Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 1 (2016), с. 61–85
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 1 (2016), pp. 61–85

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-1-61-85

УДК 517.9

Асимптотические разложения собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений второго порядка с точками поворота

Кащенко С. А.

получена 20 декабря 2015

Аннотация. Исследуется асимптотическое поведение всех собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для уравнения второго порядка с малым множителем при старшей производной. Основное предположение состоит в том, что коэффициент при первой производной является знаком переменной, то есть имеются точки поворота. Разработан алгоритм вычисления всех коэффициентов асимптотических рядов для каждого из рассматриваемых собственных значений. Как оказалось, значения всех этих коэффициентов определяются по значениям коэффициентов исходного уравнения только в окрестности точек поворота. Получена асимптотика длин ляпуновских зон устойчивости и неустойчивости. В частности, решена задача об устойчивости решений уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами и малым параметром при старшей производной.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное уравнение, точки поворота, асимптотика, краевая задача, собственные числа

Для цитирования: Кащенко С. А., "Асимптотические разложения собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений второго порядка с точками поворота", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:1 (2016), 61–85.

Об авторах:

Кащенко Сергей Александрович, orcid.org/0000-0002-8777-4302, доктор физико-математических наук, профессор,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,

ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия,

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,

Каширское ш., 31, 115409, г. Москва, Россия

e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Введение

Настоящая работа опирается на теорию зон устойчивости А.М. Ляпунова [1] – [3]. В работах [4], [5] изучена асимптотика собственных значений первой краевой задачи для уравнений, указанных в названии. В настоящей статье изучается поведение собственных значений периодической и антипериодической краевых задач. Устанавливаются асимптотические представления, и дается алгоритм вычисления коэффициентов этих представлений для всех собственных значений данных краевых задач. При этом широко используются результаты статей [4], [5]. На основании полученных утверждений исследуется вопрос об устойчивости решений.

Структура статьи такова. Она состоит из 10 разделов. В разделах 1–4 исследуется асимптотика собственных значений и вопрос об устойчивости для самосопряженных уравнений из указанного в названии класса, а в разделах 5–10 – для несамосопряженных. Отметим, что некоторые результаты, касающиеся вопроса об устойчивости решений, были изложены в [6].

1. Постановка задачи и формулировка результатов в самосопряженном случае

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$\varepsilon\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = \lambda x \tag{1.1}$$

с малым положительным параметром ε и T - периодическими коэффициентами $p(t)$ и $q(t)$. Для того, чтобы каждый раз не оговаривать гладкость этих функций, будем считать их бесконечно дифференцируемыми. Основное же предположение состоит в том, что функция $p(t)$ имеет нули на отрезке $[0, T]$.

Для уравнения (1.1) ставятся на отрезке $[\alpha, \alpha+T]$ первая, периодическая и антипериодическая краевые задачи. Требование самосопряженности операторов, порожденных последними двумя краевыми задачами, заключается в том, что справедливо равенство

$$M[p(t)] = 0. \tag{1.2}$$

Как известно, каждая из поставленных задач имеет счетное число вещественных собственных значений, которые можно считать занумерованными в порядке убывания. Собственные значения первой краевой задачи обозначим через $\mu_i(\varepsilon, \alpha)$ $(j = 1, 2, \ldots)$, а собственные значения периодической и антипериодической задач, которые, очевидно, не зависят от α, обозначим соответственно через $\lambda_j^+(\varepsilon)$ и $\lambda_j^-(\varepsilon)$ $(j = 1, 2, \ldots)$. При этом можно так произвести нумерацию в случае кратных собственных значений, чтобы все $\lambda_j^+(\varepsilon)$ и $\lambda_j^-(\varepsilon)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ были непрерывными функциями параметра ε. Собственную функцию, отвечающую собственному значению $\lambda_j^+(\varepsilon)$, обозначим через $x_j^+(t, \varepsilon)$, а через $x_j^-(t, \varepsilon)$ будем обозначать собственную функцию, отвечающую $\lambda_j^-(\varepsilon)$. Как отмечалось в [3] (глава 1), функция $x_1^+(t, \varepsilon)$ положительна, а функции $x_{2j}^+(t, \varepsilon)$ и $x_{2j+1}^+(t, \varepsilon)$ имеют ровно $2j$ нулей на некотором отрезке длины периода. Собственные функции $x_{2j-1}^-(t, \varepsilon)$ и $x_{2j}^-(t, \varepsilon)$ обращаются в нуль ровно $2j-1$ раз каждая на отрезке $[\alpha, \alpha+T]$, если $x_{2j-1}^-(\alpha, \varepsilon) \neq 0$ и $x_{2j}^-(\alpha, \varepsilon) \neq 0$.

Предположим сначала, что функция $p(t)$ имеет лишь конечное число простых нулей на отрезке длины периода. Как показано в [4], при таком предположении для каждого номера $j = 1, 2\dots$ имеет место асимптотическое представление

$$\mu_j(\varepsilon, \alpha) = \mu_j^0(\alpha) + \varepsilon\mu_j^1(\alpha) + \varepsilon^2\mu_j^2(\alpha) + \dots \tag{1.3}$$

В [5] приведен алгоритм вычисления коэффициентов рядов (1.3). Здесь отметим только, что эти коэффициенты вычисляются лишь по значениям функций $p(t)$, $q(t)$ и их производных в точках поворота, т.е. там, где функция $p(t)$ обращается в нуль. Напомним еще один полезный факт из [5]. Функция $\mu_j^i(\alpha)$ параметра α, которая, очевидно, периодична с периодом T, может принимать лишь два различных значения, причем при всех таких α, для которых $p(\alpha) \neq 0$, значение $\mu_j^i(\alpha)$ одно и то же. Нам удобно зафиксировать одно из таких чисел, которое не совпадает с нулем функции $p(t)$. Ниже мы будем обозначать его через α_0.

Теорема 1. *Имеют место асимптотические представления*

$$\lambda_j^+(\varepsilon) = \mu_j^0(\alpha_0) + \varepsilon\mu_j^1(\alpha_0) + \dots, \tag{1.4}$$

$$\lambda_j^-(\varepsilon) = \mu_j^0(\alpha_0) + \varepsilon\mu_j^1(\alpha_0) + \dots, \tag{1.5}$$

где $j = 1, 2, \dots$

Обратим внимание, что асимптотические ряды для $\lambda_j^+(\varepsilon)$ и $\lambda_j^-(\varepsilon)$ совпадают для одинаковых номеров j $(j = 1, 2, \dots)$. Отсюда, в частности, следует, что эти ряды расходятся.

Сформулируем критерий устойчивости решений уравнения

$$\varepsilon\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0, \tag{1.6}$$

в котором функция $p(t)$ такая же, как и в условиях предыдущей теоремы.

Теорема 2. *Предположим, что коэффициенты ни одного из рядов (1.4) и (1.5) не состоят из одних нулей. Тогда существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *решения уравнения (1.6) неустойчивы.*

Перейдем к случаю, когда у функции $p(t)$ существуют кратные нули, а число простых нулей конечно. В этом случае к числу

$$\nu_0 = \max q(t), \quad t \in \{\alpha : p(\alpha) = \dot{p}(\alpha) = 0\}$$

стремятся все собственные значения $\mu_j(\varepsilon, \alpha)$ первых краевых задач, для всех j больших N, при стремлении ε к нулю. При этом для $\mu_i(\varepsilon, \alpha)$ $(0 \leq i \leq N)$ имеет место представление (1.3).

Теорема 3. *Для N первых чисел $\lambda_j^+(\varepsilon)$ и $\lambda_j^-(\varepsilon)$ имеет место теорема 1. Для остальных собственных значений справедливы равенства*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_j^+(\varepsilon) = \nu_0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_j^-(\varepsilon) = \nu_0. \tag{1.7}$$

Теперь сформулируем следующий критерий устойчивости.

Теорема 4. *Пусть $\nu_0 < 0$ и коэффициенты ни одного из асимптотических рядов (1.4) и (1.5) для N первых чисел $\lambda_j^+(\varepsilon)$ и $\lambda_j^-(\varepsilon)$ не состоят из одних нулей. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, для которого при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решения уравнения (1.6) неустойчивы.*

При условии $\nu_0 > 0$ существуют две такие последовательности $\varepsilon_m^1 \to 0$ и $\varepsilon_m^2 \to 0$, что при каждом ε_m^1 $(m = 1, 2, \dots)$ решения уравнения (1.6) устойчивы, а при каждом ε_m^2 $(m = 1, 2, \dots)$ – неустойчивы.

2. Обоснование теоремы 1 для собственных значений $\lambda_1^+(\varepsilon)$ и $\lambda_1^-(\varepsilon)$

Сначала докажем теорему 1 для собственного значения $\lambda_1^+(\varepsilon)$. Будем рассуждать от противного. Предположим, что существует такой номер l_0 и такая последовательность $\varepsilon_m \to 0$, на которой выполняется предельное равенство

$$\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m^{-l_0} \left[\lambda_1^+(\varepsilon_m) - \sum_{i=0}^{l_0} \varepsilon_m^i \mu_1^i(\alpha_0)\right] = \delta_0, \tag{2.1}$$

где $\delta_0 \neq 0$. Из [3] (лемма 1.4.6 главы 1) и из способа нумерации собственных значений вытекает неравенство

$$\lambda_1^+(\varepsilon) > \mu_1(\varepsilon, \alpha_0) \quad (\varepsilon > 0).$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что

$$\delta_0 > 0. \tag{2.2}$$

Из соотношений (2.1) и (2.2) следует, что при достаточно малых ε_m верно неравенство

$$\lambda_1^+(\varepsilon_m) > \varepsilon_m^{l_0}\delta^0 + \sum_{i=0}^{l_0} \varepsilon_m^i \mu_1^i(\alpha_0), \tag{2.3}$$

в котором $\delta^0 = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta_0, & \text{если} \quad \delta_0 < \infty, \\ 1, & \text{если} \quad \delta_0 = \infty. \end{cases}$

Отметим, далее, один общий факт. При условии

$$\lambda < \lambda_1^+(\varepsilon)$$

(ε как-то фиксировано) решения уравнения (1.1) осциллируют. Отсюда и из (2.3) вытекает существование такого отрезка $[0, \delta(\varepsilon_m)]$, на котором решения уравнения

$$\varepsilon_m \ddot{x} + p(t)\dot{x} + \left[q(t) - \varepsilon_m^{l_0}\delta_0 - \sum_{i=0}^{l_0} \varepsilon_m^i \mu_1^i(\alpha_0)\right] x = 0 \tag{2.4}$$

осциллируют. Затем мы вновь воспользуемся результатами из [4] и [5], где показано, что условие (2.2) влечет за собой неосцилляцию на всей оси решений последнего уравнения при всех достаточно малых ε_m. Тем самым получено противоречие. Соотношение (1.4) для значения $\lambda_1^+(\varepsilon)$ доказано.

