d_1(\varepsilon),\varepsilon)$. Из свойств функции $p(t)$ вытекает, что неравенство (2.54) эквивалентно неравенству

$$|\psi_0(s,\varepsilon) + O(\psi_0(s,\varepsilon))| > \sqrt{l_0 \varepsilon},$$

справедливость которого следует из определения $\psi_0(s,\varepsilon)$ и из предельного равенства (2.43). Тем самым справедливость дифференциального неравенства (2.51) для всех рассматриваемых s доказана.

Мы показали, что при малых ε уравнение (2.26) имеет решение, количество нулей которого на отрезке $\Delta(t_0,\varepsilon)$ равно p. Отсюда можно сделать вывод, что существуют такие $\varepsilon_0 > 0$, $t_0 > 0$ и такое решение $y_0(t,\varepsilon)$ уравнения (2.9), что при всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ функция $y_0(t,\varepsilon)$ имеет на отрезке $[-t_0, t_0]$ ровно p нулей. Используя результаты [10], приходим к выводу, что при этом найдется решение (2.9), число нулей которого на этом же отрезке равно $p+1$.

Третий этап. На этом этапе будет завершено обоснование леммы 1. Сначала введем в рассмотрение функцию

$$u_0(s,\varepsilon) = \begin{cases} \exp\left(\int\limits_{-\overline{s}(g,\varepsilon)}^{s} z_0(\sigma,\varepsilon)d\sigma\right), & s \in \Delta_1(\varepsilon), \\ \exp\left(\int\limits_{s}^{\overline{s}(g,\varepsilon)} z_0(\sigma,\varepsilon)d\sigma\right), & s \in \Delta_2(\varepsilon). \end{cases} \tag{2.55}$$

На основании (2.51) делаем вывод, что эта функция при $s \in \Delta_1(\varepsilon) \bigcup \Delta_2(\varepsilon)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\ddot{u}_0(s,\varepsilon) - s\dot{u}_0(s,\varepsilon) + f_1(\sqrt{\varepsilon}s + 2\varepsilon d_1(\varepsilon),\varepsilon)u_0(s,\varepsilon) \le 0.$$

Выполним затем в последнем выражении замены, обратные к (2.25), (2.22) и (2.13). В результате вместо $u_0(s,\varepsilon)$ мы получим некоторую функцию $y_0(t,\varepsilon)$, которая будет обладать следующими свойствами. Во-первых, при малых ε и при всех

$$t \in [-t_0, \underline{t}(\varepsilon)] \bigcup [\overline{t}(\varepsilon), t_0],$$

где положено

$$\underline{t}(\varepsilon) = \psi_1(-\sqrt{\varepsilon}\overline{s}(\varepsilon) + 2\varepsilon d_1(\varepsilon),\varepsilon)$$

и соответственно

$$\overline{t}(\varepsilon) = \psi_1(\sqrt{\varepsilon}\overline{s}(\varepsilon) + 2\varepsilon d_1(\varepsilon),\varepsilon),$$

выполняется дифференциальное неравенство

$$\varepsilon\ddot{y}_0 + \varphi_1(t,\varepsilon)y_0(t,\varepsilon) \le 0. \tag{2.56}$$

Во-вторых, как ясно из (2.52), (2.55) и (2.13), имеет место тождество

$$y_0(t,\varepsilon) \equiv \sqrt{\dot{\psi}(\psi^{-1}(t,\varepsilon),\varepsilon)}, \quad t \in [-t_0, \underline{t}(g,\varepsilon)] \bigcup [\overline{t}(g,\varepsilon), t_0].$$

В последней формуле через $\underline{t}(g,\varepsilon)$ и $\overline{t}(g,\varepsilon)$ обозначены величины

$$\underline{t}(g,\varepsilon) = \psi_1(-\sqrt{\varepsilon}\overline{s}(g,\varepsilon) + 2\varepsilon d_1(\varepsilon),\varepsilon),$$

$$\overline{t}(g,\varepsilon) = \psi_1(\sqrt{\varepsilon}\overline{s}(g,\varepsilon) + 2\varepsilon d_1(\varepsilon),\varepsilon).$$

Доказательство леммы будет полностью закончено, если мы покажем, что функцию $y_0(t,\varepsilon)$ можно так продолжить на весь промежуток $[\alpha, -t_0] \bigcup [t_0, \beta]$, чтобы $y_0(t,\varepsilon)$ оставалась положительной, и сохранялось бы дифференциальное неравенство (2.56). При этом, может быть, придется уменьшить несколько t_0 и ε_0.