Для того, чтобы установить равенство (1.5) для номера $j = 1$, воспользуемся утверждением, приведенным в [3] (лемма 1.4.6), на основании которого

$$\lambda_1^+(\varepsilon) > \lambda_1^-(\varepsilon) \geq \mu_1(\varepsilon, \alpha_0) \quad (\varepsilon > 0).$$

Отсюда и из уже доказанного в этом разделе утверждения получаем равенство

$$\lambda_1^-(\varepsilon) = \mu_1^0(\alpha_0) + \varepsilon\mu_1^1(\alpha_0) + \ldots,$$

т.е. соотношение (1.5) справедливо при $j = 1$.

3. Вспомогательное утверждение

В этом разделе мы установим утверждение, которое будет играть основную роль при доказательстве теоремы 1. Точнее, будет изучено поведение некоторых собственных значений первых краевых задач в одном частном случае.

Введем в рассмотрение дифференциальное уравнение

$$\varepsilon\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t, \varepsilon)x = \lambda x, \tag{3.1}$$

в котором функция $p(t)$ такая же, как и в уравнении (1.1) при условиях теоремы 1, а функция $q(t, \varepsilon)$, которая периодична и сколь угодно гладка по t, представима в виде асимптотического ряда по степеням параметра ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$. Собственные значения первых краевых задач для этого уравнения на отрезках $[\alpha, \alpha+T]$ обозначим через $\overline{\mu}_j(\varepsilon, \alpha)$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Как и везде выше, считаем, что нумерация этих собственных значений произведена в порядке их убывания. Как ясно из результатов, полученных в [3] – [5], для каждого $\overline{\mu}_j(\varepsilon, \alpha)$ имеет место представление, аналогичное по виду (1.3). Первое предположение состоит в том, что ни один из рядов вида (1.3), соответствующий $\overline{\mu}_j(\varepsilon, \alpha)$, не имеет только нулевых коэффициентов. Рассмотрим, далее, лишь те собственные значения $\overline{\mu}_j(\varepsilon, \alpha)$, для которых первый неисчезающий член в представлении (1.3) для $\overline{\mu}_j(\varepsilon, \alpha)$ положителен. Понятно, что таких собственных значений может быть лишь конечное число. Мы будем предполагать, что это число не равно нулю. Через j_0 обозначим наибольший из номеров рассматриваемых собственных значений. Последнее предположение заключается в том, что асимптотические представления в нуле для каждого α из отрезка $[0, T]$ собственных значений $\overline{\mu}_{j_0}(\varepsilon, \alpha)$ совпадают.

Прежде чем сформулировать соответствующее утверждение, условимся о терминологии. Будем писать

$$\varphi(\varepsilon) = o(\varepsilon^\infty),$$

если для каждого $l \geq 0$ выполняется соотношение

$$\varphi(\varepsilon) = o(\varepsilon^l).$$

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$\overline{\mu}_{j_0+1}(\varepsilon, \alpha_0) - \min_{\alpha\in[0,T]} \overline{\mu}_{j_0}(\varepsilon, \alpha) = o(\varepsilon^\infty). \tag{3.2}$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение (3.1) при нулевом значении параметра λ, т.е. такое уравнение:

$$\varepsilon\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t,\varepsilon)x = 0. \tag{3.3}$$

Главную роль при обосновании нужного нам утверждения будет играть один факт, полученный в работах [4], [5]. Сформулируем его. Предварительно введем еще несколько обозначений. Через $t_1, \ldots, t_n$ обозначим все нули функции $p(t)$ на отрезке $[0,T]$. Обозначим затем через Δ_i отрезок $[t_i - t_0, t_i + t_0]$, в котором число $t_0 > 0$ выберем настолько малым, чтобы в каждом из этих отрезков лежал лишь один нуль функции $p(t)$. Теперь мы легко сможем указать наибольшее и наименьшее число нулей, которое могут иметь решения уравнения (3.3) на отрезке Δ_i $(i = 1, \ldots, n)$ при малых ε. Наименьшее возможное число нулей на каждом из отрезков Δ_i, которое не зависит от ε, когда ε достаточно мало, мы будем обозначать соответственно через k_i. Наибольшее возможное количество нулей на том же отрезке равно $k_i + 1$.

Из условия совпадения асимптотических рядов $\overline{\mu}_{j_0}(\varepsilon,\alpha)$ для каждого α из отрезка $[0,T]$ и из того, что $j_0 \geq 1$, следуют два вывода. Во-первых, среди чисел k_i $(1 \leq i \leq n)$ найдется хотя бы одно положительное. Во-вторых, все положительные k_i четны. Для определенности будем считать, что $k_1 > 0$. Тогда решение $x^0(t,\varepsilon)$ уравнения (3.3) с начальными условиями

$$x^0(t_1,\varepsilon) = 0, \quad \dot{x}^0(t_1,\varepsilon) \neq 0$$

обращается в нуль при всех малых ε ровно j_0 раз на полуинтервале $[t_1, t_1 + T)$, причем

$$j_0 = 1 + \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

В то же время решение $x_0(t,\varepsilon)$ уравнения (3.3) с начальными условиями

$$x_0(t_1,\varepsilon) \neq 0, \quad \dot{x}_0(t_1,\varepsilon) = 0$$

имеет ровно k_1 нулей на отрезке Δ_1. Обозначим через $t(\varepsilon)$ наименьший на отрезке Δ_1 нуль этой функции. Важный для дальнейшего результат заключается в следующем. Функция $x_0(t,\varepsilon)$ имеет на отрезке $[t(\varepsilon), t(\varepsilon)+T]$ ровно j_0+1 нулей при всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, где ε_0 достаточно мало.

Выведем одно следствие из сказанного. Пусть функция $\psi_k(\tau,\varepsilon)$ равна расстоянию от точки τ, в которой некоторое решение уравнения (3.3) обращается в нуль, до следующего $(k-1)$-го нуля того же решения. Тогда имеют место неравенства

$$\psi_{j_0}(t_1,\varepsilon) > T, \; \psi_{j_0}(t(\varepsilon),\varepsilon) < T.$$

Приступим теперь непосредственно к доказательству равенства (3.2). Рассуждать будем от противного. Пусть существует такое целое $l_0 \geq 0$ и такая последовательность $\varepsilon_m \to 0$, что имеет место равенство

$$\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m^{-l_0} \left[\overline{\mu}_{j_0+1}(\varepsilon_m,\alpha_0) - \min_{\alpha\in[0,T]} \overline{\mu}_{j_0}(\varepsilon_m,\alpha)\right] = \delta_0, \tag{3.4}$$

где $\delta_0 \neq 0$. Отсюда, учитывая очевидное неравенство

$$\max_{\alpha\in[0,T]} \overline{\mu}_{j_0+1}(\varepsilon,\alpha) < \min_{\alpha\in[0,T]} \overline{\mu}_{j_0}(\varepsilon,\alpha),$$

получаем, что
$$\delta_0 < 0.$$
Таким образом, при всех достаточно больших m выполняется неравенство
$$\min_{\alpha\in[0,T]} \overline{\mu}_{j_0}(\varepsilon_m,\alpha) > \overline{\mu}_{j_0+1}(\varepsilon_m,\alpha_0) - \varepsilon^{l_0}\frac{\delta^0}{2}, \tag{3.5}$$
в котором $\delta^0 = \begin{cases} \delta_0, & \text{если} \quad \delta_0 > -\infty, \\ -1, & \text{если} \quad \delta_0 = -\infty. \end{cases}$

Далее, введем в рассмотрение уравнение
$$\varepsilon\ddot{x} + p(t)\dot{x} + \left[q(t,\varepsilon_m) - \overline{\mu}_{j_0+1}(\varepsilon_m,\alpha_0) - \varepsilon_m^{l_0}\frac{\delta^0}{2}\right]x = 0. \tag{3.6}$$
Первое, что мы отметим, это неравенство
$$\max_{\tau\in[0,T]} \overline{\psi}_{j_0}(\tau,\varepsilon_m) < T, \tag{3.7}$$
которое выполняется при всех достаточно малых ε_m. Здесь функция $\overline{\psi}_{j_0}(\tau,\varepsilon)$ имеет тот же смысл, что и $\psi_{j_0}(\tau,\varepsilon)$, но с тем единственным отличием, что строится она по решениям уравнения (3.6). В справедливости неравенства (3.7) нетрудно убедиться. Действительно, из условия
$$\overline{\psi}_{j_0}(\tau_{m_k},\varepsilon_{m_k}) \geq T,$$
где $\varepsilon_{m_k} \to 0$, вытекает, что имеет место неравенство
$$\min_{\alpha\in[0,T]} \overline{\mu}_{j_0}(\varepsilon_{m_k},\alpha) \leq \overline{\mu}_{j_0+1}(\varepsilon_{m_k},\alpha_0) - \varepsilon_{m_k}^{l_0}\frac{\delta^0}{2}.$$
Последнее соотношение противоречит неравенству (3.5).

Вторым важным моментом в доказательстве равенства (3.2) является тот факт, что для уравнения (3.6) выполнены все условия, при которых рассматривалось уравнение (3.3). Здесь имеется в виду, что для уравнения (3.6) числа $\overline{k}_i$ $(i = 1,\ldots,n)$, определяемые аналогично числам k_i $(i = 1,\ldots,n)$ для уравнения (3.3), совпадают при всех достаточно малых ε с k_i соответственно. Правило вычисления этих чисел изложено в [4] и [5]. Применяя его к уравнению (3.6), мы убеждаемся в справедливости равенств
$$k_i = \overline{k}_i \quad (i = 1,\ldots,n). \tag{3.8}$$
Добавим несколько слов в пояснение к сказанному. Из условия $\delta^0 < 0$ вытекает, что все $\overline{k}_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ не зависят от ε, если ε мало, причем это свойство сохраняется при любых возмущениях коэффициента, стоящего при x в уравнении (3.6), функциями $\varphi(t,\varepsilon)$, имеющими более высокий, чем l_0, порядок по ε. Как следует из [4] и [5], числа $\overline{k}_i$, обладающие перечисленными свойствами, могут меняться, грубо говоря, при переходе через собственное значение первой краевой задачи на отрезке $[\alpha,\alpha{+}T]$. В рассматриваемом же случае такого перехода не происходит, т.е. выполняются равенства (3.8).

Фиксируем решение $\overline{x}_0(t,\varepsilon_m)$ уравнения (3.6) с начальными условиями

$$\overline{x}_0(t_1,\varepsilon_m)\neq 0,\quad \dot{\overline{x}}_0(t_1,\varepsilon_m)=0.$$

Тогда, как и ранее,

$$\overline{\psi}_{j_0}(\bar{t}(\varepsilon_m),\varepsilon_m)>T, \tag{3.9}$$

где ε_m достаточно мало. В последнем неравенстве через $\bar{t}(\varepsilon_m)$ обозначен наименьший на отрезке Δ_1 нуль функции $\overline{x}_0(t,\varepsilon_m)$. Для завершения доказательства леммы остается заметить, что неравенство (3.9) противоречит неравенству (3.7).

Отметим, что можно установить еще такое соотношение:

$$\overline{\mu}_{j_0}(\varepsilon,\bar{t}(\varepsilon))-\overline{\mu}_{j_0+1}(\varepsilon,\alpha_0)=O(\varepsilon^\infty).$$

4. Завершение доказательств приведенных теорем

Сначала докажем теорему 1. Для этого, прежде всего, все номера j $(j=1,2,\dots)$ разобьем на два класса. К первому из них отнесем все те номера j, для каждого из которых соответствующее собственное значение $\mu_j(\varepsilon,\alpha)$ первой краевой задачи при некотором фиксированном $\alpha_j\in[0,T]$ имеет асимптотическое представление (1.3), не совпадающее с асимптотическим представлением для $\mu_j(\varepsilon,\alpha_0)$. Остальные номера j включим во второй класс. Формулы (1.4) и (1.5) докажем отдельно для собственных значений с номерами из разных классов.

Пусть некоторый номер j_0 принадлежит первому классу. Для доказательства теоремы 1 в этом случае нам понадобится еще один факт из статей [4], [5]. Там показано, что из условия несовпадения рядов для $\mu_{j_0}(\varepsilon,\alpha_{j_0})$ и $\mu_{j_0}(\varepsilon,\alpha_0)$ вытекает, что соответствующие ряды одни и те же для собственных значений $\mu_{j_0}(\varepsilon,\alpha_{j_0})$ и $\mu_{j_0+1}(\varepsilon,\alpha_0)$, т.е.

$$\mu_{j_0}(\varepsilon,\alpha_{j_0})-\mu_{j_0+1}(\varepsilon,\alpha_0)=O(\varepsilon^\infty). \tag{4.1}$$

Теперь остается лишь воспользоваться утверждением [3] (лемма 1.4.6), на основании которого доказательство равенств (1.4), (1.5) для собственных значений $\lambda^+_{j_0+1}(\varepsilon)$ и $\lambda^-_{j_0+1}(\varepsilon)$ следует из соотношения (4.1).

Пусть, далее, некоторый номер j_0 принадлежит второму классу. Тогда в справедливости равенств (1.4) и (1.5) для значений $\lambda^+_{j_0+1}(\varepsilon)$ и $\lambda^-_{j_0+1}(\varepsilon)$ убеждаемся, используя утверждения леммы 1 и леммы 1.4.6 из [3]. Таким образом, обоснование теоремы 1 закончено.

Теорема 2 является непосредственным следствием предыдущей теоремы. Действительно, для этого достаточно заметить (см. главу 1 [3]), что решения уравнения (1.1) устойчивы тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:

$$\begin{aligned}
&\text{либо}\qquad \lambda=\lambda^+_{2j}(\varepsilon)=\lambda^+_{2j+1}(\varepsilon)\quad (\lambda=\lambda^-_{2j-1}(\varepsilon)=\lambda^-_{2j}(\varepsilon)),\\
&\text{либо}\qquad \lambda^+_{2j-1}(\varepsilon)<\lambda<\lambda^-_{2j-1}(\varepsilon)\quad (\lambda^-_{2j}(\varepsilon)<\lambda<\lambda^+_{2j}(\varepsilon)).
\end{aligned}$$

Кроме этого, из теоремы 1 и из результатов статьи [4] следует и первое утверждение теоремы 3, а с ним и теорема 4.

Второе утверждение теоремы 3 доказывается тоже без труда. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться утверждением [3] (лемма 1.4.6) и предельными равенствами

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mu_j(\varepsilon, \alpha) = \nu_0, \tag{4.2}$$

справедливыми для всех, начиная с некоторого, номеров j. Однако может так случиться, что первое утверждение теоремы 3 не определяет асимптотику собственного значения $\lambda_1^+(\varepsilon)$. Равенств (4.2) для всех $j = 1, 2, \ldots$ тогда тоже недостаточно для изучения поведения этого собственного значения. Можно лишь утверждать, что

$$\varliminf_{\varepsilon \to 0} \lambda_1^+(\varepsilon) \geq \nu_0.$$

Покажем, что на самом деле $\lambda_1^+(\varepsilon)$ удовлетворяет равенству (1.7).

В предположении противного существует такая последовательность $\varepsilon_m \to 0$, что

$$\lim_{m \to \infty} \lambda_1^+(\varepsilon_m) = \nu_0 + \delta_0,$$

где $\delta_0 > 0$. Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon_m \ddot{x} + p(t)\dot{x} + \left[q(t) - \nu_0 - \frac{\delta^0}{2}\right] x = 0, \tag{4.3}$$

где $\delta^0 = \begin{cases} \delta_0, & \text{если} \quad \delta_0 < \infty, \\ 1, & \text{если} \quad \delta_0 = \infty. \end{cases}$ Тогда, с одной стороны, из условия

$$\lambda_1^+(\varepsilon_m) > \nu_0 + \frac{\delta^0}{2},$$

справедливого, когда m достаточно велико, следует осцилляция решений уравнения (4.3). С другой стороны, как следует из [4], неравенство $\delta^0 > 0$ позволяет нам сделать вывод о неосцилляции на всей оси решений этого уравнения. Итак, теорема 3 полностью доказана.

5. Постановка задачи и основные результаты в несамосопряженном случае

Как и в предыдущем разделе, рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$\varepsilon \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = \lambda x \tag{5.1}$$

с T-периодическими коэффициентами. Дифференциальные свойства функций $p(t)$ и $q(t)$ те же, что и выше. Однако, в отличие от предыдущих разделов, здесь будет разобран случай, когда равенство (1.2) не имеет места. Поскольку в дальнейшем мы будем интересоваться свойствами устойчивости, то будем предполагать, что

$$M[p(t)] > 0. \tag{5.2}$$

Для уравнения (5.1) ставятся периодическая и антипериодическая краевые задачи. Известно (см., например, [8]), что каждая из этих задач имеет при любом

$\varepsilon > 0$ счетное число собственных значений, которые можно занумеровать в порядке убывания их вещественных частей. При условии (5.2) нельзя гарантировать вещественность собственных значений. Более того, число комплексных собственных значений не может быть конечно, а число вещественных – обязательно конечно. Важной особенностью вещественных собственных значений является то, что они, вообще говоря, не являются непрерывными функциями коэффициентов уравнения (5.1), а значит, – и параметра ε. Это легко показать, используя [3] (теорема 1.5.2 главы 1). Отметим еще, что комплексные собственные значения, в отличие от вещественных, непрерывно зависят от ε. В настоящем разделе мы построим асимптотику при малых ε вещественных собственных значений.

Рассмотрим, наряду с уравнением (5.1), новое дифференциальное уравнение

$$\varepsilon\ddot{y} + \left[\frac{2q(t) - \dot{p}(t)}{2} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon}\right] y = \lambda y, \tag{5.3}$$

которое получается из (5.1) с помощью преобразования

$$x = y \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^t p(\tau)d\tau\right). \tag{5.4}$$

Для уравнения (5.3) тоже ставятся периодическая и антипериодическая краевые задачи. Соответствующие дифференциальные операторы – самосопряженные. Поэтому у них существует счетное число вещественных собственных значений, которые мы обозначим соответственно через $\nu_j^+(\varepsilon)$ и $\nu_j^-(\varepsilon)$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Нумерацию естественно проводить в порядке убывания собственных значений. При этом всегда можно нумеровать так, чтобы все функции $\nu_j^+(\varepsilon)$ и $\nu_j^-(\varepsilon)$ параметра ε были непрерывны.

Важный для нас вывод заключается в том, что для значений $\nu_j^+(\varepsilon)$ и $\nu_j^-(\varepsilon)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ справедливы, в зависимости от свойств функции $p(t)$, теоремы 1 и 4. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить следующее: доказательство отмеченных теорем проводилось на основе анализа осцилляционных свойств решений уравнения (1.1). Уравнение же (1.1) с помощью замены (5.4), не влияющей на нули его решений, преобразуется в уравнение (5.3). Поэтому к последнему применимы выводы теорем 1 и 4. Этот факт будет играть большую роль при изучении собственных значений краевых задач для уравнения (5.1) при условии (5.2).

Сделаем, наконец, последнее замечание. Как мы уже отмечали, в [7] установлено, что собственное значение с наибольшей вещественной частью из всех рассматриваемых собственных значений для обеих краевых задач (5.1) всегда вещественное и простое. Очевидно, оно непрерывно зависит от ε. Мы будем обозначать его через $h_1(\varepsilon)$.

Предположим, что выполнены условия теоремы 1. Тогда мы знаем асимптотические представления всех $\nu_j^+(\varepsilon)$ и $\nu_j^-(\varepsilon)$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

Теорема 5. *Имеет место асимптотическое равенство*

$$h_1(\varepsilon) - \nu_1(\varepsilon) = O(\varepsilon^\infty). \tag{5.5}$$

Теорема 6. *Пусть для некоторого номера j асимптотические ряды для $\nu_{2j}^{+}(\varepsilon)$ и $\nu_{2j+1}^{+}(\varepsilon)$ или $\nu_{2j-1}^{-}(\varepsilon)$ и $\nu_{2j}^{-}(\varepsilon)$ не совпадают. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существуют два таких вещественных собственных значения периодической и антипериодической краевой задачи $h_{j_1}(\varepsilon)$ и $h_{j_1+1}(\varepsilon)$, которые непрерывно зависят от ε для указанных значений ε и для которых выполняются соотношения*

$$\begin{gathered} \nu_{2j+1}^{+}(\varepsilon) < h_{j_1+1}(\varepsilon) < h_{j_1}(\varepsilon) < \nu_{2j}^{+}(\varepsilon) \\ \left(\nu_{2j}^{-}(\varepsilon) < h_{j_1+1}(\varepsilon) < h_{j_1}(\varepsilon) < \nu_{2j-1}^{-}(\varepsilon)\right), \end{gathered} \tag{5.6}$$

$$h_{j_1}(\varepsilon) - \nu_{2j}^{+}(\varepsilon) = O(\varepsilon^{\infty}) \quad \left(h_{j_1}(\varepsilon) - \nu_{2j-1}^{-}(\varepsilon) = O(\varepsilon^{\infty})\right), \tag{5.7}$$

$$h_{j_1+1}(\varepsilon) - \nu_{2j+1}^{+}(\varepsilon) = O(\varepsilon^{\infty}) \quad \left(h_{j_1+1}(\varepsilon) - \nu_{2j}^{-}(\varepsilon) = O(\varepsilon^{\infty})\right). \tag{5.8}$$

Отметим, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где ε_0 такое, как в предыдущей теореме, в интервале $(h_{j_1+1}(\varepsilon), h_{j_1}(\varepsilon))$ не лежит ни одно другое вещественное собственное значение рассматриваемых краевых задач для уравнения (5.1).