Прежде всего отметим, что имеют место предельные равенства

$$\lim_{\substack{t_0\to 0\\ \varepsilon\to 0}} y_0(\pm t,\varepsilon) = 1, \quad \lim_{\substack{t_0\to 0\\ \varepsilon\to 0}} \dot{y}_0(\pm t,\varepsilon) = \lim_{\substack{t_0\to 0\\ \varepsilon\to 0}} \ddot{y}_0(\pm t,\varepsilon) = 0. \tag{2.57}$$

Далее, положим

$$y_0(t,\varepsilon) = \begin{cases} y_0(t,\varepsilon), \quad t \in [-t_0, \underline{t}(\varepsilon)] \bigcup [\overline{t}(\varepsilon), t_0], \\ \ddot{y}_0(-t_0,\varepsilon)(t+t_0)^2 + \dot{y}_0(-t_0,\varepsilon)(t+t_0) + y_0(-t_0,\varepsilon), \quad t \in [\alpha, -t_0], \\ \ddot{y}_0(t_0,\varepsilon)(t-t_0)^2 + \dot{y}_0(t_0,\varepsilon)(t-t_0) + y_0(t_0,\varepsilon), \quad t \in [t_0, \beta]. \end{cases} \tag{2.58}$$

Равенства (2.57) обеспечивают положительность функции $y_0(t,\varepsilon)$ на промежутках $[\alpha, -t_0]$ и $[t_0, \beta]$, когда $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и ε_0 и t_0 достаточно малы. Остается проверить лишь (2.56), когда t принадлежит этим отрезкам. На промежутке $[\alpha, -t_0]$ имеем

$$\varepsilon\ddot{y}_0(t_0,\varepsilon) + \varphi_1(t,\varepsilon)y_0(t_0,\varepsilon) =$$

$$= 2\varepsilon\ddot{y}_0(-t_0,\varepsilon) + \frac{1}{|\dot{p}(0)|}\left[\frac{2q(t) - \dot{p}(t)}{2} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon|\dot{p}(0)|}\right] y_0(t_0,\varepsilon).$$

Отсюда доказательство того факта, что правая часть последнего равенства отрицательна, когда t_0 и ε_0 малы, завершается ссылкой на (2.57) и (2.58). Аналогично обосновывается неравенство (2.56) для $t \in [t_0, \beta]$. Таким образом, лемма доказана.

Сделаем одно замечание. Можно показать, что в общем случае ряды (1.8) и (1.18) не являются сходящимися даже при условии аналитичности коэффициентов $p(t)$ и $q(t)$.

Сформулируем еще одно утверждение, относящееся к дифференциальному уравнению (2.1). Мы рассмотрим общий случай, когда функция $p(t)$ имеет нули в точках $t_1, \ldots, t_n$ интервала (α, β).

Обозначим через $\Delta_k \subset [\alpha, \beta]$ $(k = 1, \ldots, n)$ непересекающиеся отрезки $[t_k - t_0, t_k + t_0]$. Наибольшее число нулей (2.1) на каждом из Δ_k, положим равным соответственно $p_k(\varepsilon)$. Предположим, что для каждого рассматриваемого k выполняется либо соотношение (2.2), либо найдется в выражении (1.18) хотя бы один ненулевой коэффициент. Тогда, как следует из [10] и из леммы 1, $p_k(\varepsilon)$ $(k = 1, \ldots, n)$ не зависит от ε, если ε достаточно мало.

Лемма 2. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ найдется решение уравнения (2.1), которое обращается в нуль на отрезке $[\alpha, \beta]$ ровно p_0 раз, где*

$$p_0 = -n + 1 + \sum_{k=1}^{n} p_k \quad (p_k = p_k(\varepsilon) = const).$$

При этом количество нулей любого другого решения (2.1) не превосходит p_0.