Рассмотрим, далее, уравнение

$$\varepsilon \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0. \tag{5.9}$$

Теорема 7. *Пусть коэффициенты ни одного из асимптотических рядов для $\nu_j^{+}(\varepsilon)$ и $\nu_j^{-}(\varepsilon)$ $(j = 1, 2, \dots)$ не состоят из одних нулей. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решения уравнения (5.9) неустойчивы.*

Предположим затем, что выполняются условия теоремы 3.

Теорема 8. *Имеет место утверждение теоремы 5.*

Условимся, далее, обозначать через $\nu_j^{+}(\varepsilon)$ и $\nu_j^{-}(\varepsilon)$ только те собственные значения, о которых говорится в первой части теоремы 3. Отметим, что их конечное число.

Теорема 9. *Пусть для некоторого номера j асимптотические ряды для $\nu_{2j}^{+}(\varepsilon)$ и $\nu_{2j+1}^{+}(\varepsilon)$ или $\nu_{2j-1}^{-}(\varepsilon)$ и $\nu_{2j}^{-}(\varepsilon)$ не совпадают. Тогда имеет место утверждение теоремы 6. Если вещественное собственное значение $h_j(\varepsilon)$ одной из рассматриваемых краевых задач для уравнения (5.1) определено при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и не стремится при стремлении ε к нулю ни к одному из собственных значений $\nu_j^{+}(\varepsilon)$ и $\nu_j^{-}(\varepsilon)$, тогда необходимо*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} h_j(\varepsilon) = \nu_0, \tag{5.10}$$

где

$$\nu_0 = \max q(t), \quad t \in \{\alpha : p(\alpha) = \dot{p}(\alpha) = 0\}. \tag{5.11}$$

Сформулируем теперь критерий устойчивости решений уравнения (5.9).

Теорема 10. *Пусть $\nu_0 < 0$, и коэффициенты ни одного из асимптотических рядов для $\nu_j^{+}(\varepsilon)$ и $\nu_j^{-}(\varepsilon)$ не состоят из одних нулей. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решения уравнения (5.9) неустойчивы.*

Подводя итог сказанному, отметим, что налицо тесная связь между поведением собственных значений для самосопряженного и несамосопряженного уравнений

(5.1) и (5.3). Эта взаимосвязь обеспечена суммарным влиянием малого параметра и точек поворота. При условии положительности функции $p(t)$ (или отрицательности), т.е. при отсутствии точек поворота, подобной связи нет. В этом случае имеет место соотношение [9]

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h_1(\varepsilon) = M^{-1}\left[p^{-1}(t)\right] M\left[q(t)p^{-1}(t)\right].$$

Можно показать, что все собственные значения периодической и антипериодической краевых задач для уравнения (5.3) неограниченно убывают при стремлении ε к нулю. В случае уравнения (5.1) все вещественные, кроме $h_1(\varepsilon)$, собственные значения тех же краевых задач либо с уменьшением ε пропадают, либо неограниченно убывают.

6. Несамосопряженный случай: вспомогательное утверждение

Задача исследования поведения вещественных собственных значений периодической и антипериодической краевых задач тесно связана с задачей об устойчивости решений уравнения (5.1) при различных значениях параметра λ. Эта связь, в частности, устанавливается в [3] (§1.6). В свою очередь, задача определения неустойчивости, как следует из [3] (теорема 1.5.2 глава 1), эквивалентна задаче на построение некоторых „пробных“ функций. В настоящем разделе будут построены „пробные“ функции для самосопряженного уравнения вида (5.3), используя которые мы сконструируем „пробные“ функции и для уравнения (5.1).

Предположим, что выполнены условия теорем 5 и 6. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\varepsilon\ddot{y} + \left[\frac{2q(t)-\dot{p}(t)}{2} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon}\right] y = 0. \tag{6.1}$$

Основное предположение этого раздела заключается в допущении, что решения последнего уравнения неустойчивы при малых ε, причем коэффициенты ни одного из асимптотических представлений для собственных значений $\nu_j^+(\varepsilon)$ и $\nu_j^-(\varepsilon)$ ($j = 1, 2, \dots$) для уравнения (5.3) не состоят из одних нулей.

Прежде чем сформулировать соответствующее утверждение, введем ряд обозначений. Ниже через $\varphi_0(t,\varepsilon)$ будем обозначать некоторую периодическую неотрицательную и не равную тождественно нулю функцию, явный вид которой нас не будет интересовать. Введем в рассмотрение затем дифференциальное уравнение

$$\varepsilon\ddot{y} + \left[\frac{2q(t)-\dot{p}(t)}{2} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon} + \varphi_0(t,\varepsilon)\right] y = 0, \tag{6.2}$$

относительно которого будем предполагать, что оно принадлежит при всех достаточно малых ε той же зоне неустойчивости, что и уравнение (6.1). Наконец, через $y_0(t,\varepsilon)$ обозначим функцию, обладающую следующими тремя свойствами. Во-первых, $y_0(t,\varepsilon)$ либо периодическая, либо антипериодическая. Во-вторых, эта функция является решением уравнения (6.2). В-третьих, $|y_0(t,\varepsilon)|$ может быть отличен от единицы лишь на некоторых интервалах с центрами в точках $t_1,\dots,t_n$ ($p(t_i) = 0$, $i = 1,\dots,n$), длина которых стремится к нулю при стремлении ε к нулю.

Лемма 2. *В предположениях настоящего раздела существует такая функция $\varphi_0(t,\varepsilon)$, что уравнение (6.2) имеет решение $y_0(t,\varepsilon)$ с перечисленными выше свойствами.*

Доказательство. Сразу отметим, что существование функций $\varphi_0(t,\varepsilon)$ и $y_0(t,\varepsilon)$, вторая из которых обладает всеми, кроме последнего, свойствами, непосредственно вытекает, например, из утверждений [3] (теорема 1.5.2). Возможность осуществления и третьего свойства для функции $y_0(t,\varepsilon)$ будет являться следствием наличия малого параметра.

Предположим для простоты, что первый член каждого из асимптотических разложений для всех $\nu_j^+(\varepsilon)$ и $\nu_j^-(\varepsilon)$ отличен от нуля. В случае, когда это не имеет места, доказательство проводится аналогично. Поэтому ниже этот случай рассматриваться не будет.

Упрощающее ограничение, сформулированное выше, позволяет заключить, что

$$\nu_i = \left[q(t_i) - \frac{1}{2}(\dot{p}(t) + |\dot{p}(t)|)\right] |\dot{p}(t)|^{-1} \neq j \quad (j = 0, 1, \ldots; i = 1, \ldots, n). \tag{6.3}$$

Обозначим через N_i $(i = 1, \ldots, n)$ наименьшее неотрицательное целое число, превосходящее ν_i. Важное место в доказательстве леммы будут играть некоторые построения из [4]. Напомним, что там были введены функции $(i = 1, \ldots, n)$

$$u_i(t,b_i,\varepsilon) = \begin{cases} \left\{1 + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{b_i(b_i+2)\ldots(b_i+2j-2)|\dot{p}(t_i)|^j}{\varepsilon^j (2j)!}(t-t_i)^{2j}\right\} \times \\ \times \exp\left(\frac{|\dot{p}(t_i)|}{\varepsilon}(t-t_i)^2\right), \text{ если } N_i \text{ четно}, \\ \left\{\frac{|\dot{p}(t_i)|^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}(t-t_i) + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{(b_i+1)\ldots(b_i+2j-1)|\dot{p}(t_i)|^{\frac{2j+1}{2}}}{\varepsilon^{\frac{2j+1}{2}}(2j+1)!}(t-t_i)^{2j+1}\right\} \times \\ \times \exp\left(\frac{|\dot{p}(t_i)|}{\varepsilon}(t-t_i)^2\right), \text{ если } N_i \text{ нечетно}, \end{cases}$$

где b_i лежит в пределах

$$-N_i < b_i < -\nu_i.$$

Было показано, что каждая из функций $u_i(t,b_i,\varepsilon)$ обращается в нуль ровно N_i раз на интервале $(-\infty,\infty)$. Крайний правый нуль, если таковые вообще имеются, этой функции мы обозначим через $t_i(b_i,\varepsilon)$. Очевидно,

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} t_i(b_i,\varepsilon) = t_i.$$

Далее, по каждой из функций $u_i(t,b_i,\varepsilon)$ конструировалась новая нечетная функция

$$v_i(t,b_i,\varepsilon) = \frac{|\dot{p}(t_i)|^{\frac{1}{2}}}{2\varepsilon^{\frac{1}{2}}}(t-t_i) - \frac{\dot{u}_i(t,b_i,\varepsilon)}{u_i(t,b_i,\varepsilon)},$$

которая обращается в нуль в некоторой точке $\bar{t}_i(b_i,\varepsilon)$, когда $\delta_i = N_i + b_i$ достаточно мало, причем

$$\bar{t}_i(b_i,\varepsilon) > t_i(b_i,\varepsilon).$$

Наконец, в [4] вводились функции $z_i(t,\varepsilon)$, каждая из которых тождественно равна $v_i(t,b_i,\varepsilon)$ при всех $t \in [-\bar{t}_i(b_i,\varepsilon), \bar{t}_i(b_i,\varepsilon)]$, а при остальных значениях $t \in \Delta_i(t_0) =$

$[t_i - t_0, t_i + t_0]$ ($t_0 > 0$, $t_j \in \Delta_i(t_0)$, если $i \neq j$) они тождественно равны нулю. Основным свойством этих функций является то, что при малых δ_i и ε они удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$D^* z_i(t,\varepsilon) = z_i^2(t,\varepsilon) + \frac{2q(t) - \dot{p}(t)}{2\varepsilon} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon} + \varphi_i(t,\varepsilon), \tag{6.4}$$

где $\varphi_i(t,\varepsilon) \geq 0$, а $D^* z_i(t,\varepsilon)$ – правое верхнее производное число функции $z_i(t,\varepsilon)$. Используя свойства функций $z_i(t,\varepsilon)$, а также связь между решениями уравнения Риккати (6.4) и линейным дифференциальным уравнением второго порядка, заключаем, что функция

$$y_i(t,\varepsilon) = \exp\left(-\int\limits_{t_i - t_0}^{t} z_i(\tau,\varepsilon)d\tau\right)$$

обладает следующими свойствами. Во-первых, она имеет ровно N_i нулей при всех малых ε. Во-вторых, она отлична от единицы лишь на интервале с центром в t_i, длина которого стремится к нулю при стремлении ε к нулю. Наконец, в-третьих, она является решением (на соответствующем отрезке) уравнения

$$\varepsilon D^* \dot{y} + \left[\frac{2q(t) - \dot{p}(t)}{2} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon} + \varphi_i(t,\varepsilon)\right] y = 0.$$

С помощью таких функций $y_i(t,\varepsilon)$ легко строится функция $y_0(t,\varepsilon)$, о которой говорится в формулировке леммы.