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству соответствующего утверждения в [10], поэтому мы его приводить не будем.

3. Обоснование теоремы 1

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\varepsilon\ddot{x} + p(t)\dot{x} + [q(t) - \lambda_j(\varepsilon)]x = 0. \tag{3.1}$$

Через $x_j(t,\varepsilon)$ будем обозначать собственную функцию первой краевой задачи, соответствующую собственному числу $\lambda_j(\varepsilon)$. Отметим, что эта функция обращается

в нуль в обоих концах отрезка $[\alpha, \beta]$ и, кроме этого, имеет ровно $j-1$ нулей внутри рассматриваемого отрезка.

Доказательство теоремы 1 будет завершено, если мы установим, что для любого натурального l справедливо соотношение

$$\lambda_j(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{l} \varepsilon^i \lambda_j^i + O(\varepsilon^l), \tag{3.2}$$

в котором положено $\lambda_j^0 = \lambda_j$. Обоснование отмеченного факта проведем, рассуждая от противного. Предположим, что для некоторых номеров j и l равенство (3.2) не имеет места. Тогда существует такая последовательность $\varepsilon_m \to 0$, что справедливо соотношение

$$\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m^{-l} \lambda_j(\varepsilon_m) - \sum_{i=0}^{l} \varepsilon^i \lambda_j^i = \delta, \tag{3.3}$$

где $\delta \neq 0$. При этом мы допускаем, что δ может принимать значения, равные либо ∞, либо $-\infty$. Разберем отдельно два возможных случая. Первый из них реализуется, когда

$$\delta > 0, \tag{3.4}$$

а второй – когда

$$\delta < 0. \tag{3.5}$$

Предположим сначала, что выполняется неравенство (3.4). Тогда в силу ранее доказанной леммы все решения последнего уравнения могут обращаться в нуль на отрезке $[\alpha, \beta]$ не более j раз. Тем не менее, как мы уже отмечали, функция $x_j(t, \varepsilon)$, являющаяся решением того же уравнения, имеет ровно $j+1$ нулей. Получено противоречие. Таким образом, неравенство (3.4) не может иметь места.

Далее, предположим, что справедливо неравенство (3.5). В этом случае у дифференциального уравнения (3.1) при достаточно малых ε существует решение, имеющее не менее $j+1$ нулей на интервале (α, β). Это следует из лемм 1 и 2. Однако функция $x_j(t, \varepsilon)$ обращается в нуль на том же интервале точно $j-1$ раз. Воспользовавшись здесь теоремой о разделении нулей решений уравнения (3.1), получим противоречие. Тем самым показано, что неравенство (3.5) выполняться не может. Представление (3.2) доказано.

Выше мы всегда предполагали, что функция $p(t)$ не имеет нулей в концах отрезка $[\alpha, \beta]$. Опираясь на результаты [10] и применяя те же, что и выше, рассуждения, можно установить справедливость теоремы и без этого предположения. Отметим только, что при условии $p(\alpha) = 0$ роль чисел (1.2) играют величины

$$\nu_i^\alpha = \left[\frac{2q(\alpha) - \dot{p}(\alpha) - |\dot{p}(\alpha)|}{2}\right] - |\dot{p}(\alpha)|(1+2i), \quad i = 0, 1, \ldots$$

Аналогично дело обстоит и в случае, когда $p(\beta) = 0$.

В заключение отметим, что развитая методика без труда распространяется на более общий класс уравнений

$$\varepsilon\ddot{x} + p(t, \varepsilon)\dot{x} + [q(t, \varepsilon) - \lambda r(t, \varepsilon)]x = 0,$$

в котором все коэффициенты аналитичны по ε равномерно относительно $t \in [\alpha, \beta]$.

Список литературы / References

[1] Кащенко С. А., *Устойчивость уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами*, Ярославль, 2006; [Kashchenko S. A., *Ustoychivost uravneniy vtorogo poryadka s periodicheskimi koeffitsientami*, Yaroslavl, 2006, (in Russian).]

[2] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, Наука, М., 1973; [Vasil'eva A.B., Butuzov V. F., *Asimptoticheskie razlozheniya resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy*, Nauka, M., 1973, (in Russian).]

[3] Дородницын А. А., "Асимптотическое решение уравнения Ван-дер-Поля", *ПММ*, **11** (1947), 313–328; [Dorodnitsyn A. A., "Asimptoticheskoe reshenie uravneniya Van-der-Polya", *PMM*, **11** (1947), 313–328, (in Russian).]

[4] Коул Дж., *Методы возмущений в прикладной математике*, Мир, М., 1970; English transl.: Cole J., *Perturbation methods in applied mathematics*, Blaisdell Publishing Company, London, 1968.

[5] Вишик М. И., Люстерник Л. А., "Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром", *УМН*, **12**:5 (1957), 3–122; [Vishik M. I., Lyusternik L. A., "Regulyarnoe vyrozhdenie i pogranichnyy sloy dlya lineynykh differentsialnykh uravneniy s malym parametrom", *UMN*, **12**:5 (1957), 3–122, (in Russian).]

[6] Колесов Ю. С., Чаплыгин В. Ф., "О неосцилляции решений сингулярно возмущенных уравнений второго порядка", *ДАН СССР*, **199**:6 (1971), 1240–1242; [Kolesov Yu. S., Chaplygin V. F., "O neostsillyatsii resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy vtorogo poryadka", *DAN SSSR*, **199**:6 (1971), 1240–1242, (in Russian).]

[7] Ch. J. de la Vallie-Poussin, "Sur l'equation differentielle lineaire du second ordre. Determination d'une integrale par deux valeurs assignees. Extension aux equations d'ordre n", *J. Math. Pure et Appl.*, **8**:1 (1929), 125–144.

[8] Кащенко С. А., "Предельные значения собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота", *Вест. Яросл. ун-та*, **10**, 1974, 3–39; [Kashchenko S.A., "Predelnye znacheniya sobstvennykh chisel pervoy kraevoy zadachi dlya singulyarno vozmushchennogo differentsialnogo uravneniya vtorogo poryadka s tochkami povorota", *Vest. Yarosl. un-ta*, **10**, 1974, 3–39, (in Russian).]

[9] Кащенко С. А., "Асимптотика собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений второго порядка с точками поворота", *Вестник Ярославского университета*, **13**, Ярославль, 1975, 20–83; [Kashchenko S. A., "Asimptotika sobstvennykh znacheniy periodicheskoy i neperiodicheskoy krayevykh zadach dlya singulyarno vozmushchennykh differentsialnykh uravneniy vtorogo poryadka s tochkami povorota", *Vestnik Yaroslavskogo universiteta*, **13**, Yaroslavl, 1975, 20–83, (in Russian).]

[10] Кащенко С. А., "Асимптотика собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:5 (2015), 682–710; [Kashchenko S. A., "Asymptotics of Eigenvalues of First Boundary Value Problem for Singularly Pertubed Second-order Differential Equation with Turning Points", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:5 (2015), 682–710, (in Russian).]

Kashchenko S. A., "Asymptotic Expansions of Eigenvalues of the First Boundary Problem for Singularly Perturbed Second Order Differential Equation with Turning Points", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:1 (2016), 41–60.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-1-41-60

Abstract. For singularly perturbed second order equations the dependence of eigenvalues of the first boundary problem on a small parameter at the highest derivative is studied. The main assumption is that the coefficient at the first derivative in the equation is the sign of the variable. This leads to the emerging of so-called turning points. Asymptotic expansions on the small parameter are obtained for all eigenvalues of the considered boundary problem. It turns out that the expansions are defined by the behavior of coefficients in a neighborhood of turning points only.

Keywords: singularly perturbed equation, turning points, asymptotic, boundary value problem, eigenvalues

On the authors:

Kashchenko Sergey Alexandrovich, orcid.org/0000-0002-8777-4302, doctor of science, professor,

P.G. Demidov Yaroslavl State University,

Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: kasch@uniyar.ac.ru