Пусть $t_2, \ldots, t_n$ лежат в интервале $(t_1 - t_0, t_1 - t_0 + T)$. Понятно, что это не ограничивает общности. Положим

$$\overline{y}_0(t,\varepsilon) = \begin{cases} y_i(t,\varepsilon), \quad \text{если} \quad t \in \Delta_i(t_0) \quad (i = 1,\ldots,n), \\ \pm 1, \quad \text{если} \quad t \in [t_1 - t_0, t_1 - t_0 + T], \quad t \overline{\in} \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Delta_i(t_0), \end{cases}$$

где знак $+$ или $-$ берется так, чтобы $\overline{y}_0(t,\varepsilon)$ была непрерывной функцией. Легко видеть, что $\overline{y}_0(t,\varepsilon)$ является решением уравнения

$$\varepsilon D^* \dot{y} + \left[\frac{2q(t) - \dot{p}(t)}{2} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon} + \overline{\varphi}_0(t,\varepsilon)\right] y = 0,$$

в котором

$$\overline{\varphi}_0(t,\varepsilon) = \begin{cases} \varphi_i(t,\varepsilon), & \text{если } t \in \Delta_i(t_0) \quad (i = 1,\ldots,n), \\ \dfrac{p^2(t)}{4\varepsilon} - \dfrac{2q(t) - \dot{p}(t)}{2}, & \text{если } t \in [t_1 - t_0, t_1 - t_0 + T] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Delta_i(t_0). \end{cases}$$

Далее, отметим, что функция $\dot{\overline{y}}_0(t,\varepsilon)$ непрерывно дифференцируема на $[t_1 - t_0, t_1 - t_0 + T]$ за исключением конечного числа точек, где существуют односторонние производные. Поэтому существует такая функция $y_0(t,\varepsilon)$, количество нулей которой на каждом из отрезков $\Delta_i(t_0)$ $(i = 1,\ldots,n)$ совпадает с числом нулей функции $\overline{y}_0(t,\varepsilon)$ и которая может быть отлична по модулю от единицы лишь на $\Delta_i(t_0)$ $(i = 1,\ldots,n)$. Наконец, $y_0(t,\varepsilon)$ является решением уравнения

$$\varepsilon \ddot{y} + \left[\frac{2q(t) - \dot{p}(t)}{2} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon} + \varphi_0(t,\varepsilon)\right] y = 0,$$

причем $\varphi_0(t,\varepsilon) \geq 0$. Остальные свойства функции $y_0(t,\varepsilon)$, о которых говорится в лемме, выполняются очевидным образом. Лемма доказана.

7. Обоснование теоремы 5

Предположим, что равенство (5.5) не имеет места, т.е. на некоторой последовательности $\varepsilon_m \to 0$

$$\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m^{-l_0}\left[h_1(\varepsilon_m) - \nu_1^+(\varepsilon_m)\right] = \delta_0, \tag{7.1}$$

где $\delta_0 \neq 0$, а $l_0 \geq 0$ – целое. Из того простого факта, что при $\lambda = \nu_1^+(\varepsilon)$ решения уравнения (5.1) экспоненциально устойчивы, следует неравенство

$$h_1(\varepsilon_m) > \nu_1^+(\varepsilon_m),$$

а значит, в (7.1)

$$\delta_0 > 0. \tag{7.2}$$

Если мы докажем существование таких периодических функций $\varphi_0(t,\varepsilon_m) \not\equiv 0$ и $x_0(t,\varepsilon_m) > 0$, для которых выполняется равенство

$$\varepsilon_m\ddot{x}_0(t,\varepsilon_m) + p(t)\dot{x}_0(t,\varepsilon_m) + [q(t) - h_1(\varepsilon_m) + \varphi_0(t,\varepsilon_m)]x_0(t,\varepsilon_m) = 0, \tag{7.3}$$

то тем самым получим противоречие с тем, что $h_1(\varepsilon_m)$ является собственным значением периодической краевой задачи. Здесь мы вновь используем результаты [3].

Приступим к построению функций $x_0(t,\varepsilon_m)$ и $\varphi_0(t,\varepsilon_m)$. Введем в рассмотрение новое самосопряженное уравнение

$$\varepsilon_m\ddot{x} + \widetilde{p}(t)\dot{x} + q(t)x = \lambda x, \tag{7.4}$$

в котором непрерывно дифференцируемая функция $\widetilde{p}(t)$ обладает следующими свойствами. Во-первых, она совпадает с функцией $p(t)$ там, где

$$p(t) \leq \alpha,$$

причем $\alpha > 0$, вообще говоря, достаточно мало. Насколько малым оно должно быть, будет видно из дальнейшего. Во-вторых, все нули $\widetilde{p}(t)$ совпадают соответственно с нулями функции $p(t)$. Наконец, в-третьих, выполняются соотношения

$$M[\widetilde{p}(t)] = 0, \quad \widetilde{p}(t) \leq p(t) \quad (t \in [0,T]). \tag{7.5}$$

Отметим, что для всех собственных значений $\nu_j^+(\varepsilon)$ и $\nu_j^-(\varepsilon)$ асимптотические в нуле представления вычислялись лишь по значениям функций $p(t)$, $q(t)$ и их производных в тех точках, где $p(t) = 0$. Поэтому из свойств функции $\widetilde{p}(t)$ вытекает, что первое собственное значение $\widetilde{\nu}_1^+(\varepsilon)$ периодической краевой задачи для уравнения (7.4) удовлетворяет равенству

$$\widetilde{\nu}_1^+(\varepsilon) - \nu_1^+(\varepsilon) = O(\varepsilon^\infty). \tag{7.6}$$

Рассмотрим затем уравнение

$$\varepsilon\ddot{x} + \widetilde{p}(t)\dot{x} + \left[q(t) - \widetilde{\nu}_1^+(\varepsilon) - \frac{\delta^0}{2}\varepsilon^{l_0}\right]x = 0, \tag{7.7}$$

где $\delta^0 = \begin{cases} \delta_0, & \text{если } \delta_0 < \infty, \\ 1, & \text{если } \delta_0 = \infty. \end{cases}$

С помощью замены $x = y\exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^t p(\tau)d\tau\right)$ это уравнение преобразуется к виду

$$\varepsilon\ddot{y} + \left[\frac{2q(t) - \dot{\widetilde{p}}(t)}{2} - \frac{\widetilde{p}^2(t)}{4\varepsilon} - \widetilde{\nu}_1^+(\varepsilon) - \frac{\delta^0}{2}\varepsilon^{l_0}\right]y = 0. \tag{7.8}$$

Нетрудно видеть, что к уравнению (7.8) применима лемма 2, т.е. существуют такие периодические функции $\widetilde{\varphi}_0(t,\varepsilon) \geq 0$ ($\not\equiv 0$) и $y_0(t,\varepsilon) > 0$, для которых справедливо дифференциальное равенство

$$\varepsilon\ddot{y}_0(t,\varepsilon) + \left[\frac{2q(t) - \dot{\widetilde{p}}(t)}{2} - \frac{\widetilde{p}^2(t)}{4\varepsilon} - \widetilde{\nu}_1^+(\varepsilon) - \frac{\delta^0}{2}\varepsilon^{l_0} + \widetilde{\varphi}_0(t,\varepsilon)\right]y_0(t,\varepsilon) = 0. \tag{7.9}$$

При этом функция $|y_0(t,\varepsilon)|$ может быть отлична от единицы лишь на некоторых интервалах, стягивающихся в точки $t_1, \ldots, t_n$ при уменьшении ε до нуля. Фиксируем, далее, такое $\varepsilon_0 > 0$, чтобы $|y_0(t,\varepsilon)| \equiv 1$ для всех тех значений $t \in [0,T]$, для которых

$$\widetilde{p}(t) < p(t).$$

Существование такого ε_0 не вызывает сомнений. В дальнейшем будем рассматривать только те значения ε, которые лежат в интервале $(0,\varepsilon_0)$.

Для периодической (в силу первого из условий (7.5)) функции

$$\widetilde{x}_0(t,\varepsilon) = y_0(t,\varepsilon)\exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^t \widetilde{p}(\tau)d\tau\right),$$

очевидно, выполняется соотношение

$$\varepsilon\ddot{\widetilde{x}}_0(t,\varepsilon) + \widetilde{p}(t,\varepsilon)\dot{\widetilde{x}}_0(t,\varepsilon) + \left[q(t) - \widetilde{\nu}_1^+(\varepsilon) - \frac{\delta^0}{2}\varepsilon^{l_0} + \widetilde{\varphi}_0(t,\varepsilon)\right]\widetilde{x}_0(t,\varepsilon) = 0.$$

Это равенство можно переписать и так:

$$\varepsilon\ddot{\widetilde{x}}_0(t,\varepsilon) + p(t)\dot{\widetilde{x}}_0(t,\varepsilon) + \Bigg[q(t) - \widetilde{\nu}_1^+(\varepsilon) - \frac{\delta^0}{2}\varepsilon^{l_0} + \widetilde{\varphi}_0(t,\varepsilon) +$$
$$+ (\widetilde{p}(t) - p(t))\left(\frac{\dot{y}_0(t,\varepsilon)}{y_0(t,\varepsilon)} - \frac{1}{2\varepsilon}\widetilde{p}(t)\right)\Bigg]\widetilde{x}_0(t,\varepsilon) = 0. \tag{7.10}$$

Из свойств функций $\widetilde{p}(t)$ и $y_0(t,\varepsilon)$ следует, что последний коэффициент, стоящий в квадратных скобках равенства (7.10), неотрицателен. После этого построение описанных функций $\varphi_0(t,\varepsilon_m)$ и $x_0(t,\varepsilon_m)$ завершается без труда. Действительно, фиксируем m_0 так, чтобы при всех $m > m_0$ выполнялось условие

$$h_1(\varepsilon_m) - \nu_1^+(\varepsilon_m) \geq \frac{\delta^0}{2}\varepsilon_m^{l_0}.$$

Тогда, очевидно,

$$-\nu_1^+(\varepsilon) - \frac{\delta^0}{2}\varepsilon_m^{l_0} + \varphi^0(t,\varepsilon_m) \geq -h_1(\varepsilon), \quad m > m_0, \tag{7.11}$$

причем тождественное равенство в последней формуле исключено. Здесь положено

$$\varphi^0(t,\varepsilon_m) = \widetilde{\varphi}_0(t,\varepsilon_m) + [\widetilde{p}(t) - p(t)]\left[\frac{\dot{y}_0(t,\varepsilon)}{y_0(t,\varepsilon)} - \frac{1}{2\varepsilon}\widetilde{p}(t)\right]$$

или, учитывая свойства функции $y_0(t,\varepsilon)$,

$$\varphi^0(t,\varepsilon_m) = \widetilde{\varphi}_0(t,\varepsilon_m) - \frac{1}{2\varepsilon}\widetilde{p}(t)[\widetilde{p}(t) - p(t)].$$

Используя равенство (7.6), замечаем, что в формуле (7.11) вместо $\nu_1^+(\varepsilon)$ можно писать $\widetilde{\nu}_1^+(\varepsilon)$. При этом, может быть, придется несколько увеличить m_0. Положим, наконец,

$$\varphi_0(t,\varepsilon_m) = h_1(\varepsilon) - \widetilde{\nu}_1^+(\varepsilon) - \frac{\delta^0}{2}\varepsilon_m^{l_0} + \varphi^0(t,\varepsilon_m).$$

Тогда уравнение (7.10) принимает вид (7.3), где $x_0(t,\varepsilon_m) \equiv \widetilde{x}_0(t,\varepsilon_m)$. При этом функция $\varphi_0(t,\varepsilon_m) \not\equiv 0$ неотрицательна на основании неравенства (7.11), а положительность функции $x_0(t,\varepsilon_m)$ вытекает из аналогичного свойства функции $y_0(t,\varepsilon_m)$. Таким образом, обоснование соотношения (5.5) завершено.

8. Обоснование соотношений (5.8)

В этом и следующем разделах мы будем предполагать, что при всех достаточно малых ε существуют собственные значения $h_{j_1}(\varepsilon)$ и $h_{j_1+1}(\varepsilon)$, удовлетворяющие неравенствам (5.6). Доказательство же существования таких собственных значений будет проведено несколько позже.

В настоящем разделе будут использованы рассуждения, подобные тем, которые применялись для обоснования равенства (5.5).

Итак, предположим, что для некоторого номера j_0 асимптотические в нуле ряды для $\nu_{2j_0}^+(\varepsilon)$ и $\nu_{2j_0+1}^+(\varepsilon)$ не совпадают. Сразу отметим, что подобный случай для собственных значений $\nu_{2j_0-1}^-(\varepsilon)$ и $\nu_{2j_0}^-(\varepsilon)$ разбирается аналогично, и поэтому мы его опустим. Доказательство соотношения (5.8) проведем, как мы уже неоднократно делали, рассуждая от противного. На этом пути получим равенство

$$\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m^{-l_0}\left[h_{j_1+1}(\varepsilon_m) - \nu_{2j_0+1}^+(\varepsilon_m)\right] = \delta_0. \tag{8.1}$$

Здесь $\varepsilon_m \to 0$, а $\delta_0 \neq 0$. Из неравенств (5.6) получаем, что $\delta_0 > 0$. Если мы покажем, что для всех достаточно больших m имеют место соотношения

$$\varepsilon_m \ddot{x}_0(t,\varepsilon_m) + p(t)\dot{x}_0(t,\varepsilon_m) + [q(t) - h_{j_1+1}(\varepsilon_m) + \varphi_0(t,\varepsilon_m)]x_0(t,\varepsilon_m) = 0, \tag{8.2}$$

где $\varphi_0(t,\varepsilon_m) \geq 0$ ($\not\equiv 0$), а $x_0(t,\varepsilon_m)$ – периодическая функция, имеющая ровно $2j_0$ нулей на некотором отрезке длины периода, то тем самым получим противоречие с (8.1), а значит, докажем равенство (5.8). Соответствующие рассуждения, приводящие к нужному результату, близки к использованным в предыдущем разделе. Единственное отличие состоит в том, что функция $y_0(t,\varepsilon_m)$ в нашем случае будет иметь ровно $2j_0$ нулей на некотором отрезке длины периода. Наличие нужного числа нулей у функции $y_0(t,\varepsilon_m)$ удается проследить, используя снова лемму 2.

9. Обоснование соотношений (5.7)

Общий ход рассуждений в этом разделе тот же, что и в двух предыдущих. Однако в деталях соответствующие построения существенно отличаются от изложенных ранее.

Итак, пусть асимптотические в нуле ряды для собственных значений $\nu^+_{2j_0}(\varepsilon)$ и $\nu^+_{2j_0+1}(\varepsilon)$ не совпадают. Предположим противное, т.е. пусть соотношение (5.7) места не имеет. Тогда найдется такой номер $l_0 \geq 0$ и такая последовательность $\varepsilon_m \to 0$, что

$$\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m^{-l_0} \left[h_{j_1}(\varepsilon_m) - \nu^+_{2j_0}(\varepsilon_m)\right] = \delta_0, \tag{9.1}$$

где $\delta_0 \neq 0$. Отметим, что в силу (5.6)

$$\delta_0 < 0. \tag{9.2}$$

Нашей конечной целью является построение такой „пробной“ функции $x^0(t, \varepsilon_m)$, которая, во-первых, периодична и является решением уравнения

$$\varepsilon_m \ddot{x} + p(t)\dot{x} + [q(t) - h_{j_1}(\varepsilon_m) - \varphi_0(t, \varepsilon_m)]x = 0, \tag{9.3}$$

где периодическая функция $\varphi_0(t, \varepsilon_m)$ положительна и, во-вторых, $x^0(t, \varepsilon_m)$ имеет ровно $2j_0$ нулей на любом отрезке $[\alpha, \alpha + T]$, для которого выполнено условие $x^0(t, \varepsilon_m) \neq 0$. Построив функцию, обладающую перечисленными выше свойствами, мы, очевидно, получим противоречие с тем, что $h_{j_1}(\varepsilon_m)$ является собственным значением периодической краевой задачи и удовлетворяет неравенствам (5.6).

При построении функции $x^0(t, \varepsilon_m)$ основную роль будет играть некоторая вспомогательная функция $y_0(t, \varepsilon_m)$. Определим эту функцию. Для этого введем в рассмотрение уравнение

$$\varepsilon_m \ddot{y} + \psi_0(t, \varepsilon_m)y = \lambda y. \tag{9.4}$$

В (9.4) периодическая функция $\psi_0(t, \varepsilon_m)$ определяется следующим образом. Фиксируем сначала такой отрезок $[\alpha_1, \beta_1] \subset [0, T]$, чтобы при всех $t \in [\alpha_1, \beta_1]$ функция $p(t)$ была отрицательной. Положим затем

$$\psi_0(t, \varepsilon_m) = \begin{cases} q(t) - \frac{1}{2}\dot{p}(t) - \frac{1}{4\varepsilon_m}p^2(t), & t \in [0, T] \quad t\overline{\in}(\alpha_1, \beta_1), \\ -\dfrac{a_0}{\varepsilon_m^2}, & t \in (\alpha_1, \beta_1), \end{cases}$$

где $a_0 > 0$. Отметим, что в дальнейшем будем рассматривать лишь те значения m, при которых выполняется неравенство

$$\psi_0(t, \varepsilon_m) \leq -\frac{1}{2}\dot{p}(t) - \frac{1}{4\varepsilon_m}p^2(t) + q(t), \quad t \in [0, T].$$

Поставим теперь для уравнения (9.4) периодическую краевую задачу. Собственные значения $\overline{\nu}^+_j(\varepsilon_m)$ этой краевой задачи будем нумеровать в порядке убывания. Нас будет интересовать поведение только собственного значения $\overline{\nu}^+_{2j_0}(\varepsilon_m)$. Для него, впрочем, как и для всех остальных собственных значений, справедливо асимптотическое равенство

$$\overline{\nu}^+_{2j_0}(\varepsilon_m) - \nu^+_{2j_0}(\varepsilon_m) = O(\varepsilon^\infty). \tag{9.5}$$

Этот важный для нас вывод следует непосредственно из результатов работ [4] и [5] и разделов 1–4. Обозначим, далее, через $y_0(t,\varepsilon_m)$ собственную функцию, соответствующую собственному значению $\overline{\nu}^{+}_{2j_0}(\varepsilon_m)$. От возможного поведения этой функции зависят последующие построения. В связи с этим изучим некоторые свойства функции $y_0(t,\varepsilon_m)$.

Предположим сначала существование такой подпоследовательности $\{\varepsilon_{m_k}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, что при каждом ε_{m_k} функция $y_0(t,\varepsilon_{m_k})$ имеет нуль на отрезке $[\alpha_1,\alpha_2]\subset[\alpha_1,\beta_1)$.

Лемма 3. *Существует такое m_0, что при всех $m_k > m_0$ функция*

$$u_0(t,\varepsilon_{m_k})=\frac{\dot y_0(t,\varepsilon_{m_k})}{y_0(t,\varepsilon_{m_k})}$$

положительна для значений t из промежутка $[\overline{\alpha}_0+rT,\overline{\beta}_0+rT]$ $(r=0,\pm1,\pm2,\dots)$, где

$$\alpha_2<\overline{\alpha}_0<\overline{\beta}_0\le\beta_1.$$

Ниже для сокращения записи часто будем считать, что в качестве подпоследовательности $\{\varepsilon_{m_k}\}$ взята сама последовательность $\{\varepsilon_m\}$.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно заметить, что в уравнении

$$\varepsilon_m\ddot y+[\psi_0(t,\varepsilon_m)-\overline{\nu}^{+}_{2j_0}(\varepsilon_m)]y=0, \tag{9.6}$$

решением которого является $y_0(t,\varepsilon_m)$, коэффициент, стоящий при y, отрицателен при всех малых ε_m и $t\in[\alpha_1+rT,\beta_1+rT]$ $(r=0,\pm1,\pm2,\dots)$.

Предположим, далее, что описанная выше ситуация места не имеет, т.е. нельзя указать такого отрезка вида $[\alpha_1,\alpha_2]\subset[\alpha_1,\beta_1)$, на котором бы функция $y_0(t,\varepsilon_m)$ обращалась в нуль на некоторой подпоследовательности $\{\varepsilon_{m_k}\}\subset\{\varepsilon_m\}$. Тогда выполняется хотя бы один из следующих двух случаев. Первый из них состоит в допущении существования такого отрезка $[\overline{\alpha}_0,\overline{\beta}_0]\subset(\alpha_1,\beta_1)$, что при всех $t\in[\overline{\alpha}_0,\overline{\beta}_0]$ функция $u_0(t,\varepsilon_m)$ неотрицательна на некоторой подпоследовательности $\{\varepsilon_{m_k}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$. Второй случай состоит в том, что найдется такой отрезок $[\alpha_2,\beta_2]\subset[\alpha_1,\beta_1]$ и такая подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_k}\}$, что при $t\in[\alpha_2,\beta_2]$ и малых ε_{m_k} функция $y_0(t,\varepsilon_{m_k})$ в нуль не обращается, а знак ее производной противоположен знаку самой функции. Определим в последнем случае отрезок $[\overline{\alpha}_0,\overline{\beta}_0]$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\alpha_2\le\overline{\alpha}_0<\overline{\beta}_0<\beta_2. \tag{9.7}$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *Имеет место оценка*

$$|u_0(t,\varepsilon_{m_k})|\le\frac{c_0}{(\varepsilon_{m_k})^{\frac{3}{2}}},\quad t\in[\alpha_0+rT,\beta_0+rT]\quad(r=0,\pm1,\pm2,\dots), \tag{9.8}$$

где c_0 не зависит от ε_{m_k}.

Доказательство. Ниже вместо ε_{m_k} будем писать ε_m. Для доказательства леммы заметим, что на отрезке $[\alpha_1, \beta_2]$ выполняется равенство

$$y_0(t, \varepsilon_m) = c_1(\varepsilon_m) \exp\left(\sqrt{\frac{a_0}{\varepsilon_m^3} - \frac{1}{\varepsilon_m}\overline{\nu}_{2j_0}^+(\varepsilon_m)}t\right) +$$

$$+c_2(\varepsilon_m) \exp\left(-\sqrt{\frac{a_0}{\varepsilon_m^3} - \frac{1}{\varepsilon_m}\overline{\nu}_{2j_0}^+(\varepsilon_m)}t\right).$$

Далее, из условий

$$|y_0(t, \varepsilon_m)| > 0 \quad \text{и} \quad y_0(t, \varepsilon_m)\dot{y}_0(t, \varepsilon_m) < 0, \quad t \in [\alpha_1, \beta_2]$$

вытекает соотношение

$$|c(\varepsilon_m)| \leq \exp\left(-2\beta_2\sqrt{\frac{a_0}{\varepsilon_m^3} - \frac{1}{\varepsilon_m}\overline{\nu}_{2j_0}^+(\varepsilon_m)}\right), \tag{9.9}$$

где положено

$$c(\varepsilon_m) = \frac{c_1(\varepsilon_m)}{c_2(\varepsilon_m)}.$$

Для функции $u_0(t, \varepsilon_m)$ на отрезке $[\overline{\alpha}_0, \overline{\beta}_0]$ справедлива формула

$$u_0(t, \varepsilon_m) = \left[c(\varepsilon_m) - \exp\left(-2t\sqrt{\frac{a_0}{\varepsilon_m^3} - \frac{1}{\varepsilon_m}\overline{\nu}_{2j_0}^+(\varepsilon_m)}\right)\right] \times$$

$$\times \left[c(\varepsilon_m) + \exp\left(-2t\sqrt{\frac{a_0}{\varepsilon_m^3} - \frac{1}{\varepsilon_m}\overline{\nu}_{2j_0}^+(\varepsilon_m)}\right)\right]^{-1} \sqrt{\frac{a_0}{\varepsilon_m^3} - \frac{1}{\varepsilon_m}\overline{\nu}_{2j_0}^+(\varepsilon_m)}.$$

Отсюда, принимая во внимание (9.7) и (9.9), и следует обоснование леммы.

На следующем этапе введем в рассмотрение еще одну вспомогательную периодическую и непрерывно дифференцируемую функцию $p_0(t)$. Положим

$$p_0(t) \equiv p(t), \quad t \in [0, T], \quad t \overline{\in} [\overline{\alpha}_0, \overline{\beta}_0],$$

а на отрезке $[\overline{\alpha}_0, \overline{\beta}_0]$ определим $p_0(t)$ так, чтобы выполнялись условия:

$$M[p_0(t)] = 0, \quad p_0(t) \leq p(t), \quad t \in [0, T]. \tag{9.10}$$

Будем, далее, считать, что число m_0 выбрано таким образом, чтобы для всех $m > m_0$ имело место неравенство

$$\frac{a_0}{\varepsilon_m^2} > \frac{1}{2}\dot{p}_0(t) + \frac{1}{4\varepsilon_m}p_0^2(t), \quad t \in [\overline{\alpha}_0, \overline{\beta}_0]. \tag{9.11}$$

Теперь, когда все подготовительные построения проделаны, мы можем определить функцию $x^0(t, \varepsilon_m)$. Для этого положим

$$x^0(t, \varepsilon_m) = y_0(t, \varepsilon_m) \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon_m}\int_0^t p_0(\tau)d\tau\right). \tag{9.12}$$

Для этой функции справедливо дифференциальное равенство

$$\varepsilon_m \ddot{x}^0(t,\varepsilon_m) + p_0(t)\dot{x}^0(t,\varepsilon_m) +$$
$$+\left[\psi_0(t,\varepsilon_m) + \frac{1}{2}\dot{p}_0(t) + \frac{1}{4\varepsilon_m}p_0^2(t) - \overline{\nu}^+_{2j_0}(\varepsilon_m)\right] x^0(t,\varepsilon_m) = 0. \tag{9.13}$$

Последнее выражение можно переписать и так:

$$\varepsilon_m \ddot{x}^0(t,\varepsilon_m) + p(t)\dot{x}^0(t,\varepsilon_m) + \left[\psi_0(t,\varepsilon_m) + \frac{1}{2}\dot{p}_0(t) + \frac{1}{4\varepsilon_m}p_0^2(t) - \overline{\nu}^+_{2j_0}(\varepsilon_m) +\right.$$
$$\left. +(p_0(t) - p(t))(u_0(t,\varepsilon_m) - \frac{1}{2\varepsilon_m}p_0(t))\right] x^0(t,\varepsilon_m) = 0. \tag{9.14}$$

Таким образом, мы показали, что функция $x^0(t,\varepsilon_m)$ является решением уравнения (9.3), в котором

$$-\varphi_0(t,\varepsilon_m) = \psi_0(t,\varepsilon_m) + \frac{1}{2}\dot{p}_0(t) + \frac{1}{4\varepsilon_m}p_0^2(t) - \overline{\nu}^+_{2j_0}(\varepsilon_m) +$$
$$+h_{j_1}(\varepsilon_m) - q(t) + [p_0(t) - p(t)]\left[u_0(t,\varepsilon_m) - \frac{1}{2\varepsilon_m}p_0(t)\right].$$

Установим теперь положительность функции $\varphi_0(t,\varepsilon_m)$. Из определения функций $\psi_0(t,\varepsilon_m)$ и $p_0(t)$ вытекает неравенство

$$\psi_0(t,\varepsilon_m) + \frac{1}{2}\dot{p}_0(t) + \frac{1}{4\varepsilon_m}p_0^2(t) - q(t) +$$
$$+[p_0(t) - p(t)]\left[u_0(t,\varepsilon_m) - \frac{1}{2\varepsilon_m}p_0(t)\right] \le 0, \tag{9.15}$$

если только ε_m достаточно мало. Действительно, если на отрезке $[\overline{\alpha}_0, \overline{\beta}_0]$ функция $u_0(t,\varepsilon_m)$ положительна, то все последнее слагаемое в (9.15) неположительно. Если функция $u_0(t,\varepsilon_m)$ отрицательна на $[\overline{\alpha}_0, \overline{\beta}_0]$, то, как мы показали, имеет место оценка (9.8). Поэтому все равно знак левой части (9.15) будет определяться при малых ε_m первым слагаемым, которое отрицательно на отрезке $[\alpha_1, \beta_1] \supset [\overline{\alpha}_0, \overline{\beta}_0]$. Наконец, из соотношений (9.3), (9.4) и (9.5) получаем, что

$$\overline{\nu}^+_{2j_0}(\varepsilon_m) - h_{j_1}(\varepsilon_m) > \varepsilon_m^{l_0}\delta^0, \quad m > m_0,$$

в котором m_0 достаточно велико, а δ^0 определяется формулой

$$\delta^0 = \begin{cases} -\dfrac{\delta_0}{2}, & \text{если} \quad \delta_0 \ne -\infty, \\ 1, & \text{если } \delta_0 = \infty. \end{cases}$$

Итак, мы установили неравенство

$$\varphi_0(t,\varepsilon_m) \ge \varepsilon_m^{l_0}\delta^0 \quad (m > m_0).$$

Остальные нужные нам свойства функции $x^0(t,\varepsilon_m)$ выполняются очевидным образом. Отметим лишь, что из периодичности функции $y_0(t,\varepsilon_m)$ и из условия (9.10) следует периодичность функции $x^0(t,\varepsilon_m)$.

10. Завершение доказательств теорем несамосопряженного случая

Прежде всего закончим обоснование теоремы 5. Для этого нам осталось лишь установить существование при всех достаточно малых ε собственных значений $h_{j_1}(\varepsilon)$ и $h_{j_1+1}(\varepsilon)$, удовлетворяющих неравенствам (5.6). Напомним, что мы рассматриваем тот случай, когда асимптотические в нуле ряды для собственных значений $\nu^+_{2j_0}(\varepsilon)$ и $\nu^+_{2j_0+1}(\varepsilon)$ не совпадают. В этом случае найдется такой номер $l \geq 0$, что

$$\delta_0 = \nu^+_{2j_0,l} - \nu^+_{2j_0+1,l} > 0, \tag{10.1}$$

где через $\nu^+_{2j_0,l}$ и $\nu^+_{2j_0+1,l}$ обозначены l-е производные по ε при $\varepsilon = 0$ соответственно функций $\nu^+_{2j_0}(\varepsilon)$ и $\nu^+_{2j_0+1}(\varepsilon)$ параметра ε. Через l_0 обозначим наименьший из номеров l, удовлетворяющих неравенству (10.1).

Введем, далее, в рассмотрение дифференциальное уравнение

$$\varepsilon\ddot{x} + p(t)\dot{x} + \left[q(t) - \nu^+_{2j_0}(\varepsilon) + \varepsilon^{l_0}\frac{\delta_0}{2}\right]x = 0. \tag{10.2}$$

При $\lambda = \nu^+_{2j_0}(\varepsilon)$ и $\lambda = \nu^+_{2j_0+1}(\varepsilon)$ решения уравнения (5.1) экспоненциально устойчивы. Поэтому для доказательства существования собственных значений $h_{j_1}(\varepsilon)$ и $h_{j_1+1}(\varepsilon)$ периодической краевой задачи для уравнения (5.1), удовлетворяющих соотношениям (5.6), достаточно показать, что решения уравнения (10.2) неустойчивы при малых ε. Для этого, в свою очередь, мы воспользуемся критерием неустойчивости, полученным в [3] (§1.5 глава 1).

Итак, мы покажем, как определить такие периодические функции $u_1(t,\varepsilon)$ и $u_2(t,\varepsilon)$, чтобы, во-первых, выполнялись дифференциальные равенства

$$\begin{gathered}\varepsilon\ddot{u}_i(t,\varepsilon) + p(t)\dot{u}_i(t,\varepsilon)+\\ +\left[q(t) - \nu^+_{2j_0}(\varepsilon) + \varepsilon^{l_0}\frac{\delta_0}{2} + (-1)^i\varphi_i(t,\varepsilon)\right]u_i(t,\varepsilon) = 0,\end{gathered} \tag{10.3}$$

в которых $\varphi_i(t,\varepsilon) \not\equiv 0$ $(i = 1,2)$ есть неотрицательные периодические функции, а во-вторых, чтобы каждая из функций $u_1(t,\varepsilon)$ и $u_2(t,\varepsilon)$ имела ровно $2j_0$ нулей на любом таком отрезке $[\alpha_1(\varepsilon), \alpha_1(\varepsilon)+T]$ и $[\alpha_2(\varepsilon), \alpha_2(\varepsilon)+T]$ соответственно, что $u_1(\alpha_1(\varepsilon),\varepsilon) \neq 0$ и $u_2(\alpha_2(\varepsilon),\varepsilon) \neq 0$. При этом мы воспользуемся некоторыми построениями, приведенными в разделах 7–9 настоящей статьи.

Положим

$$u_1(t,\varepsilon) = x^0(t,\varepsilon), \quad u_2(t,\varepsilon) = x_0(t,\varepsilon),$$

где функции $x^0(t,\varepsilon)$ и $x_0(t,\varepsilon)$ определены в разделах 8 и 9. Тогда, очевидно, выполняются равенства (10.3), в которых функции $\varphi_i(t,\varepsilon)$ таковы:

$$\begin{gathered}\varphi_1(t,\varepsilon) = \overline{\nu}^+_{2j_0}(\varepsilon) - \nu^+_{2j_0}(\varepsilon) + \varepsilon^{l_0}\frac{\delta_0}{2} + q(t) - \psi_0(t,\varepsilon)-\\ -\frac{1}{2}\dot{p}_0(t) - \frac{1}{4\varepsilon}p_0^2(t) + [p(t) - p_0(t)]\left[u_0(t,\varepsilon) - \frac{1}{2\varepsilon}p_0(t)\right],\end{gathered} \tag{10.4}$$

$$\varphi_2(t,\varepsilon)=\nu^+_{2j_0}(\varepsilon)-\overline{\nu}^+_{2j_0+1}(\varepsilon)-\frac{3}{4}\varepsilon^{l_0}\delta_0+\varphi^0(t,\varepsilon). \tag{10.5}$$

В формулах (10.4) и (10.5) использованы обозначения, подобные тем, которые применялись в разделах 7–9. Детальнее мы на этом останавливаться не будем. Для доказательства положительности при всех достаточно малых ε функций $\varphi_1(t,\varepsilon)$ и $\varphi_2(t,\varepsilon)$ заметим, что имеют место соотношения

$$\overline{\nu}^+_{2j_0}(\varepsilon)-\nu^+_{2j_0}(\varepsilon)=O(\varepsilon^\infty),$$

$$[p(t)-p_0(t)]\left[u_0(t,\varepsilon)-\frac{1}{2\varepsilon}p_0(t)\right]+q(t)-$$

$$-\frac{1}{2}\dot{p}_0(t)-\frac{1}{4\varepsilon}p_0^2(t)-\psi_0(t,\varepsilon)\geq 0,$$

$$\nu^+_{2j_0}(\varepsilon)-\overline{\nu}_{2j_0+1}(\varepsilon)-\varepsilon^{l_0}\delta_0=O(\varepsilon^{l_0}),\quad \varphi^0(t,\varepsilon)\geq 0,$$

полученные ранее.

Отметим, что в случае несовпадения асимптотических рядов для собственных значений $\nu^-_{2j_0-1}(\varepsilon)$ и $\nu^-_{2j_0}(\varepsilon)$ антипериодической краевой задачи доказательство теоремы 6 проводится аналогично, и поэтому мы его приводить не будем.

Как следствие трех теорем 5, 6 и [3] (теорема 1.5.2) – получаем обоснование критерия устойчивости, содержащегося в теореме 7. Первое утверждение теоремы 9, а с ним и теорема 10, также являются непосредственным следствием теорем 5, 6 и результатов, полученных [3] – [5]. Второе утверждение теоремы 9, в свою очередь, вытекает из утверждений теорем 1.5.2 из [3] и 3. Таким образом, нам осталось доказать лишь теорему 8, причем достаточно ограничиться случаем, когда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\nu_1^+(\varepsilon)=\nu_0.$$

Отсюда можно сделать вывод о справедливости неравенства

$$\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}h_1(\varepsilon)\geq\nu_0.$$

Доказательство наличия равенства (5.10) для $h_1(\varepsilon)$ можно провести с помощью построения, как мы уже делали, „пробной“ функции. При этом используются примерно те же соображения, что и приведенные в разделе 7. Детально на этом мы останавливаться не будем.

В заключение отметим, что развитую в двух предыдущих параграфах теорию можно обобщить на более общий класс уравнений

$$\varepsilon\ddot{x}+p(t,\varepsilon)\dot{x}+q(t,\varepsilon)x=\lambda r(t,\varepsilon)x,$$

где периодические по t функции разлагаются в асимптотические ряды по ε при $\varepsilon=0$. Пользуясь методикой, разработанной в предыдущих разделах, можно изучить асимптотику собственных значений в случае наличия у функции $p(t,0)$ нулей конечной кратности.

11. Заключение

Сформулируем кратко основные выводы. Найдены предельные значения всех собственных чисел первой краевой задачи. Эти значения принципиальным образом отличаются от тех, которые имеют место в уравнении без точек поворота. Как оказалось, существенное значение для нахождения асимптотики собственных чисел имеет поведение функций $p(t)$ и $q(t)$ только в достаточно малых окрестностях точек поворота.

Список литературы / References

[1] Коддингтон Э., Левинсон И., *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1958; English transl.: Coddington E., Levinson N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill Book Company, London, 1955.

[2] Якубович В. А., Старжинский В. М., *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами*, Наука, М., 1972; [Yakubovich V. A., Starzhinskiy V. M., *Lineynye differentsial'nye uravneniya s periodicheskimi koeffitsientami*, Nauka, M., 1972, (in Russian).]

[3] Кащенко С. А., *Устойчивость уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами*, Ярославль, 2006; [Kashchenko S. A., *Ustoychivost uravneniy vtorogo poryadka s periodicheskimi koeffitsientami*, Yaroslavl, 2006, (in Russian).]

[4] Кащенко С. А., "Асимптотика собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:5 (2015), 682–710; [Kashchenko S. A., "Asymptotics of Eigenvalues of First Boundary Value Problem for Singularly Pertubed Second-order Differential Equation with Turning Points", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:5 (2015), 682–710, (in Russian).]

[5] Кащенко С. А., "Асимптотические разложения собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:1 (2016), 41–60; [Kashchenko S. A., "Asymptotics of Eigenvalues of First Boundary Value Problem for Singularly Pertubed Second-order Differential Equation with Turning Points", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:1 (2016), 41–60, (in Russian).]

[6] Кащенко С.А., Колесов Ю.С., "Критерий устойчивости решений сингулярно возмущенных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами", *УМН*, **XXIX**:4 178 (1974), 171–172; [Kashchenko S. A., Kolesov Y.S., "Kriteriy ustoychivosti resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy vtorogo poryadka s periodicheskimi koeffitsiyentami", *UMN*, **XXIX**:4 178 (1974), 171–172, (in Russian).]

[7] Колесов Ю.С., "Периодические решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка", *Тр. Моск. мат. общ.*, **21** (1970), 103–134; [Kolesov Y.S., "Periodicheskiye resheniya kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy vtorogo poryadka", *Tr. Mosk. mat. obshch.*, **21** (1970), 103–134, (in Russian).]

[8] Наймарк М. А., *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969; [Naymark M. A., *Lineynyye differentsial'nyye operatory*, Nauka, M., 1969, (in Russian).]

[9] Чаплыгин В. Ф., "Положительные периодические решения сингулярно возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка", *Тр. научно-исслед. ин-та математики ВГУ*, **2** (1970), 43–46; [Chaplygin V. F., "Polozhitel'nyye periodicheskiye resheniya singulyarno vozmushchennykh nelineynykh differentsial'nykh uravneniy vtorogo poryadka", *Tr. nauchno-issled. in-ta matematiki VGU*, **2** (1970), 43–46, (in Russian).]

Kashchenko S. A., "Asymptotic Expansions of Eigenvalues of Periodic and Antiperiodic Boundary Problems for Singularly Perturbed Second Order Differential Equation with Turning Points", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:1 (2016), 61–85.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-1-61-85

Abstract. For a second order equation with a small factor at the highest derivative the asymptotic behavior of all eigenvalues of periodic and antiperiodic problems is studied. The main assumption is that the coefficient at the first derivative in the equation is the sign of the variable so that turning points exist an algorithm for computing all coefficients of asymptotic series for every considered eigenvalue is developed. It turns out that the values of these coefficients are defined by coefficient values of the original equation only in a neighborhood of turning points. Asymptotics for the length of Lyapunov zones of stability and instability was obtained. In particular, the problem of stability of solutions of second order equations with periodic coefficients and small parameter at the highest derivative was solved.

Keywords: singularly perturbed equation, turning points, asymptotic, boundary value problem, eigenvalues

On the authors:

Kashchenko Sergey Alexandrovich, orcid.org/0000-0002-8777-4302, doctor of science, professor,

P.G. Demidov Yaroslavl State University,

Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: kasch@uniyar.ac.ru